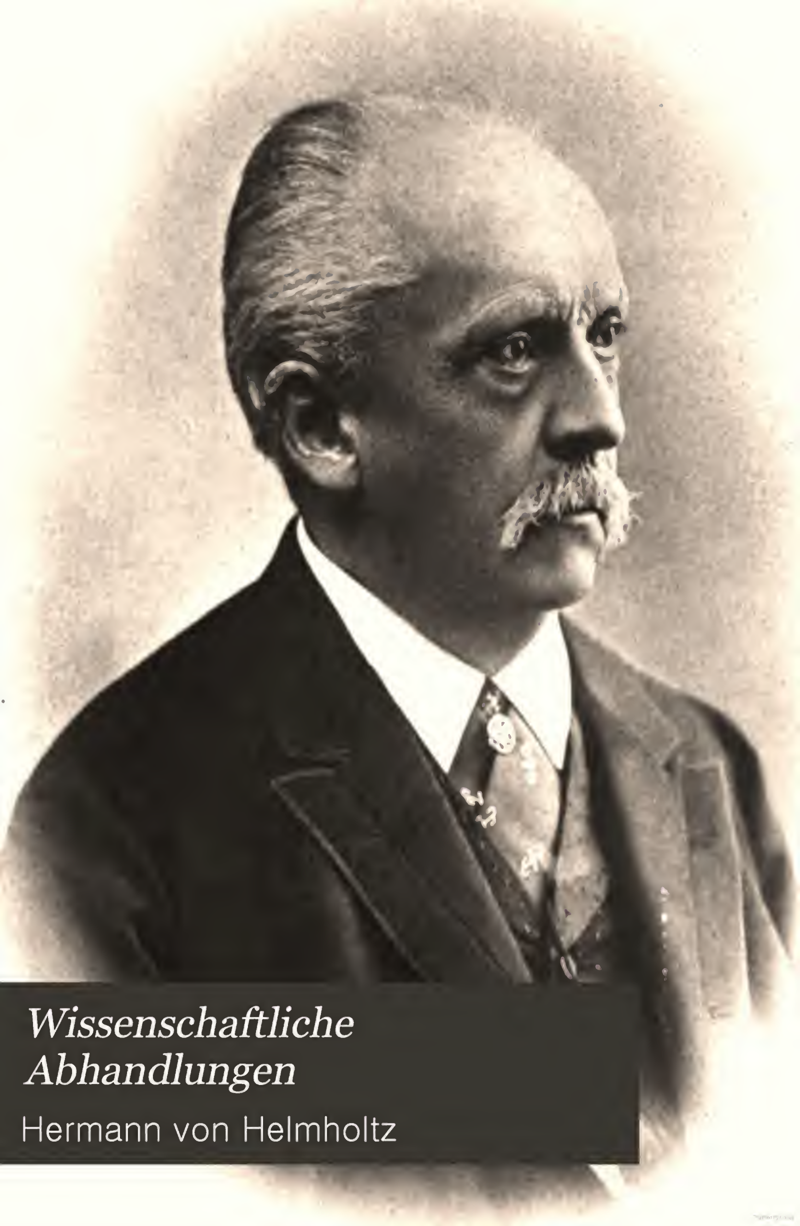


Wissenschaftliche Abhandlungen

Hermann von Helmholtz

VON HELMHOLTZ

WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN.



H. v. Helmholtz

Nach einer Photographie von Giacomo Brogi in Florenz aus dem Jahre [illegible]

Photogravure Meisenbach Riffarth & Co. Berlin.

ABHANDLUNGEN

HERMANN VON [illegible]

[illegible] NISS



LE[illegible]
[illegible] AMBR[illegible]
18[illegible]



WISSENSCHAFTLICHE

ABHANDLUNGEN

VON

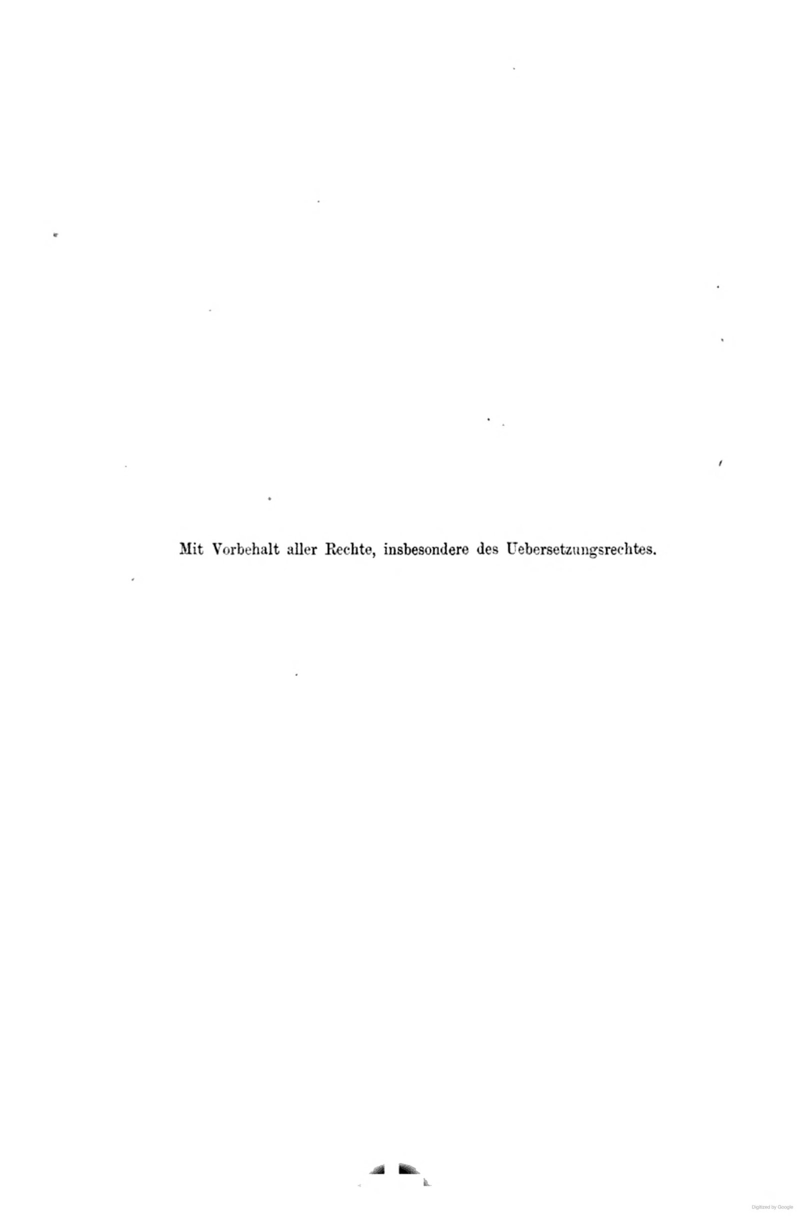
HERMANN VON HELMHOLTZ

DRITTER BAND

MIT EINEM BILDNISS



LEIPZIG
JOHANN AMBROSIUS BARTH
1895



Vorwort.

Im Herbst 1892 fasste Hermann von Helmholtz den Entschluss, die Sammlung seiner „Wissenschaftlichen Abhandlungen“ fortzusetzen. Diejenigen Abhandlungen, welche in den beiden bereits erschienenen Bänden vergessen waren und im Anschlusse daran die neueren inzwischen verfassten Abhandlungen sollten den ersten Halbband des dritten Bandes bilden. „Ich hoffe, in meinem Leben doch noch Einiges zu schreiben, das kann später den zweiten Halbband füllen.“ In ungebrochener Geistes- und Körperfrische äusserte diese Worte der damals bereits Einundsiebzigjährige zu mir, der ich ihm, wie bei den ersten beiden Bänden der Sammlung, so auch jetzt wieder helfend zur Seite stehen wollte. Niemand konnte ahnen, dass zwei Jahre später, noch ehe der durch andere sich zwischendrängende Arbeiten nur langsam fortschreitende Druck des projectirten Halbbandes beendet war, Hermann von Helmholtz bereits aus einem Leben rastloser, reich gesegneter Arbeit zur ewigen Ruhe des Todes eingegangen war.

Mir ist nach einem von dem Verstorbenen ausgesprochenen Wunsche die traurige Pflicht zugefallen, die Herausgabe des

begonnenen Bandes zu vollenden, der nunmehr in der vorliegenden Gestalt die Sammlung abschliesst. Er wird eingeleitet durch einen Nekrolog, in dem Hr. Gustav Wiedemann in liebevoller Weise schildert, wie der persönliche Entwickelungsgang des Verstorbenen durch die Fortschritte der naturwissenschaftlichen Erkenntnisse unseres Jahrhunderts bedingt war und zugleich auch wiederum auf sie zurückgewirkt hat.

Die Grundsätze, nach denen die Herausgabe dieses dritten Bandes erfolgt ist, sind im Wesentlichen dieselben wie in den beiden früheren Bänden, und es kann daher für sie auf das Vorwort des ersten Bandes verwiesen werden.

Die raumersparende Form der Brüche a/b ist beibehalten, obschon der Verfasser sich von ihrem Mangel an Uebersichtlichkeit immer mehr überzeugte und sie am liebsten wieder hätte fallen lassen; doch erschien es uns nicht rathsam, eine so durchgreifende Abweichung von den beiden ersten Bänden eintreten zu lassen.

Wie schon erwähnt, bilden den Anfang die bis zum Jahre 1892 aufgefundenen, in den beiden ersten Bänden vergessenen Abhandlungen, dann folgen in wesentlich chronologischer Anordnung die seit 1883 veröffentlichten Abhandlungen, hierauf die während des fortschreitenden Druckes bei dem Zusammenstellen des weiter unten noch eingehender besprochenen „Titelverzeichnisses" aufgefundenen Abhandlungen, den Schluss endlich bildet ein nachgelassenes Fragment.

Der Verfasser hat noch selbst die Correcturen des vorliegenden Bandes bis zum Schlusse der Abhandlung No. CXXXIII (S. 475) vollständig erledigt, und bis dahin ist denn auch in Bezug auf die vorgenommenen Aenderungen ganz in der Weise der früheren Bände verfahren worden. Rein stilistische, den Sinn nicht berührende Aenderungen wurden ohne weitere Bemerkung vorgenommen, betrafen sie aber den Sinn oder insbesondere eine mathematische Formel, so ist stets durch eine

mit der Jahreszahl (1893 oder 1894) versehene Anmerkung auf diese Aenderung hingewiesen worden.

An den Correcturbogen der folgenden Abhandlung No. CXXXIV „über das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik“ nahm der Verfasser noch mehrere grössere textliche Aenderungen vor, wodurch der Sinn zwar schärfer gefasst, aber nicht geändert wurde; einzelne mathematische Formeln wurden umgestaltet. Mit dieser Arbeit war er noch nicht ganz zu Ende gekommen, als am 12. Juli v. J. seine Erkrankung jeder weiteren Thätigkeit ein Ende setzte. Es ergab sich aber nach seinem Tode, dass der Text genau in der hinterlassenen Form gedruckt werden konnte, ohne dass irgend welche Lücke bestand. (S. Anmerk. S. 496 dieses Bandes.)

Bei der Umarbeitung dieses Aufsatzes hatte der Verfasser eine einfachere und leichter übersichtliche Methode zur Lösung eines darin enthaltenen Problems gefunden. Sie wurde von ihm am 14. Juni vor. Jahres in der hiesigen Akademie vorgetragen, aber noch nicht dem Drucke übergeben. Der Nachlass enthielt ein Bruchstück der Ausarbeitung, welches mit ganz geringen Aenderungen, die nur die Bezeichnungen u. s. w. betreffen, in dem vorliegenden Bande als No. CXLIV abgedruckt ist.

Ich schulde meinem Collegen Herrn M. Planck grossen Dank dafür, dass er sich der zeitraubenden Mühe der endgültigen Fertigstellung der letztgenannten Abhandlung unterzogen hat.

Die Correctur der Abhandlung No. CXXXV „Elektromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung“ hat Hr. O. Krigar-Menzel, der sich mit diesem Gegenstande gerade kurz zuvor eingehend beschäftigt hatte, in dankenswerther Weise bereitwillig übernommen. Die wenigen Aenderungen, welche hier vorgenommen werden mussten, rühren von ihm her.

Die Abhandlung No. CXXXVII „Ueber den Ursprung der richtigen Deutung unserer Sinneseindrücke“ bildete ursprünglich einen Abschnitt aus dem Manuscript für den völlig umgearbeiteten § 26 der im Erscheinen begriffenen zweiten Auflage des „Handbuches der Physiologischen Optik“. Sie erschien aber vorher in der „Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane“. Für die dann bald erfolgende Aufnahme in die „physiologische Optik“ wurde der Wortlaut vom Verfasser mehrfach geändert und der ganze Aufsatz nochmals stilistisch durchgefeilt. Ich habe mich nun nicht nur berechtigt, sondern sogar verpflichtet gefühlt, diese letzte Fassung hier aufzunehmen, die übrigens in Bezug auf den Sinn auch nicht im mindesten von der ersten Fassung abweicht.

Das „Titelverzeichniss sämmtlicher Veröffentlichungen von Hermann von Helmholtz“, dessen Zusammenstellung ich bereits zu Lebzeiten des Verfassers auf seinen Wunsch begonnen, enthält neben den Originalveröffentlichungen diejenigen Abdrucke und Uebersetzungen, welche der Verfasser selbst durchgesehen hat, während in den „Anhang“ dasjenige verwiesen ist, dessen Drucklegung ohne Betheiligung des Verfassers geschah. Vollständigkeit habe ich angestrebt, aber wohl kaum — sicherlich nicht in dem Anhang — erreicht. Jeden Hinweis auf eine Lücke oder einen Fehler werde ich mit Dank entgegennehmen. Absichtlich ausgeschlossen sind die von dem Verfasser als Präsident der Physikalisch-technischen Reichsanstalt unterzeichneten rein amtlichen Bekanntmachungen. Es lag die Versuchung nahe, durch ausführliche Noten dem zukünftigen Biographen von Helmholtz vorzuarbeiten; ich habe ihr jedoch widerstanden, weil ich nichts Unvollständiges bringen wollte und mir gegenwärtig die Zeit fehlt, auch nur annähernde Vollständigkeit zu erzielen. Ich beschränke mich daher (abgesehen von den drei letzten Nummern 217—219) auf die Anführung von Uebersetzungen, neuen

Auflagen u. s. w. Mit Ausnahme der Note zu Nr. 178 rühren alle diese Noten von mir her und ich trage für die Richtigkeit derselben die ausschliessliche Verantwortung.

Die Personen- und Sachregister für diesen Band sind mit denjenigen der beiden ersten Bände zu gemeinsamen Registern vereinigt, so dass jetzt die Register am Ende des zweiten Bandes überflüssig sind.

Das diesem Bande beigegebene Bildniss ist nach einer im Frühjahr 1891 aufgenommenen Photographie hergestellt.

Hiermit übergebe ich denn den Schlussband der wissenschaftlichen Abhandlungen von Hermann von Helmholtz den weiten Kreisen der Freunde, Schüler und Fachgenossen des grossen Meisters. Niemand wird ihn ohne wehmüthige Rührung empfangen, legt er doch Zeugniss ab von der unendlichen Vielseitigkeit, die Hermann von Helmholtz, „the intellectual giant", wie Cl. Maxwell ihn einst nannte, sich bis an sein Lebensende bewahrte, und stellt uns damit klar vor Augen, wie gross der Verlust ist, den die Wissenschaft durch seinen unerwarteten Tod erlitten hat.

Noch überwiegt in uns der Schmerz und schwer ist es, mit dem Schicksal nicht zu grollen! Immer mehr aber naht die Zeit, wo diese Empfindungen verklungen sind und damit erst in unserer Seele vollen Raum geben der einen grossen ungetrübten Empfindung des Dankes für Alles das, was die Menschheit schuldet dem grossen Genius

Hermann von Helmholtz!

Berlin, im März 1895.

Arthur König.

Hermann von Helmholtz' Wissenschaftliche Abhandlungen.

Von

G. Wiedemann.

In Deutschland machte die naturwissenschaftliche Forschung im vorigen und auch noch im Anfang dieses Jahrhunderts verhältnissmässig nur geringe Fortschritte. In der Physiologie bewahrte der halb metaphysische Begriff der Lebenskraft seinen Einfluss. Er verhinderte die Forscher zu bestimmen, welche Vorgänge im Organismus durch die gleichen Kräfte, wie die Erscheinungen der anorganischen Natur, hervorgerufen werden, und so zunächst die sichere Grundlage zu schaffen, von der aus die Lebenserscheinungen erklärt werden können. Ganz analog führte in der Chemie die nur auf metaphysische Trugschlüsse und keine sicheren Thatsachen begründete Annahme des Phlogiston, so bedeutend sie als erster Versuch einer Theorie der Verbrennung ist, fast ein Jahrhundert lang auf Irrwege.

In der Naturwissenschaft dauerte dieser verderbliche Einfluss einer aprioristischen Anschauung lange Zeit fort und selbst hochbedeutende Gelehrte, wie z. B. Ritter, vermochten sich ihm nicht zu entziehen. Zuletzt waren es auch die unklaren

und unerwiesenen Behauptungen von Hegel und Schelling, die in hohem Grade schädlich wirkten.

Nur wenige wirklich hervorragende, aber ziemlich vereinzelte Leistungen verdanken wir in jener Zeit bedeutenderen Gelehrten. Wir erwähnen nur die Entdeckung der Kleist'schen Flasche, noch dazu durch einen Nichtfachmann, die Auffindung der elektrischen Figuren durch Lichtenberg, das Studium der elastischen Schwingungen, insbesondere derjenigen der Platten, durch Chladni, die elektrischen Arbeiten von Ritter, die Entdeckung der Thermoelektricität durch Seebeck, u. A. Indess fehlte es wesentlich an einem systematischen Zusammenarbeiten nach einheitlichen Gesichtspunkten mit sorgfältig ausgebildeten Methoden und bestimmt vorgezeichneten Zielen.

Eine Wandelung hierin wurde erst von ausserhalb bei den deutschen Gelehrten angeregt. Die immer mehr fortschreitende Zerrüttung aller Verhältnisse hatte in Frankreich zu einer Verzweifelung an allem Bestehenden geführt, wie sie z. B. in den Schriften der Encyklopädisten ihren Ausdruck fand. Vergebens suchte man vom philosophischen und ethischen Standpunkt aus nach einem festen Halt; von naturwissenschaftlicher Seite fand man ihn endlich in den sicheren, zahlengemäss begründeten Beziehungen in der Physik und Chemie. Von dem achten Jahrzehnt des vorigen Jahrhunderts an begannen so die fundamentalen Arbeiten von Coulomb, Lavoisier; sie wurden von ihren Nachfolgern bis zu unserem Zeitgenossen Regnault fortgesetzt.

Dieses Beispiel konnte auch in Deutschland nicht ohne Folgen bleiben, um so mehr, als einige unserer ausgezeichnetsten Naturforscher, Alexander von Humboldt mit seiner grossen, treibenden Kraft, Mitscherlich und Liebig in Paris unter dem unmittelbaren Einfluss der dortigen Gelehrten, wenigstens zum Theil, ihre Anregung oder Ausbildung erhielten. Statt mittelst unklarer Spekulationen suchte man auch bei uns

auf experimentell oder mathematisch wohl begründete Thatsachen hin die Gesetze der Natur aufzufinden. Die Arbeiten der Forscher in dieser positiven Richtung, der Chemiker Mitscherlich und Liebig, der Physiker Ohm, Franz Neumann und Wilhelm Weber legen Zeugniss hierfür ab. Ernst Heinrich Weber war der erste, welcher die Erklärung der Lebenserscheinungen auf Grund physikalischer Processe verlangte. Von ihm ist auch Johannes Müller, der Anfangs noch Naturphilosoph war, theilweise bekehrt worden.

Während in Frankreich die naturwissenschaftlichen Bestrebungen sich fast alle in Paris concentrirten und die Forscher dort in gegenseitiger Anregung arbeiteten, standen sie in Deutschland zunächst ziemlich vereinzelt da und entwickelten sich mehr individuell. So bildete in Königsberg Franz Neumann eine vorzügliche physikalische Schule aus, die, wenn auch das Experiment nicht verschmähend, doch ihren Schwerpunkt überwiegend in der mathematischen Richtung der Physik fand.

Bald aber entstand, wohl auch durch den Einfluss von Mitscherlich, wie in Paris, so in Berlin ein Centrum naturwissenschaftlicher, insbesondere physikalischer Thätigkeit.

Die Berliner Physiker Poggendorff, Riess, Dove, Magnus standen ganz auf dem Boden der positiven Richtung. Vielleicht war es der unmittelbare Eindruck der ihnen mit Recht unsympathischen, mit grosser Sicherheit ausgesprochenen und zuweilen gerade das Gegentheil des Thatsächlichen enthaltenden Sätze der Hegelschen und Schellingschen Schule, welche sie dazu führte, sich in ihren vorzüglichen Arbeiten fast ausschliesslich auf die Erfahrung, auf das Experiment zu beschränken. Magnus, der durch seine Vorlesungen, seine physikalischen Unterweisungen im Laboratorium und sein Colloquium über die neuesten Forschungen in der Physik einen ganz besonderen Einfluss auf die Bildung der jüngeren Physiker ausübte, betrachtete die experimentelle und die mathe-

matische Physik als getrennte Gebiete. Im Gegensatz zu der Königsberger Schule warnte er wiederholt vor zu eingehender Beschäftigung mit der Mathematik, ja auch vor den Arbeiten seiner eigenen Schüler, welche etwa ein Gebiet der Physik mit einem anderen scheinbar ferner liegenden vereinigten.

Mag auch dieses durch die frühere historische Entwickelung der Wissenschaft bedingte Vorgehen einseitig und nüchtern erscheinen, so war es doch nothwendig, um für allgemeine theoretische Betrachtungen, so weit sie nicht lediglich mathematischer Natur waren, unabhängig von metaphysischen Anschauungen einen festen realen Boden zu schaffen. So ist es sehr bemerkenswerth, dass die Begründer der neuen Gastheorie, Krönig und Clausius, Schüler von Magnus sind. Wie verschieden allgemeine physikalische Probleme durch genial veranlagte Denker behandelt wurden, die dieser mehr experimentellen oder der früheren mehr metaphysischen Richtung angehörten, erkennt man z. B. beim Durchlesen der Abhandlungen von Helmholtz und Robert Mayer.

Die zu weit gehende Specialisirung in der empirischen physikalischen Forschung trug, wie jede zu einseitige Richtung, den Keim des Gegentheils in sich. Sie musste wieder zu einer allgemeineren Behandlung führen. Besonders charakteristisch ist es, dass gerade aus dem Colloquium von Magnus die demselben mit den Jahren allmählich entwachsenden Mitglieder in der im Jahre 1845 gegründeten physikalischen Gesellschaft auch über das Gebiet der experimentellen Physik hinausgehende Bestrebungen hegten und förderten. Von hervorragender Bedeutung war hierfür die Betheiligung einer Anzahl hochbegabter, jüngerer Physiologen, an ihrer Spitze E. Brücke, E. du Bois-Reymond. Die Zeit der Naturphilosophie war freilich so gut wie abgelaufen, dennoch blieb von ihr noch immer die unklare Vorstellung der Lebenskraft übrig, welche die organisirten Lebewesen vor den unorganischen Körpern auszeichnen sollte.

Sollte die Annahme der Lebenskraft vollkommen zurückgedrängt werden, so mussten die Physiologen zeigen, wie weit sich die Lebenserscheinungen aus den verschiedenartigsten physikalischen und chemischen Vorgängen erklären lassen.

Die dadurch bedingte Vielseitigkeit des Forschens übertrug sich auf ihre Genossen aus der Physik und Chemie.

So begann die gegenwärtige Periode, deren hohes Endziel eine Zusammenfassung und Begründung der Naturerscheinungen aus einem einheitlichen Grundprincip sein musste und noch ist. Nicht nur die eigentlichen Gebiete der Physik, Chemie und Physiologie musste dieses Studium umfassen, sondern auch die von ihnen abhängige Psychophysik, sowie die physikalischen und physiologischen Grundlagen der Künste, der Musik, der Malerei.

In aufrichtiger, freundschaftlicher Theilnahme wurden in dem unvergesslichen Kreise der physikalischen Gesellschaft die Leistungen eines Jeden anerkannt und gegenseitig gefördert. In neidlosem Wetteifer strebten die Zeitgenossen, denen sich auch von Seiten der Technik hochbegabte Gefährten zugesellten, — wir nennen nur Werner Siemens, — vereint ihren gemeinsamen Zielen zu. Ihre Art des Arbeitens, ihre Errungenschaften haben der naturwissenschaftlichen Forschung bis in die neueste Zeit ihren Stempel aufgeprägt.

Zu diesem Kreise und seinen Bestrebungen gehörte voll und ganz, neben manchen Forschern ersten Ranges, in seiner Universalität und Genialität als der weitaus bedeutendste, Alle überragend, Hermann Helmholtz. Mit seinem umfassenden Geiste leistete er in allen Einzelheiten Grosses und vereinte sie mit einander in allgemeinerer, höherer Anschauung.

Hermann Helmholtz wurde am 31. August 1821 zu Potsdam geboren, wo sein Vater Gymnasiallehrer war. Seine Mutter war die Tochter eines hannoverschen Artillerieofficiers, eines directen Nachkommen des Penne, von dem der Name Pennsylvanien herrührt.

Wenn er von sich selbst erzählt, dass er als ein schwächliches Kind viel auf das Spiel im elterlichen Hause angewiesen war, so erkennt man die für die Wissenschaft so bedeutsamen Folgen hiervon auch noch in späteren Jahren, wo er mit seinem oft stillen, in sich gekehrten Wesen die wissenschaftlichen Probleme in sich verarbeitete. Seinem für die Mathematik und Naturforschung angelegten Geist entsprach es vollkommen, dass er als Knabe im Spiel den Aufbau geometrischer Gebilde bevorzugte und sich in der Schule nur schwer mit den oft willkürlich und unzusammenhängend erscheinenden grammatischen Regeln befreundete. Dagegen ging ihm der Sinn für die organisch gegliederten literarischen Erzeugnisse der Classicität und den Aufbau der Sprache in keiner Weise ab. Noch als Student las er Lokmâns Fabeln in der arabischen Ursprache. Er hat dieses literarische Interesse bis in sein Alter bewahrt. Und wenn er als Jüngling an philosophisch-metaphysischen, zu keinem Ziel führenden Gesprächen im Hegelschen und Fichteschen Sinn wenig Interesse fand, so theilte er darin die auch anderen, wenn auch minder begabten Naturforschern angeborene Neigung, stets an die feste Basis der Realität anzuknüpfen. Dass er indess in seiner Universalität auch Geschmack und eingehendes Verständniss für tiefer begründete philosophische Entwickelungen in reichem Maasse besass, beweist seine spätere eingehende und kritische Beschäftigung mit Kant.

Von den vielen Geistesgaben, welche Helmholtz zu Theil geworden waren, war aber vielleicht die wichtigste der innere Zwang und die Fähigkeit, ein jedes Problem in der einfachsten Weise zu erfassen und auf das zweckmässigste durchzudenken und von allen Seiten zu betrachten, bis seine Lösung, sei es vollständig, sei es wenigstens für eine Reihe von Fällen zu einem klaren gesicherten Abschluss gekommen war. Diese Begabung verlieh den Forschungen von Helmholtz die emi-

nente Klarheit, mit der er jederzeit zielbewusst seine grossen Arbeiten durchführte. Dazu half ihm eine ganz ausserordentliche mathematische Befähigung. Gegen Ende seiner Studienzeit reichten seine Kenntnisse kaum weiter, als wie sie etwa dem Werk von Navier über Differentialrechnung entsprechen: und dennoch las er bald darauf mit grosser Leichtigkeit schwierige Abhandlungen von Poisson. Durch eigenes Arbeiten erreichte er bei der Behandlung mathematisch-physikalischer Probleme eine Höhe, wie nur wenige Mathematiker und mathematische Physiker, sowohl in der ihm freilich stets nur als Mittel dienenden formalen Behandlung, als auch in der Conception weittragender allgemeiner Fundamentalsätze.

Für die Sammlung der nöthigen verschiedenartigsten Kenntnisse, die bei der Allgemeinheit der Anlage von Helmholtz die reichsten Früchte tragen mussten, war es eine günstige Fügung, dass er sich in Folge von äusseren Verhältnissen nicht sofort eigenen Specialforschungen widmen konnte. Er musste sich erst in dem Friedrich-Wilhelms-Institut, der sogenannten Pepinière in Berlin, auf den Beruf eines Militärarztes vorbereiten, und dann, nach Absolvirung eines praktischen Cursus in der Charité in Berlin, als „Compagniechirurgus“ die ihm durch die Vorbildung in der Pepinière auferlegte militärärztliche Dienstzeit in Potsdam wenigstens theilweise absolviren.

Der Kampf mit der Geringfügigkeit der literarischen und experimentellen Hülfsmittel in der Pepinière und in Potsdam drückte seinen Forschungstrieb nicht nieder. Als es ihm während seiner Studienzeit gelang, ein Mikroskop zu erwerben, benutzte er es sofort zu seiner ersten wissenschaftlichen Forschung; auf Anregung von Joh. Müller zur Bearbeitung seiner übrigens durchaus selbständigen Promotionsschrift über die Ganglien der Invertebraten (1842), einer Abhandlung von dauerndem Werth, da in ihr der Zusammenhang zwischen Nervenfasern

mit Nervenzellen nachgewiesen ist. Letztere sind hiernach als centrale Organe anzusehen.

Dieser Arbeit sind später noch einige andere anatomische gefolgt; über die Rippen und die Armmuskeln (1856) und über die Gehörknöchelchen (1868).

Noch während seines Aufenthaltes in Berlin wendete sich Helmholtz einem früher namentlich von Schwann bearbeiteten Thema zu, „über Gährung und Fäulniss". Der erste Theil desselben, über den Einfluss des Sauerstoffs auf die Gährung, wurde im Laboratorium von Magnus ausgeführt. Helmholtz zeigte, dass der Sauerstoff nicht die Ursache jener Processe ist, auch nicht die aus den Hefepilzen abgeschiedenen Stoffe für sich es sind, da sich die Gährung durch poröse Membranen nicht fortpflanzt, durch welche sie hätten voraussichtlich hindurch diffundiren sollen. Leider gestattete ihm die Unvollkommenheit seines Mikroskopes kein tieferes Studium der bei der Fäulniss einwirkenden Organismen.

Als Militärarzt in Potsdam arbeitete Helmholtz im Gebiet der Physik und Physiologie zuerst theoretisch-literarisch weiter. Vor Allem veröffentlichte er seine fundamentale Schrift über die Erhaltung der Kraft (1847). Diese, wohl seit Jahrhunderten die bedeutendste Leistung auf dem Gebiete der Naturwissenschaften, ist die erste physikalische Arbeit von Helmholtz.

Durch den Gang seiner Laufbahn wurde er darauf längere Zeit von rein physikalischen Forschungen abgezogen. Als er durch Fürsprache von Alexander von Humboldt aus dem Militärdienst entlassen war, erhielt er in Folge einer Empfehlung seines Vorgängers Brücke an Johannes Müller die Stellung als Lehrer der Anatomie an der Kunstakademie in Berlin (1848). Dann wurde er als Professor der Physiologie und pathologischen Anatomie nach Königsberg (1849), und als Professor der Anatomie und Physiologie nach Bonn (1855) berufen. Inzwischen blieb er in diesen Doppel-

stellungen wesentlich der physiologischen Richtung treu. Er konnte dies um so leichter, als in Folge der mannigfachen, tief eingreifenden Arbeiten von Ernst Heinrich Weber, Ludwig, E. du Bois-Reymond, Brücke und ihm selbst die Physiologie sich immer mehr zu einer selbständigen Wissenschaft ausgebildet hatte. In Folge dessen wurde ihm auch die für die Physiologie allein gegründete Professur (1858) in Heidelberg übertragen.

Entsprechend der neueren physiologischen Richtung suchte auch Helmholtz die Lebensvorgänge immer mehr auf exacte physikalisch-chemische Grundlagen zurückzuführen. In Anknüpfung an seine und seiner Vorgänger Vorstellungen über die Beziehungen zwischen Wärme und Arbeit wies er mittelst Thermoelementen nach, dass die Muskeln nicht nur durch das Eintreten von Blut erwärmt werden, sondern dass die verbrauchte Arbeit bei ihrer Contraction sich z. B. in Wärme umsetzte.

Dann aber vertiefte er sich in das aussichtsreiche, aber besonders schwierige Gebiet, in welchem die Eindrücke der äusseren Erscheinungen mit ihrer Wahrnehmung und Empfindung, sowie den darauf folgenden psychischen Reactionen verknüpft werden sollten, in das Studium der Sinneswahrnehmungen.

In seinen elektrophysiologischen Forschungen hatte E. du Bois-Reymond gelehrt, die experimentellen Hülfsmittel der Physik in der von ihm erreichten hohen Vollkommenheit auf das Studium physiologischer Vorgänge anzuwenden. Alsbald löste Helmholtz eines der schwierigsten Probleme dieses Gebietes, die Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Nervenreizes (1850). Der experimentellen Anordnung und Ausführung dieser Versuche lag einerseits die Registrirung vermittelst des von ihm construirten Myographiums, andererseits die Methode von Pouillet zur Messung kleinster Zeiten zu Grunde.

Selbst die erfahrensten Physiologen hatten nicht gehofft, diese Messungen mit Erfolg durchführen zu können. Helmholtz erwies sich dabei sofort als einer der geistvollsten und geschicktesten Experimentatoren.

Die Geschwindigkeit jener Fortpflanzung, welche man früher für unendlich gross gehalten hatte, war etwa nur 30 m in der Secunde; man konnte also kaum mehr annehmen, dass sie, etwa wie die Lichtbewegung, mit enormer Geschwindigkeit durch Schwingungen eines besonderen Agens fortschritte.

Noch weit geringer wurde die Geschwindigkeit der Reflexleitung im Rückenmark gefunden. Auch die Contraction des Muskels beginnt nicht unmittelbar mit dem Nervenreiz, obgleich bereits vor derselben, in dem Stadium der „latenten Energie" elektrische, andere Nerven erregende Schwankungen darin nachzuweisen sind.

Dann wendete sich Helmholtz den Untersuchungen der Sinnesorgane selbst zu, denen des Auges und des Ohres. In ihnen legte er in umfassendster Weise die äusseren Functionen, das Zustandekommen der Wahrnehmungen in physikalischer und physiologischer Beziehung, ihre psychologische Bedeutung und sogar ihr Verhältniss zur Aesthetik klar.

Bei der Untersuchung des Auges war es zunächst erforderlich, die anatomischen und geometrischen Verhältnisse bei seinen Bewegungen und mechanischen Veränderungen genauer als bisher zu studiren. Hierzu construirte Helmholtz das wichtige Ophthalmometer, dessen Princip, wenn auch nur entfernt, an das des Heliometers erinnert.

Dasselbe wurde zuerst zur Messung der Grösse des Hornhautbildes, bezw. der Krümmung der Hornhaut verwendet.

Diese Arbeiten sind zu den besten zu zählen, welche wir in der Anatomie besitzen.

Für die Betrachtung der inneren Theile des Auges erfand Helmholtz den Augenspiegel (1851).

Als Brücke gezeigt hatte, dass man durch Reflexion von Licht von einem schräggestellten Spiegelglase in das Innere eines menschlichen Auges dasselbe durch das Glas hindurch erleuchtet sehen konnte, erfasste Helmholtz kurz darauf den Gedanken, die Brechung der Augenmedien durch ein vor das Auge des Beobachters gehaltenes Linsenglas zu compensiren, um so die Einzelheiten im erleuchteten Auge scharf und deutlich zu sehen.

So entstand der Augenspiegel, durch dessen Anwendung die sichere Untersuchung des gesunden und kranken Auges ermöglicht und die Augenheilkunde in segensreichster Weise auf einen ganz neuen Standpunkt erhoben wurde. — Helmholtz hat seiner Erfindung als solcher nach Brückes Beobachtungen keinen besonders hohen wissenschaftlichen Werth beigelegt, indess eben in der scheinbar geringfügigen Anwendung der Beobachtungslinse zeigt sich sein genialer Blick.

Nach Festlegung dieser Verhältnisse im Auge konnte Helmholtz an das Studium der eigentlichen Sehthätigkeit herangehen. Er begründete damit das Gebiet der neueren Ophthalmologie. Vor Allem ermittelte er den Eindruck der Spectralfarben und ihrer Mischungen im Gegensatz zu dem von gemischten Pigmenten ausgehenden gefärbten Lichte. Er prüfte und erweiterte die Theorie von Thomas Young, wonach die Netzhaut drei Arten von Nervenfasern enthält, roth-, grün-, und blau-violett-empfindliche, so dass der getrennte oder gemischte Eindruck dieser drei Farben genügt, um in physiologischer Beziehung alle Farbeneindrücke hervorzurufen.

Unter vielem Anderen studirte er auch die Ursache des Glanzes und die Theorie der Entstehung der räumlichen Vorstellungen, die er durch die Erfindung des Telestereoskopes sehr schlagend illustrirt hat.

Die Resultate dieser Forschungen sind in dem Handbuch der physiologischen Optik (erste Lieferung 1856) vereint. Nicht genug kann man bewundern, wie der in seiner Genia-

lität stets eigenen hohen Zielen nachstrebende Verfasser es nicht verschmäht hat, in diesem Werk mit unendlichem Fleiss und grösster Gewissenhaftigkeit das bereits vorhandene Material zusammenzutragen, zu ordnen und auf Grund seiner eigenen Resultate kritisch zu verarbeiten.

In unmittelbarem Anschluss an die physiologisch-physikalischen Erfahrungen ging Helmholtz auch auf das psychologische Gebiet über. Er behandelt die Frage, welchen Realitäten die Zeichen entsprechen, die wir mit dem Auge und dem Tastsinne erhalten. Etwas abweichend von seiner physiologischen Optik nimmt er wie Kant an, dass die Vorstellung des Raumes eine dem Menschen a priori gegebene, für uns nothwendige, also in Kants Sinne transcendentale Form der Anschauung sei. Indess zeigt er, dass Kants Beweis für den Ursprung a priori der geometrischen Axiome unzureichend ist.

In seinen Abhandlungen über die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, fügt Helmholtz im Anschluss hieran seinen bisherigen Untersuchungen ein neues Gebiet, das der Geometrie, hinzu. Er prüft, welche Sätze derselben objectiv gültigen Sinn haben, wieviel dagegen nur auf Definitionen beruht. Er, der Physiker und Physiologe, steht dabei auf nicht geringerer Höhe als der grosse Mathematiker Riemann in seinen gleichzeitigen Arbeiten über denselben Gegenstand.

Durch Berichte über die Arbeiten betreffend die Theorie der Akustik und die akustischen Phänomene in den Fortschritten der Physik von den Jahren 1848 und 1849 hatte sich Helmholtz mit der Literatur dieses Gebietes vertraut gemacht. Er trat schon während seiner optischen Untersuchungen in das zweite grosse Gebiet der Sinnesphysiologie ein, in die Lehre von den Tonempfindungen. Vor Allem studirte er während seines Aufenthaltes in Bonn (1856) die Combinationstöne. Er fügte den bekannten Differenztönen die, wohl noch weiter zu untersuchenden Summationstöne hinzu und leitete die Bedingungen

des harmonischen Zusammenklanges aus der Abwesenheit der Schwebungen ab. Dies war früher wesentlich nur auf der Grundlage der einfachen Verhältnisse der Schwingungszahlen, bezw. der Uebereinstimmung des physiologisch empfundenen Abstandes der Töne geschehen.

Sodann ermittelte Helmholtz in Anschluss hieran die den Vocalen zu Grunde liegende Klangfarbe, welche neuerdings Gegenstand weiterer Untersuchungen geworden ist. Er behandelte die Bedingungen der gleichschwebenden Temperatur, die physikalisches Interesse bietenden Bewegungen der Violinsaiten und der Zungenpfeifen. Er studirte auch vom anatomischen Standpunkt die Mechanik der Gehörknöchelchen.

Diese mit physikalischer Bestimmtheit und logischer Schärfe durchgeführten Untersuchungen vereinte und verarbeitete er in seinem fundamentalen Werk „die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik". Wie er aber stets mit weitem Blick die Beziehungen seiner Erfahrungsresultate nach allen Richtungen erkannte und verwerthete, so benutzte er sie auch hier als physikalische Grundlage einer Harmonielehre.

Helmholtz besass in seiner wunderbaren Vielseitigkeit eine hohe musikalische Begabung, ein sehr feines Gehör, eine gründliche und ausgedehnte Kenntniss der musikalischen Literatur und der Compositionen. Er erfreute sich gern und oft bis in sein Alter hinein ihres unmittelbaren Eindrucks. Daneben aber verfolgte er ein höheres Ziel. Er drang in die Principien ein, nach welchen die Tonwerke aufgebaut waren und verknüpfte sie mit seinen theoretischen Errungenschaften.

Die Musiker von Fach in der zweiten Hälfte unseres Jahrhunderts waren in einer mehr formalen, zuweilen auch auf philosophischen, z. B. Hegelschen Principien aufgebauten Harmonielehre aufgewachsen, die oft in einer ziemlich umständlichen Nomenclatur ihren Ausdruck fand. Es ist wohl begreiflich, dass

sie sich nur schwer mit den Grundlagen der neueren Theorie befreundeten. Sie waren noch wenig vertraut mit physikalischen Anschauungen, die überdies von vielen Seiten den abstracten Philosophemen gegenüber als minderwerthig angesehen wurden. Dennoch musste sich die Theorie von Helmholtz, da sie auf experimentell sicher gestellten Erfahrungen beruht, später erweitert und in einzelnen Punkten ausgebaut, Bahn brechen. Dass sie das gethan, wird auch jetzt von musikalischer Seite anerkannt.

Durch die Aufstellung des Princips von der Erhaltung der Kraft mit den sogleich zu besprechenden, sich daran schliessenden Arbeiten ebensowohl, wie durch seine ganz in dem Boden der Physik wurzelnden physiologischen Forschungen war Helmholtz unbedingt der erste Physiker Deutschlands geworden. Als im Jahre 1871 durch den Tod von Magnus die Professur der Physik in Berlin erledigt war, konnte nur er berufen werden. Er folgte dem Rufe, vielleicht auch, weil er vorauszusehen glaubte, dass ihn die weitere Beschäftigung mit der Physiologie zu vivisectorischen Arbeiten führen müsste, welche seiner Gemüthsrichtung weniger zusagten.

So concentrirte sich seine wissenschaftliche Thätigkeit naturgemäss auf das Gebiet der Physik.

Vom Jahre 1871 bis 1875 hat Helmholtz indess noch viele physiologisch-optische Versuche angeregt, aber selbst nicht mehr in diesem Gebiete experimentirt. Dann ruhte die physiologische Optik. Als er aber im Jahre 1884 die zweite Auflage der „physiologischen Optik" in Angriff nahm, und namentlich vom Jahre 1889 an, hat er wiederum theoretische Schlussfolgerungen aus Beobachtungen Anderer gezogen.

Die vielen einzelnen Wechselbeziehungen der Naturkräfte, welche in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts aufge-

funden waren, und namentlich die Feststellung ihrer quantitativen Verhältnisse, hatten wiederholt die Veranlassung dazu gegeben, sie von einem einheitlichen Gesichtspunkte als Bewegungserscheinungen zu betrachten.

Zuerst musste man sich auf die Wärme beschränken, von der bereits Bacon sagt, dass ihre Form die Bewegung sei. Aehnliche Ansichten hatten Rumford und Davy. Sie hatten indess noch keine Vorstellung von der Unzerstörbarkeit der „Kraft", wofür wir jetzt den Namen „Energie" setzen würden. Robert Mayer aus Heilbronn hat ohne Zweifel das Verdienst, für die Beziehungen der mechanischen und auch chemischen Energie zur Wärme das fundamentale Naturgesetz von der Erhaltung der Energie zuerst durch theoretische Betrachtungen bewiesen zu haben (1841—1842). An der Hand der vorliegenden experimentellen Daten hat er durch geniale und noch heute gültige Betrachtungen die Grösse des mechanischen Wärmeaequivalentes numerisch berechnet. In voller Erkenntniss der Tragweite seines Princips hat er seine Ergebnisse auf den Haushalt der Natur übertragen, von dem Mechanismus des Sonnensystems (1848) bis zu dem Organismus der Thiere und Pflanzen. Ganz analoge Schlüsse hat dann viel später auch Sir William Thomson veröffentlicht. Während ferner Joule durch Versuche die Aequivalenz von Arbeit und Wärme messend verfolgte, ja sie selbst unter Vermittelung alternirender Magnetisirungen nachgewiesen hatte, gab Grove in rein speculativer Weise zunächst im Januar 1842 in einer Vorlesung in der London Institution der Ueberzeugung Ausdruck, dass die Unzerstörbarkeit der Kraft auf alle Gebiete zu übertragen wäre. Was aber die früheren Forscher in ihrer mehr einseitigen Ausbildung nicht vermochten, das leistete der junge Militärarzt in seinem im Jahre 1847 erschienenen fundamentalen Buch über die Erhaltung der Kraft. Ohne die Leistungen von R. Mayer zu kennen, welche in den, dem

Physiker weniger nahe liegenden Liebigschen Annalen erschienen waren, stellte Helmholtz, gestüzt auf die Erfahrungen und mit mathematischer Schärfe das Princip von der Erhaltung der Kraft als ein allgemein gültiges auf, und wendete es auf alle Gebiete der Naturerscheinungen vollkommen einwurfsfrei und mit staunenswerther Klarheit an. Die älteren Berliner Physiker, auch Poggendorff als Redacteur der Annalen der Physik und Chemie, erkannten den hohen Werth dieser Arbeit nicht. Indess ist ihnen daraus nicht, wie häufig geschieht, ein Vorwurf zu machen. Sie waren eben in der realistisch-empirischen Methodik aufgewachsen, fürchteten ein neues Eindringen der rein speculativen Richtung und konnten die Bedeutung so weittragender und umfassender Vorstellungen nicht in sich aufnehmen. Auch uns Zeitgenossen, als Schülern dieser Generation, wurde es nicht ganz leicht, uns sofort in dieselben hineinzufinden, dann aber erfüllten sie uns mit um so grösserer Begeisterung. Wir erkannten, dass dem ersten grossen Grundprincip der Natur, der durch Lavoisiers Untersuchungen begründeten Erhaltung der Materie, nun auch ein zweites Grundprincip, die Erhaltung der Energie in ihrer Universalität, an die Seite gestellt war.

Nicht unabhängig von der verschiedenen geistigen Richtung und Veranlagung der Nationen mag es hierbei erscheinen, dass das die Materie als solche betreffende, auf realer Erfahrung beruhende erste Grundprincip dem romanischen, das zweite von vornherein von ihren speciellen Eigenschaften absehende, zunächst auf mehr speculativem Wege gefundene, dem germanischen Volksstamm entsprungen ist.

Das Princip von der Erhaltung der Energie hat für den Forscher noch eine besondere Bedeutung. Da nach demselben keine Energie geschaffen werden und keine verschwinden kann, mussten fortan alle Versuche über die Umwandlung der Naturkräfte (oder richtiger Energien) in einander daran gebunden

sein. Der Forschung waren in dieser Richtung bestimmte Grenzen gesetzt, welche u. A. die früher so oft und auch jetzt noch zuweilen erstrebte Erfindung eines perpetuum mobile unbedingt ausschlossen. Im Anschluss an das Princip von Helmholtz ergab sich dann später, dass nur gewisse Energieformen vollständig in andere umgewandelt werden können, nicht umgekehrt. Wir erinnern nur an den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie in den hochbedeutenden Arbeiten von Clausius, welche er veröffentlichte, kurz nachdem er über die Abhandlung von Helmholtz im Colloquium von Magnus berichtet hatte.

Das Princip von der Erhaltung der Energie verwendet Helmholtz bei der Discussion der thermochemischen Vorgänge in den galvanischen Ketten, in denen nur in einzelnen Fällen die elektrische Energie (elektromotorische Kraft) dem thermischen Aequivalent der chemischen Processe entspricht und die Processe beim Durchleiten eines Stromes umgekehrt werden können, in anderen aber nicht. Letztere Erscheinungen begründet Helmholtz durch die Aufstellung neuer, ganz allgemeingültiger Begriffe, der freien und gebundenen Energie.

Für alle umkehrbaren Processe, welche sie auch sein mögen, beweist Helmholtz, dass sie dem Princip der kleinsten Wirkung unterworfen sind. Dass andere nicht umkehrbar sind, glaubt Helmholtz darauf zurückführen zu können, dass uns Hülfsmittel fehlen, um alle bei ihnen vorkommenden Aenderungen, Bewegungen, Verschiebungen rückläufig zu machen. So gelangt er auch in diesem Gebiet, von einem einzelnen Fall ausgehend, wiederum zu einheitlichen grösseren Principien.

Auch in anderen Gebieten der Elektricitätslehre benutzt Helmholtz das Princip der Energie; so z. B. in der Theorie der inducirten Ströme und des Verlaufs derselben in

Folge der Selbstinduction. Durch sehr elegante Versuche beweist er die theoretisch abgeleiteten Resultate.

Ferner dient ihm dasselbe Princip als Hülfsmittel, um zu entscheiden, ob das allgemeine Gesetz von Wilhelm Weber, welches unter Annahme zweier Elektricitäten die Fernewirkungen ruhender und bewegter Elektricitätsmengen in sich fassen sollte, allgemeine Gültigkeit haben kann. Dieses Gesetz, nach dem die Wechselwirkung der elektrischen Massen auch von ihrer Bewegung abhängig wäre, hätte, auf andere Anziehungserscheinungen übertragen, eine weit über die Elektricitätslehre hinausgehende Bedeutung. Helmholtz weist indess, trotz mannigfacher Einwände, mit Sicherheit nach, dass es unter gewissen Bedingungen nicht dem Princip von der Erhaltung der Energie entspricht. Die Bedeutung der Conception des Grundgedankens dieses Gesetzes, sowie sein historischer Werth, die auch Helmholtz stets anerkannt hat, bleibt dessen ungeachtet unverändert bestehen. Wohl aber haben die Betrachtungen von Helmholtz zur Folge gehabt, dass man sich mehr und mehr von der Vorstellung instantan zwischen den Körpern direct übertragener Wirkungen auf grössere Entfernungen abgewendet hat und dafür die eine gewisse Zeit erfordernde Vermittelung derselben durch ein Zwischenmedium, wie nach den Annahmen von Faraday und Maxwell, treten lässt. Den zeitlichen Verlauf der Fortpflanzung hatte Blaserna in Folge mangelnder experimenteller Hülfsmittel nicht bestimmen können, Helmholtz selbst fand nicht die Musse, ihn, wie er wollte, zu verfolgen; er wurde erst durch seinen unmittelbaren Schüler Hertz in umfassender Weise auf eine höchst sinnreiche Weise experimentell nachgewiesen.

In einer der hierher gehörenden Arbeiten von Helmholtz ist auch die Grundlage für die elektromagnetische Theorie zahlreicher optischer Vorgänge enthalten.

Scheinbar auf einem ganz anderen Gebiete liegen die

hochbedeutenden mechanischen Untersuchungen von Helmholtz über die Bewegungen von Flüssigkeiten, welche sich nicht durch Potentialfunctionen darstellen lassen, über die Wirbelbewegungen, deren Behandlung bis dahin wegen ihrer besonderen mathematischen Schwierigkeiten unterblieben war. Er zeigt u. A., dass Wirbelringe und Wirbelfäden in sich geschlossene Gebilde sind, welche unveränderliche Mengen Flüssigkeit enthalten und unzerstörbar sind, dass sich Wirbelringe je nach der Bewegungsrichtung in ihnen einander anziehen oder abstossen, dass sie sich auch durcheinanderschlingen können. Wie weittragend diese Untersuchungen sind, zeigen die späteren Hypothesen von Sir W. Thomson u. A., nach denen man sich in dieser Weise die Atome und ihre chemischen Verbindungen gebildet denken könnte.

Nimmt man nach Maxwell an, dass die Fernewirkung der elektrischen und magnetischen Kräfte durch ein Medium vermittelt wird, so kann man durch die Vorstellung von Wirbelringen des Mediums, welche die Kraftlinien als Axen umgeben, die beobachteten Erscheinungen erklären. Somit schliessen sich auch diese Arbeiten wiederum denen über die Theorie der Elektricität auf das Innigste an.

Ferner hat Helmholtz eine Reihe von elektrolytischen Arbeiten ausgeführt, über die elektrische Endosmose, die Elektrolyse des Wassers und die Polarisationserscheinungen an den Elektroden. Er kommt dabei zu der Annahme entgegengesetzt geladener, durch einen kleinen endlichen Zwischenraum von einander getrennter Doppelschichten. Diese Hypothese ist vielfach, wenn auch nicht ganz allgemein, angenommen und verfolgt worden. Leider ist Helmholtz selbst, entgegen seiner Absicht, durch andere Aufgaben verhindert worden, dieselbe vollständig durchzuarbeiten.

An die früheren Jugenderinnerungen mit seinem mühsam erstandenen Mikroskop erinnert es, wenn Helmholtz (1874)

nach 32 Jahren fast gleichzeitig mit Abbe die Grenze ermittelt, bis zu der die Vergrösserung der Mikroskope in Folge der Beugung des Lichtes an den Rändern kleiner Körper gebracht werden kann. Die Gegenstände müssen mindestens 1/5000 mm Durchmesser besitzen, um gesehen zu werden. Durch diese Bestimmung hat er den praktischen Optikern den grossen Dienst geleistet, ihnen die Grenze zu zeigen, über welche sie selbst mit den vollkommensten Hülfsmitteln nicht hinausgehen können.

Auch in der höheren Optik hat Helmholtz Bedeutendes geleistet. In dem Jahre 1874 behandelt er die anomale Dispersion und führt sie mit Benutzung der Annahme von Sellmeier auf die Wechselwirkung der Aethertheilchen und mechanischen Molecule zurück.

In einer zweiten, viel späteren Abhandlung vom Jahre 1892 betrachtet er die Farbenzerstreuung auf Grundlage der Maxwellschen Gleichungen mit der Vorstellung von Paaren von entgegengesetzt geladener Jonen von träger Masse, welche in den Aether eingebettet sind. Er gelangt endlich zu Discussionen über die Natur des freien Aethers, ob derselbe frei von Beharrungsvermögen sei. Er beweist unter der Voraussetzung der Incompressibilität, dass die elektrodynamischen Gesetze und das Princip der kleinsten Wirkung alle Veränderungen und Bewegungen des Aethers darstellen.

Nicht nur in persönlicher Beziehung, sondern auch in allgemeiner Hinsicht ist es hoch interessant und bedeutungsvoll, zu sehen, wie die Betrachtungsweise von Helmholtz sich je nach der Art der behandelten Probleme und dem Stadium ändert, in welchem sich ihre Lösung befindet.

In seinen älteren Arbeiten und manchen neueren geht er von allgemeinen Differentialgleichungen, bezw. den allgemeinen Principien der Mechanik aus und gewinnt so die möglichst allgemeinen Resultate für gewisse Gebiete und Erscheinungen,

ohne dabei genöthigt zu sein, specielle Annahmen über den Aufbau der Materie, des Aethers, der Natur der Elektricität zu machen. Dahin gehören u. A. die Untersuchungen über das Princip von der Erhaltung der Kraft, die hydrodynamischen Arbeiten, die Betrachtungen über das Webersche Gesetz der elektrischen Fernewirkungen.

In anderen, besonders späteren Untersuchungen, wo es sich darum handelt, die allgemeinen Resultate auf complicirte Vorgänge anzuwenden, scheut sich Helmholtz nicht, moleculare Hypothesen zu Hülfe zu nehmen, wie bei der Betrachtung der elektrischen Doppelschichten bei der Elektrolyse, bei der der Valenzladungen. Ebenso geht er bei der wiederholten Behandlung der Dispersion, wenn eine Differenzirung der allgemeinsten Bewegungserscheinungen in einzelnen Gruppen mit bestimmten Constanten eintritt, von dem elastischen zu dem neueren, dem elektromagnetischen Standpunkt über. Auch seine lezten Arbeiten über monocyklische Systeme und die sich daran schliessenden Betrachtungen führen zu ganz bestimmten mechanischen Weltanschauungen; zahlreiche Vorgänge werden auf verborgene Bewegungen zurückgeführt.

Wie beim Anblick eines Gemäldes, beim Anhören eines Musikwerkes Helmholtz neben dem ästhetischen Eindruck stets die wissenschaftliche Grundlage desselben herausfühlte und analysirte, so auch beim Anschauen der Natur. Die beim Cap Antibes gegen das Ufer anspülenden Meereswogen regen seinen Forschungsgeist an. Aus mathematischen Berechnungen ergeben sich maassgebende Folgerungen, namentlich in Betreff der relativen Geschwindigkeiten des Windes und der Wellenzahl, der Erklärung der Wolkenreihen.

Die von Helmholtz vor einem grösseren Kreise gehaltenen und später im Druck erschienenen öffentlichen Vorlesungen sind zuweilen für einen oberflächlichen, nur Unterhaltung

suchenden Zuhörer nicht ohne Weiteres fassbar. Indess sind sie ausserordentlich klar, von vollendeter Form und im höchsten Grade anregend, bei der Höhe und Schwierigkeit der Gegenstände für den Leser fast noch genussreicher und belehrender, wie für den Hörer. Abweichend von so vielen anderen Vorträgen geben sie nicht das von Anderen Erforschte in einer etwas veränderten Form, sondern sie behandeln, abgesehen von einigen, bestimmten Zwecken dienenden Reden, durchweg Gebiete, die Helmholtz selbst erschlossen hat. Oft verschaffen sie dem Zuhörer einen weit umfassenden Einblick in dieselben, so die Vorträge über die Wechselwirkung der Naturkräfte, über die Erhaltung der Kraft. Ja, sie bilden in vielen Fällen geradezu Ergänzungen seiner Abhandlungen, indem Probleme, die dort nur gestreift oder gar nicht besprochen sind, hier eine ausführliche Erledigung finden, so z. B. die Bestimmung der Sonnentemperatur, die Valenzladungen u. s. f.

Auch die Betrachtung über das Eis und die Gletscher gehört hierher.

In einer Reihe von Vorträgen über die anatomisch-physiologischen Erscheinungen des Sehens, über das Optische der Malerei, über die physiologischen Ursachen der musikalischen Harmonie befindet sich ebenfalls Helmholtz ganz auf eigenem Boden, als Begründer und Schöpfer weit über seinem Thema stehend und alle Uebrigen darin überragend.

In anderen Vorlesungen behandelt Helmholtz Gegenstände, die sich weniger für rein wissenschaftliche, physikalisch-physiologische Bearbeitung eignen; aber nach mannigfachen verschiedenartigen Auffassungen doch noch der gründlichen Beurtheilung durch einen weit über der Sache stehenden Geist harrten. So ist von höchstem allgemeinem Interesse ein Vortrag über Goethes naturwissenschaftliche Arbeiten, in welchem er ihre hohe Bedeutung voll würdigt und Goethes eigenthümlichen Widerspruch gegen die Resultate exacter

Forschung, namentlich in der Optik, auf dieselbe geistige Anlage zurückführt, vermöge deren er in anderen Theilen der Naturforschung, in der vergleichenden Anatomie, Grosses leistete.

In seinen akademischen Vorlesungen bot Helmholtz den Zuhörern sein Eigenstes und Bestes, oft dabei improvisirend. Wie er sich selbst beim Lesen weitläufigerer Abhandlungen aus Anfang und Ende den Inhalt reconstruirte und auf seine Richtigkeit prüfte, so gab er auch seinen Hörern oft nur die Resultate seines Denkens, ihrer eigenen Arbeit die Ausführungen überlassend. Hoch erfreulich ist es, dass seine Vorlesungen über theoretische Physik mit seiner Einwilligung nach stenographischen Aufzeichnungen und nachgeschriebenen Heften von A. König, O. Krigar-Menzel und C. Runge demnächst veröffentlicht werden.

In den von ihm geleiteten Laboratorien, in Heidelberg und in Berlin, hat Helmholtz eine eigentliche Schule nicht begründet, welche in seinem Sinne die von ihm begonnenen Untersuchungen fortgeführt hätte. Der Flug seiner Gedanken war zu hoch, als dass minder Begabte ihm zu folgen vermochten. Dennoch sind vortreffliche Arbeiten aus denselben hervorgegangen, unter anderen auch von seinem eigenen, leider nur allzufrüh verstorbenen Sohn, der sich sehr schnell zu einem durchaus selbständigen Forscher von hervorragendem Verdienst heranbildete.

Am tiefsten ist wohl Hertz, wenigstens auf elektrischem Gebiete, in die eigensten Gedanken von Helmholtz eingedrungen.

Als Helmholtz im Jahre 1888 die Leitung der Dank der edelmüthigen Schenkung von Werner Siemens begründeten physikalisch-technischen Reichsanstalt übernahm, erwuchs ihm eine neue, ganz andere Aufgabe, als die rein wissenschaftliche Forschung. Die für speciell wissenschaftliche Untersuchungen

bestimmte Abtheilung konnte sich nur langsam entwickeln; auch traten die die Technik betreffenden Arbeiten, die Grundlegung der Methodik für Messungen von grösster Schärfe in verschiedenen Gebieten naturgemäss in den Vordergrund.

Ganz bewundernswerth ist es, wie Helmholtz sich auch diesen Aufgaben unterzog, wie er sich den Verwaltungsgeschäften widmete und ganz eingehend die Einzelheiten der verschiedenen practischen Arbeiten kannte und beherrschte Meisterhaft verstand er es, das grossartige Institut zu organisiren, leitende Gedanken anzugeben und mit ebenso grosser Ruhe und Festigkeit, wie Wohlwollen und Milde, die vielen unter seiner Leitung arbeitenden heterogenen Elemente, von denen so manche nicht nur vollauf befähigt, sondern auch schon gewohnt waren, eigene Wege zu gehen, zu den gemeinsamen Zielen zu vereinen.

Für die meisten Sterblichen kommt mit vorrückenden Jahren die Zeit, wo die Befähigung zur Erfassung origineller Gedanken, zu selbständigen Forschungen auf neuer Grundlage aufzuhören beginnt. An Stelle dessen tritt das durch vielfache Erfahrungen geklärte und gereifte, weitere Gesichtskreise umfassende Urtheil, der ruhigere Ueberblick. Man hätte glauben sollen, dass Helmholtz in den Aufgaben der Reichsanstalt das Ziel gefunden hätte, in welchem er in den Jahren des Alters nach seinen grossartigen früheren Leistungen diese Eigenschaften in Beschaulichkeit mit grösstem Erfolge verwerthen würde. Statt dessen forscht er, ungeachtet seiner grossen amtlichen Thätigkeit und den von ihm nicht ungern erfüllten äusseren Anforderungen seiner Stellung, auch wissenschaftlich unverändert bis an sein Lebensende weiter und vollendet noch theoretische Untersuchungen, welche denen in seinen besten Lebensjahren vollkommen ebenbürtig sind.

Helmholz starb am 8. September des Jahres 1894.

Ueberblickt man das wissenschaftliche Leben von Helmholtz, so staunt man über die Grösse und Fülle seiner Leistungen. Während viele andere bedeutende Forscher sich einzelne Themata heraussuchen, die sie dann mit bestem Erfolg bearbeiten, so hängen bei Helmholtz alle Arbeiten in seinem ganzen Leben harmonisch zusammen. Von der Untersuchung der Sinnesorgane, in welcher willkürlichen Annahmen über die Wirkung einer Lebenskraft feste physikalische und physiologische Erfahrungen gegenübergestellt wurden, bis zur „Erhaltung der Kraft“, in der ganz allgemein die Umwandlungen der Energie durch die Constanz und Unzerstörbarkeit derselben begrenzt wurden, zieht sich derselbe Grundgedanke. Fast alle späteren Arbeiten schliessen sich demselben an und so gelangt Helmholtz allmählich in richtiger wissenschaftlicher Entwickelung von den allgemeinen mechanischen Betrachtungen zu Hypothesen über den Aufbau und die innerste Natur der Materie, mit deren Betrachtung sein Leben abschliesst.

Diese grossartige Entwickelung von Jugend auf war in dem wunderbar klar und universell beanlagten Geist von Helmholtz begründet; aber auch in dem unermüdlichen Fleiss, mit dem er selbst untergeordnete Arbeit nicht scheute, falls sie seinen Zielen entsprach, und in der eisernen Consequenz, mit der er seine Ziele unentwegt verfolgte.

Mit freudiger Genugthuung muss es Alle erfüllen, welche Helmholtz persönlich näher gestanden oder die seine ganz ungewöhnlichen Leistungen, selbst auch nur oberflächlich, kennen gelernt haben, dass seine ausserordentlichen wissenschaftlichen Verdienste auch in weitesten Kreisen im reichsten Maasse anerkannt worden sind. Selbstverständlich war er Mitglied aller gelehrten Gesellschaften von irgend welcher Bedeutung. Bei seiner ruhigen, wohlwollenden Art, mit der er selbst heftige wissenschaft-

liche Angriffe rein sachlich widerlegte, hatte er keine Feinde; wo er hinkam, im Inlande wie im Auslande, begegnete man ihm mit Ehrfurcht und aufrichtiger Zuneigung. Von seinem Fürsten wurde er durch Verleihung der höchsten Ehren, des Adels, hoher Titel und Orden seinen Verdiensten entsprechend ausgezeichnet. In allen Kreisen war er ein stets mit grösster Hochachtung begrüsster, gern gesehener Gast.

Unsere Zeit hat sich selbst geehrt, indem sie ihrem ersten Naturforscher, Hermann von Helmholtz, nicht nur in der Wissenschaft, sondern auch in der Gesellschaft, die ihm mit vollem Recht zukommende Stellung gab.

Inhaltsübersicht

des dritten Bandes.

C.

Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Nervenreizung.

Aus den Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
21. Januar 1850. S. 14 bis 15.[1]

Ich habe gefunden, dass eine messbare Zeit vergeht, 14
während sich der Reiz, welchen ein momentaner elektrischer Strom auf das Hüftgeflecht eines Frosches ausübt, bis zum Eintritt des Schenkelnerven in den Wadenmuskeln fortpflanzt. Bei grossen Fröschen, deren Nerven 50 bis 60 Millim. lang waren, und welche ich bei 2—6° C. aufbewahrt hatte, während die Temperatur des Beobachtungszimmers zwischen 11 und 15° lag, betrug diese Zeitdauer 0,0014 bis 0,0020 einer Sekunde.

Die Reizung des Nerven geschah mittels des Stromes, den eine Drahtspirale bei der Oeffnung ihres eigenen Stromes in einer andern inducirte. Durch eine eigenthümliche mechanische Vorrichtung wurde bewirkt, dass in demselben Augenblicke, wo der Strom in der inducirenden Spirale aufgehoben wurde, sich ein zweiter, durch einen Multiplicator gehender Strom

---

[1]) Eine französische Uebersetzung dieser Abhandlung wurde unter dem Titel: Notes sur la vitesse de la propagation de l'agent nerveux dans les nerfs rachidiens in den Comptes rendus. 1850. Tome XXX, p. 204—206 veröffentlicht. Unter gleichem Titel erschien 1851 an demselben Orte Tome XXXIII, p. 262—265 eine zweite kurze Mittheilung, deren Ergebnisse aber bereits in der ausführlichen Darstellung in Müller's Archiv, Jahrg. 1850 (abgedruckt in Bd. II, S. 764 der vorliegenden Sammlung) enthalten waren.

schloss. Ich überzeugte mich, dass die Fehler in dem vollkommenen Zusammentreffen der Oeffnung und Schliessung jedenfalls bei Weitem nicht $^1/_{10}$ der Zeitdauer erreichten, um die es sich handelt. Der Strom kreiste so lange durch den Multiplicator, bis die Spannkraft des gereizten Wadenmuskels sich hinreichend vergrössert hatte, um ein gewisses an einer Platinspitze auf einer vergoldeten Unterlage hängendes Gewicht mit dieser Spitze von der Unterlage abheben zu können, und so den durch diese Theile geleiteten Strom zu unterbrechen. Die Dauer des Stromes ist also dem Zeitraum zwischen der Reizung des Nerven und der ersten mechanischen Wirkung des Muskels genau gleich. Der Ausschlag, welchen der Strom während seines Durchgangs dem Magnetstabe des Multiplicators ertheilt, ist der genannten Zeitdauer proportional, und dieselbe kann aus ihm berechnet werden, wenn man ausserdem die Schwingungsdauer des Magneten und die Ablenkung kennt, welche der ununterbrochene Strom bewirken würde. Ich maass die Ablenkungen mit Spiegel und Fernrohr. Das Wesentliche des Verfahrens entspricht der von Pouillet zur Messung kleiner Zeiträume angegebenen Methode.

Die Ergebnisse waren folgende:

Die Zeit, welche der Muskel nach der Reizung durch gleiche Ströme braucht, um die den angehängten Gewichten entsprechende Spannung zu erlangen, ist desto grösser, je schwerer die letzteren sind.

Die Zeit wird bei gleichen angehängten Gewichten und wechselnder Intensität der Reizung oder Reizbarkeit des Muskels desto grösser, je kleiner die Höhe ist, bis zu welcher der Muskel das Gewicht erhebt.

Gewöhnlich, doch nicht immer sind die Erhebungshöhen bei Reizung des oberen Endes des Hüftnerven kleiner als bei der des an den Muskel anstossenden Theiles, was den bekannten Erfahrungen über das Absterben ausgeschnittener Nerven vom centralen Ende aus entspricht. Man kann aber jedenfalls die Gleichheit der Erhebungen herbeiführen, indem man die Inductionsströme für die reizbarere Stelle schwächt. Es geht alsdann aus den Ausschlägen des Magneten hervor, dass dieselbe mechanische Wirkung bei Reizung des unteren

Nervenendes um ein Gewisses früher eintritt, als die nach Reizung des oberen. Bei demselben Individuum ist diese Differenz constant und unabhängig von den angehängten Gewichten. In den Beobachtungsreihen an verschiedenen Individuen wechselte dieselbe zwischen 0,0014 und 0,0020 Sek., wobei die höheren Werthe derselben den kälteren Tagen entsprechen. Bei den Versuchen mit niederen Gewichten sind die einzelnen Zuckungen etwas unregelmässiger, und man muss die constante Grösse der Differenz aus den Mittelzahlen der Versuchsreihen berechnen, während dieselbe bei 100 bis 180 gr. Belastung sogleich aus der Vergleichung der einzelnen Zahlen entnommen werden kann.

CI.

Ueber die Erklärung des Glanzes.

Aus den Niederrheinischen Sitzungsberichten. (Verhandlungen des naturhist. Vereins von Rheinland und Westphalen. Bd. 13. S. XXXVIII bis XL.)
Sitzung vom 6. März 1856.

xxxviii Wenn man im Stereoskop zwei Zeichnungen betrachtet, in denen entsprechende Theile entweder in ungleicher Helligkeit oder in wenig von einander verschiedenen Farben dargestellt sind, so erscheinen, wie Dove gezeigt hat, dergleichen Theile glänzend, während andere Theile der beiden Zeichnungen, welche in beiden gleiche Farbe und gleiche Helligkeit haben, matt erscheinen. Der Vortragende erläuterte die Erscheinung an vorgelegten Proben und hob noch besonders hervor, dass bei sehr differenter Beschaffenheit der Farben, welche entsprechenden Stellen der beiden Zeichnungen zukommen, verschiedene Beobachter die dann eintretende Erscheinung verschieden beschreiben. Einige behaupten, durch das Stereoskop die Mischfarbe zu sehen, andere, zu denen auch der Vortragende gehört, können eine solche Verschmelzung der Farben zu einer Farbe nicht wahrnehmen, sondern sehen die betreffende Stelle der Zeichnung mit unregelmässigen Flecken von beiden Farben bedeckt, ebenso wie man dergleichen Flecken über das Gesichtsfeld vertheilt sieht, wenn man mit dem einen Auge durch ein blaues, mit dem andern durch ein rothes
xxxix Glas sieht. — Die Erklärung, welche Dove ursprünglich von diesen Erscheinungen gegeben hat, scheint durch neuere Erfahrungen unzulässig zu werden. Derselbe stützt sich dabei auf die Farbenzerstreuung im Auge und nimmt an, dass die beiden Augen die Entfernung der verschiedenfarbigen Felder

als verschieden beurtheilten, weil sie verschiedene Grade der Accommodation annehmen müssten, um sie deutlich zu sehen. Mancherlei seitdem beobachtete Thatsachen weisen aber nach, dass die Beurtheilung der Entfernung nach dem Accommodations-Grade des Auges bei dem Ungeübten gar nicht besteht, und bei dem Geübten mindestens äusserst unvollkommen ist. Der Vortragende legte deshalb der Gesellschaft eine andere Erklärung der Erscheinung vor, wie er sie seit fünf Jahren in seinen Vorlesungen gegeben hat. Er stützt sich darauf, dass in der täglichen Ausübung des Sehens matte Flächen beiden Augen immer gleich stark beleuchtet und gleich gefärbt erscheinen müssen, bei glänzenden Flächen dagegen der Fall vorkommen kann, dass das eine Auge von dem an der glatten Oberfläche mehr oder weniger regelmässig gespiegelten Lichte getroffen werde, das andere nicht, so dass dabei dem ersteren Auge die Fläche in grösserer Helligkeit und, wenn das gespiegelte Licht eine andere Farbe als die Fläche hat, auch in anderer Farbe erscheinen kann, als dem andern Auge. Im Allgemeinen werden aber diese Farben-Differenzen, welche in der täglichen Erfahrung beiden Augen glänzende Flächen darbieten, meist sehr gering sein. Wird also dem Beobachter mittels des Stereoskops der Anblick einer Fläche dargeboten, die dem einen Auge heller oder etwas anders gefärbt erscheint, als dem anderen, so schliesst er nach Analogie dessen, was ihn die tägliche Erfahrung gelehrt hat, dass diese Fläche glänzend sei. Ist die Farben-Differenz gross, so fehlt eine jede Analogie mit den bisherigen Erfahrungen, das Urtheil des Beobachters wird gleichsam in Verlegenheit gesetzt und entscheidet sich desshalb, wie es scheint, bei verschiedenen Personen in verschiedener Weise. — Schliesslich hob der Vortragende noch hervor, dass diese Erfahrungen für die Lehre von der Identität der Netzhautstellen von entscheidender Bedeutung seien, insofern daraus folge, dass die Empfindung eines jeden einzelnen Auges auch einzeln zum Bewusstsein XI.
komme, dass also das Einfachsehen mit beiden Augen nicht die Folge einer anatomischen Vereinigung der entsprechenden Nervenfasern, sondern die Folge eines Actes des Urtheils sei.

Weiter ausgeführt in meinem Handbuch der Physiologischen Optik. Aufl. I. S. 782.

CII.

Zuckungscurven von Froschmuskeln.

Aus den Niederrheinischen Sitzungsberichten. (Verhandlungen des naturhist. Vereins von Rheinland und Westphalen. Bd. 13. S. LXXIV bis LXXV.) Sitzung vom 14. Mai 1856.

LXXIV Der Vortragende legte Curven vor, welche durch zuckende Froschmuskeln im Myographion gezeichnet waren. Er beschreibt zuerst kurz den Apparat und seine Ver-
LXXV suchsmethode, und zeigte dann vor: 1) Curven, welche durch Reizung desselben Nerven an verschiedenen Stellen seines Verlaufs erhalten waren, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reizung in den Nerven messen liessen. 2) Curven, welche durch 2 kurz aufeinander folgende Reizungen des Nerven hervorgebracht waren, und die Art erkennen liessen, wie sich die Zuckungen zusammensetzen. 3) Curven, von dem Muskel eines durch Strychnin vergifteten Frosches gezeichnet, welche die Zeit erkennen liessen, die nach der Reizung im Rückenmarke vergeht, ehe die reflectorische Entladung zu Stande kommt. 4) Curven, durch secundäre Zuckung vom Muskel aus hervorgebracht, aus denen sich ergab, dass die durch Reizung bedingte Veränderung des Muskelstromes eintritt, noch ehe die Zusammenziehung des Muskels beginnt.

CIII.

Ueber die Combinationstöne oder Tartinischen Töne.

Aus den Niederrheinischen Sitzungsberichten. (Verhandlungen des naturhist. Vereins von Rheinland und Westphalen. Bd. 13. S. LXXV bis LXXVII.)
Sitzung vom 4. Juni 1856.

Wenn gleichzeitig zwei hinreichend starke musikalische LXXV
Töne angegeben werden, so hört man bei einiger Aufmerksamkeit noch einen oder mehrere andere von den angegebenen Tönen unterschiedene Combinationstöne. Zuerst handelte es sich darum, zu ermitteln, welche Combinationstöne gehört würden. Hallstroem hatte, abweichend von früheren Annahmen, die Regel aufgestellt, dass, wenn zwei Töne von m und n Schwingungen in der Secunde gleichzeitig angegeben würden, der hauptsächlichste Combinationston der von $m—n$ Schwingungen sei. Es waren indessen Zweifel gegen Hallstroem's Gesetz erhoben worden, weil die Töne der meisten musikalischen Instrumente von schwächeren höheren Neben- LXXVI
tönen begleitet sind, und es fraglich erschien, ob Hallstroem in den Fällen, wo seine Regel von den älteren Annahmen abwich, nicht Combinationstöne von den höheren Nebentönen der ursprünglichen Töne gehört habe. Dem Vortragenden ist es gelungen, musikalische Töne zu finden, welche von höheren Nebentönen völlig frei sind, nämlich die Töne von Stimmgabeln, welche man durch Resonanz von Luftröhren hörbar macht. Zwei dergleichen Töne, zusammenklingend, lassen nur einen tieferen Combinationston hören, welcher durchaus dem Gesetze von Hallstroem folgt, so dass dadurch der angeführte Zweifel an der Richtigkeit dieses Gesetzes beseitigt ist. Man hört die

Combinationstöne desto deutlicher, je stärker die ursprünglichen Töne angegeben werden; die Stärke der ersteren wächst in einem grösseren Verhältnisse, als die Stärke der letzteren. Bei hinreichender Stärke wird nun noch ein zweiter höherer Combinationston wahrgenommen, der bisher noch nicht bekannt war, nämlich der Ton von $m+n$ Schwingungen in der Secunde. So hört man, wenn c und g zugleich angegeben werden, als tieferen Combinationston die tiefere Octave von c, als höheren die höhere Octave von e. Wenn c und e angegeben werden, hört man die zweite tiefere Octave von c und die erste höhere von d. Wenn g und das nächst höhere c angegeben werden, hört man die zweite tiefere Octave dieses c und die erste höhere von b u. s. w. Der Vortragende liess diese Combinationstöne an einer mehrstimmigen Sirene hören, welche sie deutlicher hören lässt, als andere Instrumente. Man hört die beiden Töne aber auch sehr deutlich, wenn man das Ohr nahe an die Mündungen zweier Orgelpfeifen bringt, welche sie angeben. Die bisherige Theorie der Combinationstöne kannte nur den Ton von $m-n$ Schwingungen, und musste zur Erklärung des Phänomens noch eine besondere Empfindungsweise des Hörnerven voraussetzen. Sie passt durchaus nicht auf den neu gefundenen höheren Combinationston. Der Vortragende glaubt desshalb eine andere Theorie an deren Stelle setzen zu müssen. Die mathematischen Untersuchungen über die Bewegung der elastischen Körper und der Luft haben ge-
LXXVII lehrt, dass vibrirende Bewegungen verschiedener Art in ihnen ohne gegenseitigen Einfluss bleiben und ungestört bestehen, so lange die Breite der Schwingungen klein ist. Der Vortragende hat untersucht, was geschehen müsse, wenn die Breite der Schwingungen zweier Töne so gross ist, dass sie anfangen, einander zu stören, und gefunden, dass unter diesen Umständen, wenn m und n die Schwingungszahlen der beiden Töne sind, zwei neue Töne von $m-n$ und $m+n$ Schwingungen entstehen müssen. Der Vortragende entwickelte die Gründe, welche voraussetzen lassen, dass im Trommelfell des menschlichen Ohres diese gegenseitige Störung besonders leicht eintreten könne. Die meisten Combinationstöne, welche wir hören, sind daher erst im Ohre entstanden; aber es giebt auch solche,

die unabhängig vom Ohre bestehen. Zu diesen gehören diejenigen, welche die von Dove beschriebene mehrstimmige Sirene giebt. Der Vortragende zeigte ein solches Instrument mit einigen neuen Abänderungen vor. Die Drehungsaxe trug statt einer Scheibe deren zwei, auf deren jeder vier verschiedene Löcherreihen angebracht waren, um dadurch vier verschiedene Töne hervorzubringen. Er machte darauf aufmerksam, dass die Combinationstöne ungewöhnlich stark nur dann hervortreten, wenn beide Töne an einer und derselben Scheibe angegeben werden, nicht aber, wenn einer an der oberen, der andere an der unteren. Im ersteren Falle sind diese Töne objectiv, im zweiten nur subjectiv.

Weiter ausgeführt in den Bd. I, S. 256 u. S. 263 dieser Sammlung abgedruckten beiden Abhandlungen.

CIV.

Ein Telestereoskop.

Aus den Niederrheinischen Sitzungsberichten. (Verhandlungen des naturhist. Vereins von Rheinland und Westphalen. Bd. 14. S. LXXIX bis LXXXI.)
Sitzung vom 10. Juni 1857.

LXXIX Der Vortragende machte zunächst darauf aufmerksam, dass perspectivische Zeichnungen nur dann eine einigermaassen ge-
LXXX nügende Vorstellung des dargestellten Gegenstandes geben, wenn die Form des letzteren entweder sehr bekannt oder regelmässig ist. So erregen uns Abbildungen menschlicher Gesichter und Gestalten eine deutliche Anschauung, weil uns deren körperliche Form so genau bekannt ist, dass uns nur wenige Züge gegeben zu sein brauchen, um das Ganze in der Vorstellung zu ergänzen. Andererseits genügen uns gute perspectivische Darstellungen von Gebäuden und anderen Erzeugnissen menschlicher Kunst, weil bei ihnen allen fast immer regelmässige kugelige, cylindrische, parallelepipedische Formen wiederkehren, die nur in verschiedener Weise zusammengestellt und ausgeschmückt sind. Wie ausserordentlich ungenügend dagegen einfache perspectivische Zeichnungen sind, wenn unbekannte und unregelmässige Formen dargestellt werden sollen, erläuterte der Vortragende an stereoskopischen Ansichten von Gletschereis, Felsen und Bergen. Selbst photographische Darstellungen, welche doch die genauesten und treuesten Abbildungen sind, die sich überhaupt herstellen lassen, geben einzeln genommen ein sehr unvollkommenes Bild solcher Gegenstände, während sie zu zweien im Stereoskope combinirt die allerlebendigste Vorstellung hervorbringen. Das Stereoskop lehrt uns, dass die

lebendige Anschauung der Körperform, welche wir bei Betrachtung wirklicher Gegenstände von geringer Entfernung haben, darauf beruht, dass wir mit beiden Augen davon zwei etwas verschiedene perspectivische Ansichten gewinnen. Aus zwei perspectivischen Ansichten, die von verschiedenen Punkten aufgenommen sind, lässt sich aber die körperliche Form und Entfernung der dargestellten Gegenstände vollständig construiren. Bei fernen Gegenständen dagegen sind die beiden Augen einander zu nahe, um merklich verschiedene Ansichten zu geben, daher ist die Beurtheilung ihrer körperlichen Form, Entfernung u. s. w., wenn nicht Schlagschatten und Luft-Perspective einzelne Aufschlüsse geben, höchst unvollkommen. Die den Horizont begrenzenden Bergreihen erscheinen z. B. meist als platte, gerad aufsteigende Wände, die den Beobachter ringförmig umgeben und der Fläche des ansteigenden Himmels-Gewölbes anzuhaften scheinen. Im Stereoskope kann man nun zwei photographische Ansichten der Landschaft combiniren, LXXXI
welche von zwei beliebig weit von einander entfernten Standpunkten aufgenommen und hinreichend von einander verschieden sind, um eine deutliche Vorstellung der körperlichen Form zu geben. Die stereoskopischen Landschafts-Bilder geben also eine vollständigere Ansicht der Landschaft, als es die Anschauung der wirklichen Landschaft thut. Nur indem der Beobachter sich von der Stelle bewegt, und also wenigstens nach einander die perspectivischen Anschauungen verschiedener Standpunkte vergleicht, kann er allmählich seine Anschauung ergänzen. Der Vortragende hat nun einen einfachen Apparat construirt, um eine wirkliche Landschaft in derselben Weise zur Anschauung zu bringen, wie dies im Stereoskop mit ihren photographischen Abbildungen geschieht. Das Instrument, welches man als ein Stereoskop für ferne Gegenstände etwa Telestereoskop nennen kann, besteht aus einem Brette (etwa 4 Fuss lang), an dessen Enden senkrecht gegen die Fläche und 45° geneigt gegen die längste Kante des Brettes zwei Spiegel befestigt sind. In der Mitte des Brettes sind diesen Spiegeln parallel zwei kleinere befestigt, in deren einen der Beobachter mit dem rechten, in den andern mit dem linken Auge hineinsieht. In den kleinen Spiegeln sieht er die grossen,

in den grossen die Landschaft gespiegelt. Nach Bedürfniss
können vor die Augen des Beobachters noch Brillengläser oder
ein doppeltes Opernglas eingeschaltet werden, um Vergrösser-
ungen hervorzubringen. Dabei sieht nun das rechte Auge des
Beobachters die Landschaft so, wie sie vom rechten Ende des
Brettes, das linke, wie sie vom linken erscheint. Dem Beob-
achter wird also künstlich gleichsam eine Augendistanz von
4 Fuss statt der gewöhnlichen von 3 Zoll gegeben. Der An-
blick ist ein überraschend zierlicher, da er den der stereosko-
pischen Photographien um eben so viel übertrifft, wie ein
vollendetes Oelgemälde einen Kupferstich. Gegenstände, welche
$^1/_4$ bis $^1/_2$ Meile entfernt sind, lösen sich deutlich von ihrem
entfernteren Hintergunde ab, nähere erscheinen in ihrer vollen
körperlichen Gestalt, und namentlich Baumgruppen gewähren
einen eigenthümlichen Anblick, weil sich die einzelnen Kronen
LXXXII und Zweige ganz von einander ablösen. Das leicht herzu-
stellende Instrument ist also nicht nur lehrreich für den
optischen Unterschied des Nahesehens und Fernsehens, sondern
kann auch als ein amusantes optisches Spielwerk empfohlen
werden.

Weiter ausgeführt in der Bd. II, S. 484 dieser Sammlung abgedruckten Abhandlung, ferner in meinem Handbuch d. Physiolog. Optik. 1. Aufl. S. 647, 673, 681.

CV.

Ueber die subjectiven Nachbilder im Auge.

Aus den Niederrheinischen Sitzungsberichten. (Verhandlungen des naturhist. Vereins von Rheinland und Westphalen. Bd. 15. S. XCVIII bis C.) Sitzung vom 3. Juli 1858.

Der Vortragende gab zunächst eine Uebersicht der bis- xcviii
herigen Leistungen und Theorien in diesem Gebiete, namentlich derjenigen von Fechner, dessen vielfältig angefochtene Sätze er bei eigener neuer Prüfung vollständig bestätigt gefunden hatte. Wenn man auf einen hellen Gegenstand geblickt hat und dann die Augen wegwendet, so sieht man im Allgemeinen noch eine kurze Zeit lang ein schnell verblassendes Nachbild des vorher gesehenen Gegenstandes, welches, wenn die Augen auf vollkommenes Dunkel gewandt sind, im Anfang wenigstens ein positives Bild ist, d. h. die hellen Stellen des Objectes hell, die dunklen dunkel erscheinen lässt. Auf gleichmässig erleuchteten Flächen erscheint das Nachbild dagegen meistens negativ, d. h. die hellen Stellen des Objectes erscheinen im xcix
Nachbilde dunkel, die dunklen hell. Fechner lässt die positiven Nachbilder aus einer nachbleibenden Reizung der vom Licht getroffenen Netzhautstellen entstehen, die negativen aus ihrer Ermüdung, vermöge deren sie gegen neu einfallendes Licht weniger empfindlich geworden sind. Die Stärke der Beleuchtung einer Fläche, welche nöthig ist, um das positive Nachbild, welches auf dunklem Grunde erscheint, in ein negatives zu verkehren, nimmt mit der Zeit ab, bis zuletzt die Helligkeit der von innerer Reizung der Netzhaut herrührenden Zeichnungen, die man im ganz dunklen Gesichtsfelde zu sehen pflegt (der sogenannte Lichtstaub des dunklen Gesichtsfeldes)

genügt, um das Bild negativ erscheinen zu lassen. Nach Fechner's Theorie kann öfterer Wechsel zwischen positivem und negativem Bilde nur durch wechselnde Stärke der Beleuchtung des Grundes eintreten; nach Plateau soll dieser Wechsel spontan ohne eine solche Veranlassung mehrmals hinter einander eintreten können. Der Vortragende fand in dieser Beziehung Fechner's Angaben durchaus bestätigt, aber man muss sehr vorsichtig in dem Ausschluss alles äusseren Lichtes sein, welches selbst durch die geschlossenen Augenlider, durch die Seiten des Augapfels u. s. w. in das Auge dringen kann, wenn man reine Resultate haben will. — Ausgezeichnet scharfe und deutliche positive Nachbilder erhält man, wenn man erst die Augen so lange schliesst, bis alle Spuren früher erzeugter Nachbilder verschwunden sind, und dann nicht etwa, wie bisher immer vorgeschrieben wird, einen hellen Gegenstand eine Weile betrachtet, ehe man sie wieder schliesst, vielmehr die Augen nur für einen möglichst kurzen Augenblick (etwa $^1/_3$ Sekunde) öffnet, und dann wieder schliesst und mit einem Tuche bedeckt.

Ferner hatte der Vortragende Nachbilder von reinen prismatischen Farben in seinem Auge erzeugt, und auf einem Felde, welches mit einer anderen prismatischen Farbe überzogen war, betrachtet. Die Erscheinungen unterscheiden sich nicht wesentlich von denen, welche durch Betrachtung zusammengesetzter Farben entstehen, wie die der meisten Naturkörper und Farbstoffe sind. Namentlich bemerkenswerth ist der Fall, wo man einen runden Fleck, von einer Spectralfarbe hell beleuchtet, angesehen hat, und dessen Nachbild auf einem Felde sich entwerfen lässt, welches von der Complementärfarbe überzogen ist, und welches man nach bekannten Methoden vollständig von diffusem weissem Lichte gereinigt hat. Dann erscheint in dem Nachbilde diese Complementärfarbe reiner und gesättigter, als in der Umgebung des Nachbildes, so dass es aussieht, als wäre das farbige Feld mit einem weissen Schleier überzogen, der nur an der Stelle des Nachbildes ein Loch hat. Daraus ergiebt sich die sehr bemerkenswerthe Folgerung, dass, obgleich die prismatischen Farben die reinsten und gesättigtsten, d. h. von eingemischtem Weiss freiesten

Farben sind, welche die äussere Natur uns bietet, doch noch auf dem angegebenen Wege die Empfindung einer gesättigteren Farbe erregt werden kann, gegen welche die reinsten prismatischen Farben weisslich erscheinen. Der Vortragende war schon bei seinen früheren Arbeiten über die Mischung der Farben zu dem Schlusse gekommen, dass, wenn die von Thomas Young aufgestellte Theorie, wonach es dreierlei Arten von Sehnerven-Fasern giebt, rothempfindende, grünempfindende und violettempfindende, richtig sein soll, die Spectralfarben noch nicht die gesättigtsten Farben seien, welche in der Empfindung des Auges vorkommen können, und eben zur Prüfung dieses Punktes war der Plan zu den beschriebenen Versuchen gefasst worden.

Weiter ausgeführt in meinem Handbuch der Physiolog. Optik. Aufl. I. S. 337—385.

CVI.

Ueber Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden.

Aus den Heidelberger Jahrbüchern der Literatur. 52. Jahrg. S. 354 bis 357.
(Verhandl. des naturhist.-med. Vereins zu Heidelberg vom 15. März 1859.)

---

354 In der Theorie der Orgelpfeifen wurde zuerst von Bernouilli und Euler angenommen, dass am offenen Ende dieser Pfeifen die Verdichtung der Luft gleich Null sei, eine Annahme, die zwar der Wahrheit nahe kommt, sie aber doch nicht ganz erreicht, und die desshalb in ihren Consequenzen einige Hauptphänomene solcher Pfeifen erklärt, bei andern in
355 Widerspruch mit den Thatsachen steht. In den späteren Theorien von Poisson, Hopkins, Quet, Masson hat man den in die Augen fallenden Uebelständen der älteren Theorie abzuhelfen gesucht, aber die Annahmen waren entweder zu beschränkt, oder ganz unbestimmt gehalten, so dass eine Menge Fragen, namentlich über die Phasen und die Stärke der Resonanz, wenn die Röhren durch äussere tönende Körper zum Tönen gebracht werden, gänzlich unbeantwortet blieben.

Der Vortragende giebt nun einen Abriss der Resultate einer mathematischen Untersuchung über diese Theorie, bei welcher jede Hypothese über den Zustand der Luft am offenen Ende vermieden ist, und bei welcher ferner auch die Annahme aufgegeben ist, dass in der Nähe eines offenen Endes die Bewegung der Luftttheilchen der Axe der Röhe parallel sei, und in allen Punkten eines Querschnittes dieselbe.

Die Aufgabe ist ganz allgemein gehalten folgende: In der Röhre existirt ein Abschnitt, in welchem die Bewegung der Lufttheilchen in ebenen Wellen vor sich geht; diese Bewegung theilt sich der äusseren Luft mit, und erregt in dieser ein

System von Wellen, welche in grösserer Entfernung von der Mündung kugelige fortschreitende Wellen sind. Zwischen jenen ebenen Wellen in der Röhre und diesen kugeligen im freien Raum wirken keine äusseren Kräfte auf die Luftmasse. Unter diesen Umständen ist die Bewegung der Luft zu bestimmen.

Um die Aufgabe zu lösen, ist zu suchen das Geschwindigkeitspotential ψ der Luftbewegung, dessen Differentialquotienten nach den drei Coordinataxen die drei Componenten der Geschwindigkeit, und dessen Differentialquotient nach der Zeit die mit a^2 multiplicirte Verdichtung der Luft giebt; a ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles. Ueber die Form der Röhre wird vorausgesetzt, dass diese im Allgemeinen cylindrisch, von beliebigem Querschnitt sei, nur in der Nähe der Mündung vom Cylinder abweiche, und dass die Dimensionen der Mündung und die Länge des nicht cylindrischen Theils gegen die Wellenlänge verschwindend klein seien.

Als allgemeinste Form des Geschwindigkeitspotentials in der Gegend der ebenen Wellen ist zu setzen, wenn die Mündung der Röhre in der $y\,z$ Ebene liegt, und ihre Axe der der negativen x entspricht.

$$\psi = \left(\frac{A}{k}.\sin k\,x + B.\cos k\,x\right)\cos 2\,\pi\,nt + \mathfrak{B}.\cos k\,x.\sin 2\,\pi\,nt,$$

wo n die Schwingungszahl, $k = 2\,\pi\,n\,/\,a$ ist.

In den entfernteren Theilen des freien Raumes, welcher übrigens durch die fortgesetzte $y\,z$ Ebene einseitig begrenzt gedacht wird, ist zu setzen

$$\psi = M.\frac{\cos(k\,\varrho - 2\,\pi\,nt)}{\varrho} + M_1\,\frac{\sin(k\,\varrho - 2\,\pi\,nt)}{\varrho},$$

wo ϱ die Entfernung von der Mündung der Röhre bezeichnet. 356
Bei Euler und Bernouilli ist $B = \mathfrak{B} = 0$, bei Poisson $B = 0$, $\mathfrak{B}$ unbestimmt klein, bei Hopkins B und $\mathfrak{B}$ unbestimmt klein. Es lassen sich nun im Allgemeinen folgende Beziehungen zwischen den vier Coëfficienten A, $\mathfrak{B}$, M und M_1 aufstellen:

$$M_1 = 0\;,\; A\,Q = -2\,\pi\,M\;\;,\; \mathfrak{B} = k\,M$$

worin Q den Querschnitt des cylindrischen Theiles der Röhre

bezeichnet. Nur das Verhältniss B/A ist abhängig von der Form der Mündung, lässt sich also im Allgemeinen nicht bestimmen. Setzen wir $k = 0$, so geht die Aufgabe mathematisch genommen über in die, den Strom der Elektricität zu bestimmen in einem dem Luftraume gleichgestalteten Leiter, wenn die Elektricität aus dem cylindrischen Leiter in den unendlichen überströmt. Ist l die Länge der Röhre, so ist $l + B/A$ der Widerstand des ganzen Leiters, ausgedrückt durch die Länge eines Abschnittes des cylindrischen Leiters. Ich nenne desshalb B/A die Differenz der wahren und reducirten Länge der Röhre. Haben Mündung und Querschnitt der Röhre zu einander ein endliches Verhältniss, so hat diese Differenz ein endliches Verhältniss zu den linearen Dimensionen der Mündung.

Es lässt sich eine Form der Röhrenmündung angeben, für welche die ganze Bewegungsweise der Luft bestimmt werden kann, und welche von einem reinen Cylinder mit kreisförmigem Querschnitt so wenig abweicht, dass man praktisch den Unterschied vernachlässigen kann. Bei dieser Form beträgt die Differenz der wahren und reducirten Länge $\pi . R/4$, wo R den Radius der Mündung und des Cylinders bezeichnet.

Die Differenz der wahren und reducirten Länge kann verschwinden, wenn die Röhre schwach trompetenförmig erweitert ist. Es lässt sich eine solche Form angeben, bei welcher die Kreisfläche der Mündung doppelt so gross ist, wie die des Querschnittes der Röhre.

Die Theorie stimmt für die cylindrische gut mit den Beobachtungen von Wertheim, indem der theoretische Werth von B/A zwar über dem Mittelwerthe liegt, den diese Beobachtungen ziemlich unabhängig von der Tonhöhe geben, aber doch innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler. Auch die Versuche von Zamminer stimmen wenigstens für engere Röhren ziemlich gut, zeigen aber viel grössere Abweichungen bei steigender Tonhöhe.

Die Wellen in der Röhre sind unregelmässig fortschreitende; wo das zeitweilige Maximum der Geschwindigkeit seine grösste Höhe erreicht, schreitet es langsam vorwärts, dazwischen schnell. Diese grösste Höhe erreicht es, wo die reducirte Länge der Röhre ein gerades Vielfache einer Viertelwellenlänge beträgt.

Das Maximum der Verdichtung schreitet ebenso fort, 357
erreicht aber seine grössten Werthe und seine langsamste Bewegung am Orte der Minima der Bewegung in den Knotenflächen, welche da liegen, wo die reducirte Länge der Röhre ein ungerades Vielfache der Viertelwellenlänge beträgt.

Wenn die Schlussplatte der Röhre erschüttert wird, oder Wellen aus dem freien Raum in das Innere der Röhre eindringen, ist die Resonanz am stärksten, wenn die Länge der geschlossenen Röhre ein ungerades Vielfache der Viertelwellenlänge beträgt. Im ersteren Falle verhält sich die Amplitude der Schwingungen in den Bäuchen der Röhre bei stärkster Resonanz zu der Amplitude der Schwingungen der Schlussplatte, wie das durch $2\pi \cos(k a)$ dividirte Quadrat der Wellenlänge zum Querschnitt der Röhre. (Gesetzt $\tang k a = -k . B/A$). Bei einer gegen den Querschnitt sehr engen Oeffnung steigt a, und die Resonanz wird stärker.

Endlich konnte der Vortragende aus seinen Theoremen auch das Gesetz entwickeln, durch welches die Höhe der Töne stärkster Resonanz bestimmt wird, bei solchen Hohlräumen, welche nur eine oder wenige enge Oeffnungen besitzen. Es ist bei einer kreisförmigen Oeffnung, deren Fläche s ist, für einen Hohlkörper, dessen Volumen S beträgt,

$$n = \frac{a \sqrt[4]{s}}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{\pi^5}\,\sqrt{S}}$$

Sondhauss hat aus seinen Versuchen statt der Constante $a/(\sqrt{2} \, . \, \sqrt[4]{\pi^5})$, welche etwa 56000 mm. beträgt, die Zahl 50200 bestimmt. Wertheim's Versuche an Glaskugeln stimmen ausserordentlich gut mit der theoretischen Formel, so lange der Durchmesser der Oeffnung kleiner als $^1/_{10}$ des Durchmessers einer Kugel ist, deren Volum dem des Hohlkörpers gleich ist.

Auch die von Sondhauss empirisch gefundenen Formeln für mehrere Oeffnungen lassen sich theoretisch begründen.

Stabes sucht, in der wenig von einander entfernte Doppelbilder desselben einfach erscheinen; besser noch, wenn man Zeichnungen, in denen man in gleichen Abständen von einander theils horizontale Linien, theils nahehin verticale Linien gezogen hat, und von denen die eine schwarz auf weissem Grunde, die andere weiss auf schwarzem Grunde ausgeführt ist, stereoskopisch zum Decken bringt. Ob die weissen mit den schwarzen Linien genau coincidiren, lässt sich dabei leicht erkennen. Die horizontalen Linien, von denen die eine in der Verlängerung der andern liegt, coincidiren bei parallel gerichteten Gesichtslinien und unermüdeten Augen genau, wie der Vortragende gegen Volkmann behaupten muss; aber allerdings finden sie sich auch divergent, wenn die Augen vorher eine Zeit lang nach unten convergirt haben.

Aus dem beschriebenen Versuche lässt sich nun folgende neue Definition identischer Stellen in beiden Gesichtsfeldern ableiten. Man lege durch beide Gesichtslinien eine Ebene, während dieselben parallel der Medianebene in die Ferne gerichtet sind. Den Durchschnitt dieser Ebene mit jedem Auge, den wir im Auge fest denken, nennen wir den Netzhauthorizont. Durch die Gesichtslinie jedes Auges lege man ferner eine Ebene in der Richtung, dass sie dem betreffenden Auge normal zum Netzhauthorizonte erscheint, die Ebene des scheinbar verticalen Meridians. In dieser letztgenannten Ebene und im Netzhauthorizonte errichte man je ein Loth zur Gesichtslinie im Drehpunkte des Auges, die Aequatorialaxe des Netzhauthorizonts und des scheinbar verticalen Meridians. Man denke durch jeden Punkt des Gesichtsfeldes und die genannten beiden Axen Ebenen gelegt. Die Winkel, welche die durch die Axe des Netzhauthorizonts gelegten Ebenen mit diesem einschliessen, nennen wir Höhenwinkel, die, welche die durch die Axe des scheinbar verticalen Meridians gelegten mit diesem einschliessen, nennen wir Breitenwinkel. Dann sind als identisch zu erklären Punkte, welche in beiden Augen gleiche Höhenwinkel und gleiche Breitenwinkel haben.

Unter diesen Umständen werden nun auch die Formen des Horopters ganz andere, als früher gefunden war. Im All-

gemeinen ergiebt sich der Horopter als eine Linie doppelter Krümmung, die als die Schnittlinie zweier Flächen zweiten Grades dargestellt werden kann. Nur in dem Falle, wo beide Augen parallel der Medianebene des Kopfes in unendliche Ferne sehen, ist der Horopter eine Ebene, welche unterhalb der Visirebene und dieser parallel läuft. Wenn der Beobachter steht und horizontal nach dem Horizont hinaus blickt, ist diese Horopterebene eine durch die Füsse des Beobachters gelegte Horizontalebene.

Wenn die Augen in der Primärstellung der Visirebene seitwärts convergiren, ist der Horopter der von J. Müller an- 342
gegebene Kreis, der durch den Fixationspunkt und die Drehpunkte beider Augen geht, und eine gerade Linie, die nicht durch den Fixationspunkt geht, ausser wenn dieser in der Medianebene liegt.

Wenn der Fixationspunkt in der Medianebene liegt, ist der Horopter die von Meissner gefundene geneigte Linie, und ein Kegelschnitt, der durch die Drehpunkte beider Augen aber nicht durch den Fixationspunkt geht.

Die Bedeutung der Thatsache, dass die Horopterfläche unter den oben genannten Bedingungen mit der Fussbodenfläche zusammenfällt, liegt darin, dass wir bei Weitem am genauesten das Relief solcher Flächen erkennen, die sich nicht weit vom Horopter entfernen, und dass wir daher, auf ebenem Boden stehend, die körperlichen Dimensionen der Bodenfläche von allen Gegenständen der Landschaft verhältnissmässig am genauesten erkennen. Wenn wir entweder mit umgewendetem Kopfe oder durch umkehrend spiegelnde rechtwinkelige Prismen die Landschaft betrachten, so erkennen wir das Relief und die Entfernungen namentlich auf den entfernteren Stellen der Bodenfläche lange nicht so gut, wie bei natürlichem Anblicke derselben. Und dass dies abhängt von der Lage der Netzhautbilder auf unserer Netzhaut, lässt sich dadurch erweisen, dass wie ich gefunden habe, das natürliche richtige Ansehen der Bodenfläche wieder eintritt, wenn man gleichzeitig den Kopf und das Bild umkehrt, also durch Reversionsprismen und zwischen den Beinen hindurch die Gegend betrachtet. Die scheinbare Farbenveränderung der Landschaft bei der Betrach-

tung durch Reversionsprismen oder bei umgekehrter Lage des Kopfes schwindet ebenfalls, wenn man beides verbindet. Sie erklärt sich daraus, dass, wenn die richtige Beurtheilung der Ferne schwindet, zu der die Farbenveränderung gehört, der Einfluss der Luft auf die Farben uns in ungewöhnlicher Weise auffällt.

Andrerseits kann man sich auch durch die Betrachtung schwach winklig gebogener Drähte überzeugen, dass man deren Biegungen sehr gut erkennt, wenn sie nahehin in der Horopterlinie liegen, viel schlechter dagegen, wenn sie diese unter einem grossen Winkel schneiden.

Weiter ausgeführt in den Band II dieser Sammlung S. 420 u. 427 als Nr. LXVI und LXVII abgedruckten Abhandlungen.

CVIII.

On the Normal Motions of the Human Eye in relation to Binocular Vision.

Aus: Proceedings of the Royal Society of London. Vol. XIII. (1863—64), p. 186—199. Croonian Lecture. April 14. 1864.

The Motions of the Human Eye are of considerable interest, 186
as well for the physiology of voluntary muscular motion in general, as for the physiology of vision. Therefore I may be allowed to bring before this Society the results of some investigations relating to them, which I have made myself; and I may venture perhaps to hope that they are such as to interest not only physiologists and medical men, but every scientific man who desires to understand the mechanism of the perceptions of our senses.

The eyeball may be considered as a sphere, which can be turned round its centre as a fixed point. Although this description is not absolutely accurate, it is sufficiently so for our present purpose. The eyeball, indeed, is not fixed during its motion by the solid walls of an articular excavation, like the bone of the thigh; but, although it is surrounded at its posterior surface only by soft cellular tissue and fat, it cannot be moved in a perceptible degree forward and backward, because the volume of the cellular tissue, included between the eyeball and the osseous walls of the orbit, cannot be diminished or augmented by forces so feeble as the muscles of the eye are able to exert.

In the interior of the orbit, around the eyeball six muscles

are situated, which can be employed to turn the eye round its centre. Four of them, the so-called *recti* muscles, are fastened at the hindmost point of the orbit, and go forward to fix themselves to the front part of the eyeball, passing over its widest circumference—or its equator, as we may call it, if we consider the foremost and the hindmost points of the eyeball as its poles. These four *recti* muscles are from their position severally named superior, inferior, internal, and external. Besides these, there are two *oblique* muscles, the ends of which come from the anterior margin of the orbit on the side next the nose, and, passing outwards, are attached at that side of the eyeball which is towards the temple—one of them, the superior oblique muscle, being stretched over the upper side of the eyeball, the other, or inferior, going along its under side.

These six muscles can be combined as three pairs of antagonists. The internal and external *recti* turn the eye round a perpendicular axis, so that its visual line is directed either to the right side or to the left. The superior and inferior *recti* turn it round a horizontal axis, directed from the upper end of the nose to the temple; so that the superior *rectus* elevates the visual line, the inferior depresses it. Lastly, the *oblique* muscles turn the eye round an axis which is directed from
187 its centre to the occiput, so that the superior oblique muscle lowers the visual line, and the inferior raises it; but these last two muscles not only raise and lower the visual line; they produce also a rotation of the eye round the visual line itself, of which we shall have to speak more afterwards.

A solid body, the centre of which is fixed, and which can be turned round three different axes of rotation, can be brought into every possible position consistent with the immobility of its centre. Look, for instance, at the motions of our arm, which are provided for at the shoulder-joint by the gliding of the very accurately spherical upper extremity of the humerus in the corresponding excavation of the scapula. When we stretch out the arm horizontally, we can turn it, first, round a perpendicular axis, moving it forwards and backwards; we can turn it, secondly, round a horizontal axis, raising it and lowering it; and lastly, after having brought it by such motions into

any direction we like, we can turn it round its own longitudinal axis, which goes from the shoulder to the hand; so that even when the place of the hand in space is fixed, there are still certain different positions in which the arm can be turned.

Now let us see how far the motions of the eye can be compared to those of our arm. We can raise and lower the visual line, we can turn it to the left and to the right, we can bring it into every possible direction, throughout a certain range—as far, at least, as the connexions of the eyeball permit. So far the motions of the eye are as free as those of the arm. But when we have chosen any determinate direction of the eye, can we turn the eye round the visual line as an axis, as we can turn the arm round its longitudinal axis?

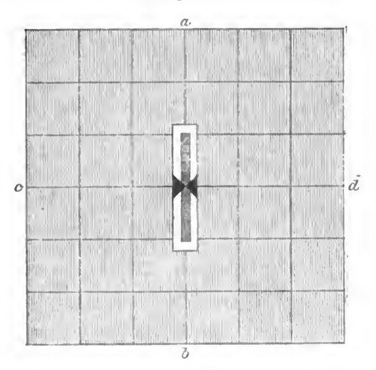
This is a question the answer to which is connected with a curious peculiarity of our voluntary motions. In a purely mechanical sense, we must answer this question in the affirmative. Yes, there exist muscles by the action of which those rotations round the visual line can be performed. But when we ask, "Can we do it by an act of our will?" we must answer, "No." We can voluntarily turn the visual line into every possible direction, but we cannot voluntarily use the muscles of our eye in such a way as to turn it round the visual line. Whenever the direction of the visual line is fixed, the position of our eye, as far as it depends upon our will, is completely fixed and cannot be altered.

This law was first satisfactorily proved by Professor Donders, of Utrecht, who, in a very ingenious way, controlled the position of the eye by those ocular spectra which remain in the field of vision after the eye had been fixed steadily during some time upon any brightly coloured object. I have used for this purpose a diagram like fig. 1: the ground is grey paper, and in the middle, along the line *a b*, is placed a narrow strip of red paper on a broader strip of green paper.[1]) The centre of the red strip is marked by two black points. When you look for about a minute steadily and without moving your eye at

[1]) *Green* is represented in the figure by white; *red* by the central dark stripe.

188 the centre of the diagram, the image of the coloured strips is projected on the nervous membrane of your eye; those parts of this membrane on which the light falls are irritated, and in consequence of this irritation, their irritability is exhausted, they are fatigued and they become less sensitive to that kind

Fig. 1.



of light by which they were excited before. When you cease, therefore, to look at the coloured strips, and turn your eye either to the grey ground of the diagram, or to any other part of the field of vision which is of a uniform feeble degree of illumination, you will see a spectrum of the coloured strips, exhibiting the same apparent magnitude, but with colours reversed, a narrow green strip being in the middle of a broader red one. The cause of this appearance is, that those parts of your retina which were excited formerly by green light are less affected by the green rays contained in white or whitish light than by rays of the complementary colour, and white light, therefore, appears to them reddish; to those parts of the nervous membrane, on the other hand, which had been fatigued by red light, white light afterwards appears to be greenish. The nervous membrane of the eye in these cases behaves

nearly like the sensitive stratum in a photographic apparatus, which is altered by light during the exposure in such a way that it is impressed differently afterwards by various agents; and the impression of light on the retina may be, perhaps, of the same essential nature as the impression made upon a photographic plate. But the impression made on the living eye does not last so long as that on sensitive compounds of silver; it vanishes very soon if the light be not too strong. Light of great intensity, like that of the sun when directly looked at, can develop very dark ocular spectra, which last
a quarter of an hour, or even longer, and disturb the perception 189
of external objects very much, as is well known. One must be very careful to avoid the use of too strong a light in these experiments, because the nervous apparatus of the eye is easily injured by it; and the brightness of these coloured strips when illuminated by common daylight is quite sufficient for our present purpose.

Now you will perceive easily that the ocular spectra are extremely well adapted to ascertain the position of the eyeball, because they have a fixed connexion with certain parts of the retina itself. If the eyeball could turn about its visual line as an axis, the ocular spectrum would apparently undergo the same degree of rotation; and hence, when we move about the eye, and at last return to the same direction of the visual line, we can recognize easily and accurately whether the eye has returned into the same position as before, or whether the degree of its rotation round the visual line has been altered. Professor Donders has proved, by using this very delicate test, that *the human eye, in its normal state, returns always into the same position when the visual line is brought into the same direction.* The position and direction of the eye are to be determined in this case in reference to the head of the observer; and I beg you to understand always, when I say that the eye or its visual line is moved upwards or downwards, that it is moved either in the direction of the forehead or in that of the cheek; and when I say it is moved to the left or to the right, you are to understand the left or right side of the head. Therefore, when the head sitelf is not in its common vertical position, the vertical

line here understood is not accordant with the line of the plummet.

Before the researches of Donders, some observers believed they had found a difference in the relative positions of the eye, when the head was brought into different situations. They had used either small brown spots of the iris, or red vessels in the white of the eye, to ascertain the real position of the eyeball; but their apparent results have been shown to be erroneous by the much more trustworthy method of Donders.

In the first place, therefore, we may state that the position of the eyeball depends exclusively upon the direction of the visual line in reference to the position of the head of the observer. But now we must ask, what is the law regulating the position of the eye for every direction of its visual line? In order to define this law, we must first notice that there exists a certain direction of the visual line, which, in relation to the motions of the eye, is distinguished from all other directions of the eye; and we may call it the *central* or *primary direction of the visual line.* This direction is parallel to the median vertical plane of the head; and it is horizontal when the head of the observer, who is standing, is kept in a convenient erect position to look at distant points of the horizon. How this primary direction of the visual line may be determined practically with greater accuracy we shall see afterwards. All other directions of the visual line we may call *secondary directions.*

A plane which passes through the visual line of the eye,
190 I call *a meridian plane* of the eye. Such a plane cuts through the retina in a certain line; and when the eye has been moved, we consider as the same meridian plane that plane which passes through the new direction of the visual line and the same points of the retina as before.

After having given these definitions, we may express the law of the motions of the eye in the following way: —

Whenever the eye is brought into a secondary position, that meridian plane of the eye which goes through the primary direction of the visual line has the same position as it has in the primary direction of the eye.

It follows from this law that the secondary position of the eye may be found also by turning the eye from its primary position round a fixed axis which is normal as well to the primary as to the secondary of the visual line.

[The geometrical relations of these different positions were explained by the lecturer by means of a moveable globe placed on an axis like the common terrestrial globes.]

It would take too long to explain the different ways in which different observers have tried to determine the law of the motions of the eyeball. They have employed complicated apparatus for determining the angles by which the direction and the rotation of the eye were to be measured. But usually two difficulties arise from the use of such instruments containing graduated circles, in the centre of which the eye must be kept steady. In the first place, it is very difficult to fix the head of the observer so firmly that he cannot alter its position during a continuous series of observations, and that he reassumes exactly the same position of the head when he returns to his measurements after a pause, — conditions which must necessarily be fulfilled if the observations are to agree with each other. Secondly, I have found that the eye must not be kept too long a time in a direction which is near to the limits of the field of vision; else its muscles are fatigued, and the positions of the eyeball corresponding to different directions of the visual line are somewhat altered. But if we have to measure angles on graduated circles, it is difficult to avoid keeping the eye too long in directions deviating far from the primary direction.

I think that it depended upon these causes, that the observations carried out by Meissner, Fick, and Wundt agreed very ill with each other and with the law which I have explained above, and which was first stated by Professor Listing of Göttingen, but without any experimental proof. Happily it is possible, as I found out, to prove the validity of this law by a very simple method, which is not subject to those sources of error I have named, and which I may be allowed to explain briefly.

In order to steady the attitude of the head in reference to the direction of the visual line, I have taken a little wooden

board, one end of which is hollowed into a curve fitting the arch of the human teeth; the margin of this hollow is covered with sealing-wax, into which, after it had been softened by heat and had been cooled again sufficiently, I inserted both
191 series of my teeth, so that I kept it firmly between my jaws. The impressions of the teeth remain indented in the sealing-wax; and when I put my teeth afterwards into these impressions, I am sure that the little board is brought exactly into the same position, relatively to my head and my eyes, as it was before. On the other end of that little board, which is kept horizontally between the teeth, a vertical piece of wood is fastened, on which I fix horizontally a little strip of card pointed at each end, so that these two points are situated about five inches before my eyes, one before the right eye, the other before the left. The length of the strip of card must be equal to the distance between the centres of the eyes, which is 68 millimetres for my own eyes. Looking now with the right eye in the direction of the right point of that strip, and with the left eye in the direction of the left point, I am sure to bring the eyes always into the same position relatively to my head, so long as the position of the strip of card on the wooden piece remains unaltered.

As a field of vision I use either a wall covered with a grey paper, in the pattern of which horizontal and vertical lines can be easily perceived, or a drawing-board covered with grey drawing-paper, on which a system of horizontal and vertical lines is drawn, as in fig. 1, and coloured stripes are fastened along the line *ab*.

Now the observer at first must endeavour to find out that position of his eyes which we call the primary position. In order to do this, the observer takes the wooden piece between his teeth, and brings his head into such a position that his right eye looks to the centre of the coloured stripes, in a direction perpendicular to the plane of the drawing. Then he brings his head into such an attitude that the right end of the card-strip appears in the same direction as the centre of the coloured stripe. After having steadily looked for some time to the middle of the coloured stripe, he turns away his gaze

to the end of either the vertical or horizontal lines, *ab, cd,* which are drawn through the centre of the coloured stripe. There he will see an ocular spectrum of the coloured stripe, and will observe if it coincides with the horizontal lines of the drawing. If not, he must alter the position of the strip of card on the wooden bar to which it is fastened, till he finds that the ocular spectrum of the coloured stripe remains horizontal when any point either of the line *ab* or *cd* is looked at. When he has thus found the primary direction of his visual line for the right eye, he does the same for the left.

The ocular spectra soon vanish, but they are easily renewed by looking again to the centre of the stripes. Care must be taken that the observer looks always in a direction perpendicular to the plane of the drawing whenever he looks to the centre of the coloured stripe, and that he does not move his head. If he should have moved it, he would find it out immediately when he looks back to the strip, because the point of the card-strip would no longer cover the centre of the coloured stripe.

So you see that the primary direction of the visual line
is completely fixed, and that the eye, which wants only to 192
glance for an instant at a peripheral point of the drawing, and then goes back again to the centre, is not fatigued.

This method of finding the primary position of the eye proves at the same time that vertical and horizontal lines keep their vertical or horizontal position in the field of vision when the eye is moved from its primary direction vertically or horizontally; and you see, therefore, that these movements agree with the law which I have enunciated. That is to say, during vertical movements of the eye the vertical meridian plane keeps its vertical position, and during horizontal movements the horizontal meridian.

Now you need only bring either your own head into an inclined position, or the diagram with the lines, and repeat the experiment, putting your head at first into such a position that the centre of the diagram corresponds with the primary direction of the visual line, and moving afterwards the eye along the lines *ab* or *cd*, in either a parallel or perpendicular direction

to the coloured line of the diagram, and you will find the ocular spectrum of the coloured line coinciding with those black lines which are parallel with *ab*. In this way, therefore, you can easily prove the law of Listing for every possible direction of the visual line.

I found the results of these experiments in complete agreement with the law of Listing for my own eyes, and for those of several other persons with normal power of vision. The eyes of very short-sighted persons, on the contrary, often show irregularities, which may be caused by the elongation of the posterior part of those eyes.

These motions of our eyes are a peculiar instance of motions which, being quite voluntary, and produced by the action of our will, are nevertheless limited as regards their extent and their combinations. We find similar limitations of motion of the eyes in other cases also. We cannot turn one eye up, the other down; we cannot move both eyes at the same time to the outer angle; we are obliged to combine always a certain degree of accommodation of the eyes to distance, with a certain angle of convergence of their axes. In these latter cases it can be proved that the faculty of producing these motions is given to our will, although our will is commonly not capable of using this faculty. We have come by experience to move our eyes with great dexterity and readiness, so that we see any visible object at the same time single and as accurately as possible; this is the only end which we have learnt to reach by muscular exertion; but we have not learnt to bring our eyes into any given position. In order to move them to the right, we must look to an object situated on our right side, or imagine such an object and search for it with our eyes. We can move them both inwards, but only when we strive to look at the back of our nose, or at an imaginary object situated near that place. But commonly there is no object which could be seen single by turning one eye upwards, the other downwards, or both
193 of them outwards, and we are therefore unable to bring our eyes into such positions. But it is a well known fact, that when we look at stereoscopic pictures, and increase the distance

of the pictures by degrees, our eyes follow the motion of the pictures, and that we are able to combine them into an apparently single object, although our eyes are obliged to turn into diverging directions. Professor Donders, as well as myself, has found that when we look to a distant object, and put before one of our eyes a prism of glass the refracting angle of which is between 3 and 6 degrees, and turn the prism at first into such a position before the eye that its angle looks to the nose and the visual lines converge, we are able to turn the prism slowly, so that its angle looks upwards or downwards, keeping all this time the object apparently single at which we look. But when we take away the prism, so that the eyes must return to their normal position before they can see the object single, we see the object double for a short time—one image higher than the other. The images approach after some seconds of time and unite at last into one.

By these experiments it is proved that we can move both eyes outward, or one up and the other down, when we use them under such conditions that such a position is required in order that we may see the objects single at which we are looking.

I have sometimes remarked that I saw double images of single objects, when I was sleepy and tried to keep myself awake. Of these images one was sometimes higher than the other, and sometimes they were crossed, one of them being rotated round the visual line. In this state of the brain, therefore, where our will begins to lose its power, and our muscles are left to more involuntary and mechanical impulses, an abnormal rotation of the eye round the visual line is possible. I infer also from this observation, that the rotation of the eye round the visual axis cannot be effected by our will, because we have not learnt by which exertion of our will we are to effect it, and that the inability does not depend on any anatomical structure either of our nerves or of our muscles which limits the combination of motion. We should expect, on the contrary, that, if such an anatomical mechanism existed, it should come out more distinctly when the will has lost its power.

We may ask, therefore, if this peculiar manner of moving the eyes, which is determined by the law of Listing, is produced by practical exercise on account of its affording any advantages to visual perceptions. And I believe that certain advantages are indeed connected with it.

We cannot rotate our eyes in the head, but we can rotate the head with the eyes. When we perform such a motion, looking steadily to the same point, we remark that the visible objects turn apparently a little round the fixed point, and we lose by such a motion of our eye the perception of the steadiness of the objects at which we look. Every position of the visual line is connected with a determined and constant degree of
194 rotation, according to the law of Donders; and in altering this rotation we should judge the position of external objects wrongly.

The same will take place when we change the direction of the visual line. Suppose the amplitude of such motions to be infinitely small; then we may consider this part of the field of vision, and the corresponding part of the retina on which it is projected, as plane surfaces. If during any motion of the eye the optic image is displaced so that in its new position it remains parallel to its former position on the retina, we shall have no apparent motions of the objects. When, on the contrary, the optic image of the visible objects is dislocated so that it is not parallel to its former position on the retina, we must expect to perceive an apparent rotation of the objects.

As long as the motions of the eye describe infinitely small angles, the eye can be moved in such a way that the optic image remains always parallel to its first position. For this end the eye must be turned round axes of rotation which are perpendicular to the visual line; and we see indeed that this is done, according to the law of Listing, when the eye is moving near its primary position. But it is not possible to fulfil this condition completely when the eye is moved through a wider area which comprises a larger part of the spherical field of view. For if we were to turn the eye always round an axis perpendicular to the visual line, it would come into very different positions after having been turned through different ways to the same final direction.

The fault, therefore, which we should strive to avoid in the motions of our eye, cannot be completely avoided, but it can be made as small as possible for the whole field of vision.

The problem, to *find such a law for the motions of the eye that the sum of all the rotations round the visual line for all possible infinitely small motions of the eye throughout the whole field of vision becomes a minimum,* is a problem to be solved by the calculus of variations. I have found that the solution for a circular field of vision, which corresponds nearly to the forms of the actual field of vision, gives indeed the law of Listing.

I conclude from these researches, that the actual mode of moving the eye is that mode by which the perception of the steadiness of the objects through the whole field of vision can be kept up the best; and I suppose, therefore, that this mode of motion is produced by experience and exercise, because it is the best suited for accurate perception of the position of external objects.

But in this mode of moving, rotations round the visual line are not completely avoided when the eye is moved in a circular direction round the primary position of the visual line; and it is easy to recognize that in such a case we are subject to optical illusions.

Turn your eyes to a horizontal line situated in the highest part of the field of vision, and let them follow this line from
one end to the other. The line will appear like a curved line, 195
the convexity of which looks downward. When you look to its right extremity, it seems to rise from the left to the right; when you look to the left extremity of the line, the left end seems to rise. In the same way, all straight lines which go through the peripheral parts of the field of vision appear to be curved, and to change their position a little, if you look to their upper or their lower ends.

This explanation relates only to Monocular vision; we have to inquire also how it influences Binocular vision.

Each eye has its field of vision, on which the visible objects appear distributed like the objects of a picture, and the two fields with their images seem to be superimposed.

Those points of both fields of view which appear to be superimposed are called *corresponding* (or *identical*) points. If we look at real objects, the accurate perception of the superposition of two different optical images is hindered by the perception of stereoscopic form and depth; and we unite indeed, as Mr. Wheatstone has shown, two retinal images completely into the perception of one single body, without being able to perceive the duplicity of the images, even if there are very sensible differences of their form and dimensions. To avoid this, and to find those points of both fields of view which correspond with each other, it is necessary to use figures which cannot easily be united into one stereoscopic projection.

In fig. 2 you see such figures, the right of which is drawn with white lines on a black ground, the left with black lines on a white ground. The horizontal lines of both figures are parts of the same straight lines; the vertical lines are not perfectly vertical. The upper end of those of the right figure is inclined to the right, that of the left figure to the left, by about $1^1/_4$ degree.

Now I beg you to look alternately with the right and with the left eye at these figures. You will find that the angles of the right figure appear to the right eye equal to right angles, and those of the left figure so appear to the left eye; but the angles of the left figure appear to the right eye to deviate much from a right angle, as also do those of the right figure to the left eye.

When you draw on paper a horizontal line, and another line crossing it exactly at right angles, the right superior angle will appear to your right eye too great, to your left eye too small; the other angles show corresponding deviations. To have an apparently right angle, you must make the vertical line incline by an angle of about $1^1/_4$ degree for it to appear really vertical; and we must distinguish, therefore, the *really* vertical lines and the *apparently* vertical lines in our field of view.

There are several other illusions of the same kind, which I omit because they alter the images of both eyes in the same manner and have no influence upon binocular vision; for example, vertical lines appear always of greater length than horizontal lines having really the same length.

Now combine the two sides of fig. 2 into a stereoscopic 196
combination, either by squinting, or with the help of a stereoscope, and you will see that the white lines of the one coincide exactly with the black lines of the other, as soon as the centres of both the figures coincide, although the vertical lines of the two figures are not parallel to each other.

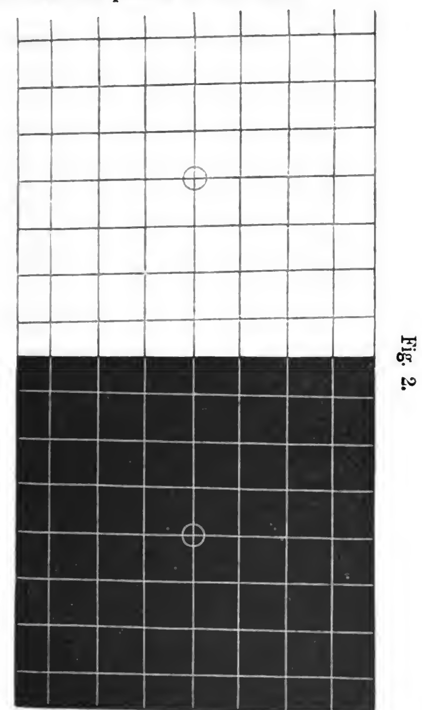


Fig. 2.

Therefore not the *really* vertical meridians of both fields of view correspond, as has been supposed hitherto, but the *apparently*

vertical meridians. On the contrary, the horizontal meridians really correspond, at least for normal eyes which are not
137 fatigued. After having kept the eyes a long time looking down at a near object, as in reading or writing, I found sometimes that the horizontal lines of fig. 2 crossed each other; but they became parallel again when I had looked for some time at distant objects.

In order to define the position of the corresponding points in both fields of vision, let us suppose the observer looking to the centres of the two sides of fig. 2, and uniting both pictures stereoscopically. Then planes may be laid through the horizontal and vertical lines of each picture and the centre of the corresponding eye. The planes laid through the different horizontal lines will include angles between them, which we may call *angles of altitude;* and we may consider as their zero the plane going through the fixed point and the horizontal meridian. The planes going through the vertical lines include other angles, which may be called *angles of longitude,* their zero coinciding also with the fixed point and with the *apparently* vertical meridian. Then the stereoscopic combination of those diagrams shows that *those points correspond which have the same angles of altitude and the same angles of longitude;* and we can use this result of the experiment as a definition of corresponding points.

We are accustomed to call *Horopter* the aggregate of all those points of the space which are projected on corresponding points of the retinæ. After having settled how to define the positions of corresponding points, the question, what is the form and situation of the Horopter, is only a geometrical question. With reference to the results I had obtained in regard to the positions of the eye belonging to different directions of the visual lines, I have calculated the form of the Horopter, and found that generally the Horopter is a line of double curvature produced by the intersection of two hyperboloids, and that in some exceptional cases this line of double curvature can be changed into a combination of two plane curves.

That is to say, when the point of convergence is situated in the middle plane of the head, the Horopter is composed of a straight line drawn through the point of convergence, and

of a conic section going through the centre of both eyes and intersecting the straight line.

When the point of convergence is situated in the plane which contains the primary directions of both the visual lines, the Horopter is a circle going through that point and through the centres of both eyes and a straight line intersecting the circle.

When the point of convergence is situated as well in the middle plane of the head as in the plane of the primary directions of the visual lines, the Horopter is composed of the circle I have just described, and a straight line going through that point.

There is only one case in which the Horopter is really a plane, as it was supposed to be in every instance by Aguilonius, the inventor of that name, — namely, when the point of convergence is situated in the middle plane of the head and at an infinite distance. Then the Horopter is a plane parallel to the visual lines, and situated beneath them, at a certain distance which depends upon the angle between the *really* and *apparently* vertical meridians, and which is nearly 108
as great as the distance of the feet of the observer from his eyes when he is standing. Therefore, when we look straight forward to a point of the horizon, the Horopter is a horizontal plane going through our feet— it is the ground upon which we are standing.

Formerly physiologists believed that the Horopter was an infinitely distant plane when we looked to an infinitely distant point. The difference of our present conclusion is consequent upon the difference between the position of the *really* and *apparently* vertical meridians, which they did not know.

When we look, not to an infinitely distant horizon, but to any point of the ground upon which we stand which is equally distant from both our eyes, the Horopter is not a plane; but the straight line which is one of its parts coincides completely with the horizontal plane upon which we are standing.

The form and situation of the Horopter is of great practical importance for the accuracy of our visual perceptions, as I have found.

Take a straight wire — a knitting-needle for instance — and bend it a little in its middle, so that its two halves form an

angle of about four degrees. Hold this wire with outstretched arm in a nearly perpendicular position before you, so that both its halves are situated in the middle plane of your head, and the wire appears to both your eyes nearly as a straight line. In this position of the wire you can distinguish whether the angle of the wire is turned towards your face or away from it, by binocular vision only, as in stereoscopic diagrams; and you will find that there is one direction of the wire in which it coincides with the straight line of the Horopter, where the inflexion of the wire is more evident than in other positions. You can test if the wire really coincides with the Horopter, when you look at a point a little more or a little less distant than the wire. Then the wire appears in double images, which are parallel when it is situated in the Horopter line, and are not when the point is not so situated.

Stick three long straight pins into two little wooden boards which can slide one along the other; two pins may be fastened in one of the boards, the third pin in the second. Bring the boards into such a position that the pins are all perpendicular and parallel to each other, and situated nearly in the same plane. Hold them before your eyes and look at them, and strive to recognize if they are really in the same plane, or if their series is bent towards you or from you. You will find that you distinguish this by binocular vision with the greatest degree of certainty and accuracy (and indeed with an astonishing degree of accuracy) when the line of the three pins coincides with the direction of the circle which is a part of the Horopter.

From these observations it follows that the forms and the distances of those objects which are situated in, or very nearly in, the Horopter, are perceived with a greater degree of accuracy than the same forms and distances would be when not situated
199 in the Horopter. If we apply this result to those cases in which the ground whereon we stand is the plane of the Horopter, it follows that, looking straight forward to the horizon we can distinguish the inequalities and the distances of different parts of the ground better than other objects of the same kind and distance.

This is actually true. We can observe it very conspicuously when we look to a plain and open country with very distant hills, at first in the natural position, and afterwards with the head inclined or inverted, looking under the arm or between our legs, as painters sometimes do in order to distinguish the colours of the landscape better. Comparing the aspect of the distant parts of the ground, you will find that we perceive very well that they are level and stretched out into a great distance in the natural position of your head, but that they seem to ascend to the horizon and to be much shorter and narrower when we look at them with the head inverted: we get the same appearance also when our head remains in its natural position, and we look to the distant objects through two rectangular prisms, the hypothenuses of which are fastened on a horizontal piece of wood, and which show inverted images of the objects. But when we invert our head, and invert at the same time also the landscape by the prisms, we have again the natural view and the accurate perception of distances as in the natural position of our head, because then the apparent situation of the ground is again the plane of the Horopter of our eyes.

The alteration of colour in the distant parts of a landscape when viewed with inverted head, or in an inverted optical image, can be explained, I think, by the defective perception of distance. The alterations of the colour of really distant objects produced by the opacity of the air, are well known to us, and appear as a natural sign of distance; but if the same alterations are found on objects apparently less distant, the alteration of colour appears unusual, and is more easily perceived.

It is evident that this very accurate perception of the form and the distances of the ground, even when viewed indirectly, is a great advantage, because by means of this arrangement of our eyes we are able to look at distant objects, without turning our eyes to the ground, when we walk.

Eine ausführliche Auseinandersetzung der hier besprochenen Verhältnisse findet sich in meinem Handbuch d. Physiolog. Optik. §§ 27, 28, 30.

CIX.

Ueber die Augenbewegungen.

Aus den Heidelberger Jahrbüchern der Literatur. 58. Jahrg. S. 255 bis 259.
(Verhandl. des naturhist.-med. Vereins zu Heidelberg vom 13. Januar 1865.)

---

255 Unter gewöhnlichen Verhältnissen können normale Augen sich nur so bewegen, wie sie sich bewegen müssen, um beide einen und denselben Punkt zu fixiren und deutlich zu sehen. Sie können also nur gleichzeitig gehoben und gesenkt werden,
256 je nachdem der Fixationspunkt hoch oder tief liegt; aber es kann nicht ein Auge nach oben, das andere nach unten blicken. Beide Augen können gleichzeitig nach rechts, oder gleichzeitig nach links bewegt werden, je nachdem der Fixationspunkt rechts oder links liegt, auch können sie convergent gestellt werden, um einen nahen Punkt zu fixiren, so dass das rechte Auge nach links, das linke nach rechts gewendet ist, aber sie können im Allgemeinen nicht divergent gestellt werden. Endlich ist der Grad der Accommodation auch immer von dem Grade der Convergenz abhängig; normale Augen sind fortdauernd accommodirt für den Convergenzpunkt ihrer Gesichtslinien.

Da nun die Bewegungen jedes Auges und ebenso die Accommodationsänderungen jedes Auges durch Muskelgruppen ausgeführt werden, welche von einander ganz unabhängig sind, so glaubte man den Zwang, welcher sich bei der Combination der genannten Bewegungsweisen geltend macht, auf das Princip der Mitbewegungen zurückführen zu dürfen, das heisst, man nahm an, dass die Wege der Nervenleitung zu den Muskeln in der Weise verbunden seien, dass nur die genannten bestimmten Bewegungsgruppen entstehen könnten.

Eine Reihe neuerer Erfahrungen wiederspricht dieser Annahme. Erstens wenn man eine Brille vor die Augen setzt, ist man gezwungen, um deutlich und einfach zu sehen, die frühere Convergenz für ein Object in gewisser Entfernung beizubehalten, aber einen anderen Accommodationsgrad damit zu verbinden. Aehnliches geschieht oft bei der Betrachtung stereoskopischer Bilder. Anfangs ist eine solche neue Combination von Convergenz und Accommodation sehr unbequem, aber bald gewöhnt man sich an dieselbe, und fühlt im Gegentheil Unbequemlichkeiten, wenn man den natürlichen Zustand wieder herstellt.

Ebenso ist es verhältnissmässig leicht mittels stereoskopischer Bilder, die man allmählig von einander entfernt, während man sie fixirt, Divergenz zu erreichen. Dasselbe erreicht man auch leicht, wenn man ein schwach brechendes Prisma, die brechende Kante nach der Schläfenseite gewendet, vor das Auge bringt, und erst nahe, dann immer fernere und fernere Gegenstände betrachtet. Sehr entfernte Gegenstände können unter diesen Umständen nur einfach erscheinen, wenn die Gesichtslinien divergiren.

Endlich hat Donders gefunden und habe ich selbst diese 257
Versuche bestätigt, dass man auch lernen kann, das eine Auge nach oben, das andere nach unten zu richten, wenn man ein schwach brechendes Prisma vor ein Auge nimmt, zuerst mit der brechenden Kante nach innen, und dann sehr langsam diese allmählich nach unten oder oben dreht. Man muss mit der Drehung aufhören, so bald man anfängt Doppelbilder zu sehen, und nicht eher fortfahren, als bis diese wieder vollständig verschwunden sind. Nimmt man das Prisma dann vom Auge fort, so sieht man nun mit freien Augen über einander stehende Doppelbilder, die sich aber nach wenigen Sekunden wieder vereinigen, zum Zeichen, dass die Augen in ihre alte normale Stellung zurückgekehrt sind.

Diese Versuche lassen schliessen, dass der Zwang in der Combination der verschiedenen Augenbewegungen nur davon herrührt, dass wir die Intention unseres Willens auf keinen anderen Zweck richten können als den, ein bestimmtes Object einfach und deutlich zu sehen, und dass wir desshalb abnorme

Augenbewegungen ausführen lernen, sobald wir die Augen unter abnormen Bedingungen sehen lassen.

Nun besteht noch ein anderes zwingendes Gesetz bei den Augenbewegungen. Nämlich bei parallelen Gesichtslinien ist auch die Raddrehung jedes Auges (Drehung um die Gesichtslinie) in bestimmter Weise abhängig von der Richtung der Gesichtslinien. Das sich hierauf beziehende Gesetz von Listing habe ich selbst durch eine einfache Form der Beobachtung zu bestätigen gesucht, und darüber in unserm Verein gesprochen. Sobald unsere Augen eine bestimmte Richtung ihres Blickes angenommen haben, ist dadurch eine bestimmte Stellung derselben gegeben, und wir können dann nicht willkürlich eine Raddrehung derselben um die Gesichtslinie ausführen.

Man konnte nun schon früher als sehr wahrscheinlich annehmen, dass der Zwang in diesem Falle wie in den früheren nur herrührt von der mangelnden Fähigkeit, die entsprechende Willensintention zu bilden, und in diesem Sinne habe ich selbst eine Theorie für den Ursprung des Listing'schen Ge-
258 setzes aufgestellt, in der es als Resultat der Einübung betrachtet und hergeleitet wird aus dem Bedürfniss einer möglichst sicheren Orientirung über die Lage der gesehenen Objecte. Ich habe jetzt einen Versuch gefunden, durch welchen man dies direkt erweisen kann.

Wenn man durch ein rechtwinkeliges Glasprisma parallel seiner Hypotenusenfläche blickt, welche wir als horizontal gerichtet annehmen wollen, so sieht man die jenseits gelegenen Objecte in natürlicher Grösse und ohne farbige Ränder, aber Oben in Unten verkehrt. In der That wirkt das Prisma hierbei wie ein Spiegel, indem die Lichtstrahlen an seiner Hypotenusenfläche totale Reflexion erleiden. Stellt man hinter das erste Prisma ein zweites ebenfalls mit horizontaler Hypotenusenfläche und blickt durch beide hintereinander, so wird die Umkehrung von Oben und Unten, die das erste Prisma giebt, durch das zweite wieder aufgehoben, und man sieht die Objecte in natürlicher Stellung. Richtet man aber die beiden Hypotenusenflächen nicht ganz genau parallel, sondern dreht das eine Prisma ein wenig um die Richtung der Gesichtslinie als Axe, so sieht man das ganze Gesichtsfeld durch das Prisma

ein wenig gedreht, um einen Winkel, der doppelt so gross ist, als der Winkel, um den die Hypotenusenflächen vom Parallelismus abweichen. Um diese Stellung der Prismen zu erhalten, kann man ganz einfach zwei Kathetenflächen der Prismen auf einander kitten, so dass die Hypotenusenflächen nahehin parallel sind.

Nimmt man nun ein solches Doppelprisma vor ein Auge und blickt mit beiden Augen nach entfernten Gegenständen, so erblickt man zuerst gekreuzte Doppelbilder des Gesichtsfeldes. Wenn man aber den Blick eine Weile über die verschiedenen Objecte, welche man übersieht, wandern lässt, wobei man jeden einzelnen Punkt einfach sehen kann, so schwindet die Kreuzung und die Doppelbilder vereinigen sich wieder zu einem einfachen Bilde, was ganz ebenso deutlich und klar ist, wie beim Sehen mit unbewaffneten Augen. Jetzt treten aber gekreuzte Doppelbilder für einige Augenblicke hervor, sobald man das Doppelprisma entfernt, doch vereinigen sie sich nach einigen Sekunden zu dem gewöhnlichen einfachen Bilde des normalen Sehens.

Ich habe ausserdem, während ich durch die Prismen sah, willkürlich Doppelbilder passender Objecte erzeugt, und diese in ihrer gewöhnlichen normalen Stellung zu einander gefunden, wie sie ohne Prismen beim normalen Sehen erscheinen müssten. Ich habe während des Sehens durch die Prismen einen weissen Streifen auf dunklem Grunde fixirt, bis Nachbilder desselben in beiden Augen entwickelt waren, und diese Nachbilder nach Entfernung der Prismen einzeln betrachtet. Es zeigte sich, dass sie dann verglichen mit entfernten objectiven Linien des Gesichtsfeldes in den ersten Augenblicken verschieden gerichtet erschienen, so lange die normale Stellung der Augen noch nicht hergestellt war, dass sie aber nachher, wenn das geschehen war, gleich gerichtet erschienen, wie sie es hätten sein 259
müssen (und in der That auch waren), wenn sie ohne alle Anwendung der Prismen entwickelt worden wären.

Daraus folgt, dass das durch die rotirenden Prismen blickende Auge sich allmählich so gedreht hat, dass gleiche Bilder wieder auf identische Punkte beider Netzhäute fielen, und dass diese abnorme Rotation des Auges nach Entfernung

der Prismen bald wieder verschwand. Die Grösse der abnormen Raddrehung betrug in meinen Versuchen 5 Grad.

Daraus folgt weiter, dass auch die Raddrehung der Augen dem Willen unterworfen ist und vollzogen werden kann, sobald sie nöthig ist, um der einzig möglichen Willensintention, welche für die Augenbewegungen gebildet werden kann, nämlich die: einfach und deutlich zu sehen, zu dienen.

Ausführlicher behandelt in meinem Handbuch d. Physiolog. Optik. 1. Aufl. S. 471—479.

CX.

Ueber elektrische Grenzschichten.

Aus den Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
27. Februar 1879. S. 198 bis 200.

In allen denjenigen Fällen, wo zwei an einander grenzende 198
Körper verschiedene Werthe der elektrischen Potentialfunction haben, muss längs der Grenzfläche eine Doppelschicht positiver und negativer Elektricität liegen, deren mit 4π multiplicirtes Moment (diesen Ausdruck in demselben Sinne, wie den des magnetischen Momentes genommen) für die Flächeneinheit berechnet gleich dem Unterschiede der Potentialfunction an beiden Seiten der Doppelschicht ist. Da nun der Werth des Moments gleich ist der elektrischen Dichtigkeit der positiven E, multiplicirt mit dem mittleren Werth des Abstandes beider Schichten, so kann dieser Abstand nicht verschwindend klein werden, ohne dass die Dichtigkeit bei gegebener Potentialdifferenz unendlich gross würde. Es ist aber die bei Bildung einer solchen Doppelschicht gegen die elektrostatischen Kräfte geleistete Arbeit gleich $\frac{1}{2}\, P.\, E,$ wenn E die Menge der positiven Elektricität auf der Flächeneinheit bezeichnet, und P den Potentialunterschied an beiden Seiten der Doppelschicht. Da beim Abstand h zwischen beiden Schichten

$$4\,\pi\, E\, h = P,$$

so ist der Arbeitswerth:

$$\frac{1}{2}\, P\, E = \frac{1}{8\,\pi\, h}\, P^2$$

und würde also für verschwindendes h unendlich gross werden. Daraus hat schon Sir William Thomson eine Grenze für den Abstand der Doppelschichten bei der galvanischen Spannung zwischen Kupfer und Zink berechnet, wonach derselbe grösser als $^1/_3 \cdot 10^{-7}$ mm. sein muss. Damit stimmen Herrn F. Kohlrausch's Versuche über die Capacität galvanisch polarisirter Platinflächen für ganz schwache Ladungen, aus denen sich der Abstand gleich dem 2475000sten Theile eines Millimeters er-
199 giebt, wenn der Potentialunterschied auf beide Platten gleichmässig vertheilt angenommen wird.

Der Vortragende zeigte, dass die Gesetze der durch elektrische Ströme verursachten Wasserströmung durch Capillarröhren und poröse Diaphragmen, wie dieselben von den Herren G. Wiedemann und Quincke ermittelt worden sind, ferner die Gesetze der von letzterem Beobachter entdeckten, durch Wasserströmung erregten elektrischen Spannung zwischen Anfang und Ende des Stromlaufs, sich alle aus der Hypothese herleiten lassen, dass zwischen Gefässwand und Flüssigkeit ein elektrischer Potentialunterschied bestehe (was auch Herr Quincke angenommen und durch viele Versuche unterstützt hat) und dass der in das Wasser fallende Theil der Doppelschicht es sei, der sowohl den elektrischen Anziehungskräften bei elektrischer Durchströmung der Röhre unterliege, als auch durch eingeleitete Wasserbewegung mitgenommen werde. Die Grenzschicht der Flüssigkeit muss als ruhend an der Wand angenommen werden wie in Poisseuille's Theorie der Strömung in capillaren Röhren. Für eine Reihe von Fällen reichen die angegebenen Daten aus, das elektrische Moment des in die Flüssigkeit fallenden Theils der Doppelschicht zu berechnen (wobei die entgegengesetzte Elektricität in der Grenzfläche vereinigt anzunehmen ist). Es ergeben sich dabei Werthe, die nicht über diejenigen hinausgehen, welche wir aus den galvanischen Spannungen zwischen Metallen kennen.

So ergeben Herrn Wiedemann's Versuche über elektrische Fortführung von Kupfervitriollösung durch Thonscheidewände das Moment der in die Flüssigkeit fallenden elektrischen Schicht gleich 2,4 Daniells. Herrn Quincke's Versuche über die Steighöhe elektrisch fortgeführten Wassers in Glasröhren

geben 3,9 Daniells; desselben Versuche über die elektrische Spannung, welche beim Durchtreiben sehr verdünnter Salzlösungen durch Thonscheidewände entsteht, 2,7 bis 1,9 Daniells. Da die elektromotorische Kraft zwischen Kalium und Platina etwa 3,4 Daniells beträgt, so liegen die genannten Zahlen alle innerhalb oder wenig jenseits der Grenzen der zwischen Metallen beobachteten Potentialunterschiede.

Die Annahme, dass die äusserste Grenzschicht der Flüssigkeit unbeweglich an der Gefässwand hafte, wurde gegründet
auf die von Herrn Quincke ausgeführten Bestimmungen der
Steighöhen elektrisch fortgeführter Flüssigkeit in cylindrischen 200
Glasröhren, wonach dieselben dem Quadrat des Radius umgekehrt proportional sind. Dieses Gesetz ergiebt sich aus der Theorie nur unter der Annahme, dass keine Gleitung der Grenzschicht eintrete. Auch für die Fälle, wo ein cylindrischer Glasfaden in eine cylindrische Röhre eingelegt ist, liess sich die Rechnung durchführen und zeigte erträgliche Uebereinstimmung mit den Beobachtungen, so weit eine solche bei so subtilen und durch mannigfache Einflüsse gestörten Versuchen zu erwarten ist.

Weiter ausgearbeitet in der Bd. I, S. 855 als Nr. XLV abgedruckten Abhandlung.

CXI.

ON THE MODERN DEVELOPMENT OF FARADAY'S CONCEPTION OF ELECTRICITY.

The Faraday Lecture, delivered before the Fellows of the Chemical Society, in the Theatre of the Royal Institution, on Tuesday, April 5, 1881.

Aus: Journal of the Chemical Society. Vol. XXXIX p. 277 bis 304. 1881.

277 Ladies and Gentlemen.

As I have the honour of speaking to you in memory of the great man, who from the very place where I stand has so often revealed to his admiring auditors the most unexpected secrets of nature, I hope at the outset to gain your assent if I limit my exposition to that side of his activity, which I know the best from my own experience and studies: I mean the theory of Electricity. The majority, indeed, of Faraday's own researches were connected directly or indirectly with questions regarding the nature of electricity, and his most important and most renowned discoveries lay in this field. The facts which he discovered are universally known. Every physicist, at present, is acquainted with the rotation of the plane of polarisation of light by magnetism, with dielectric tension and diamagnetism, and with the measurement of the intensity of galvanic currents by the voltameter, whilst induced currents act on the telephone, are applied to paralysed muscles, and nourish the electric light. Nevertheless, the fundamental conceptions by which Faraday was led to these much admired discoveries, have not received

an equal amount of consideration. They were very divergent from the trodden path of scientific theory, and appeared rather startling to his contemporaries. His principal aim was to express in his new conceptions only facts, with the least possible use of hypothetical substances and forces. This was really an advance in general scientific method, destined to purify science from the last remnants of metaphysics. Faraday was not the first, and not the only man, who has worked in this direction, but perhaps nobody else at his time did it so radically. But every reform of fundamental and leading principles introduces new kinds of abstract notions, the sense of which the reader does not catch in the first instance.

Under such circumstances it is often less difficult for a man of original thought to discover new truth than to discover why other people do not understand and do not follow him. This difficulty must increase in Faraday's case because he had not gone through the same common course of scientific education as the majority of his readers. Now that the mathematical interpretation of Faraday's conceptions regarding the 273
nature of electric and magnetic forces has been given by Clerk Maxwell, we see how great a degree of exactness and precision was really hidden behind the words, which to Faraday's contemporaries appeared either vague or obscure; and it is in the highest degree astonishing to see what a large number of general theorems, the methodical deduction of which requires the highest powers of mathematical analysis, he found by a kind of intuition, with the security of instinct, without the help of a single mathematical formula. I have no intention of blaming his contemporaries, for I confess that many times I have myself sat hopelessly looking upon some paragraph of Faraday's descriptions of lines of force, or of the galvanic current being an axis of power, &c. A single remarkable discovery may, of course, be the result of a happy accident, and may not indicate the possession of any special gift on the part of the discoverer; but it is against all rules of probability, that the train of thought which has led to such a series of surprising and unexpected discoveries, as were those of Faraday, should be without a firm, although perhaps hidden, foundation of truth. We must

also in his case acquiesce in the fact that the greatest benefactors of mankind usually do not obtain a full reward during their lifetime, and that new ideas need the more time for gaining general assent the more really original they are, and the more power they have to change the broad path of human knowledge.

Faraday's electrical researches, although embracing a great number of apparently minute and disconnected questions, all of which he has treated with the same careful attention and conscientiousness, really always aim at two fundamental problems of natural philosophy, the one, more regarding the nature of the forces termed physical, or of forces working at a distance; the other, in the same way, regarding chemical forces, or those which act from molecule to molecule, and the relation between these and the first.

I shall give you only a short exposition on the degree of development which has been reached in the present state of science with regard to the first of these problems. The discussion of this question amongst scientific men is not yet finished, although, I think, it approaches its end. It is entangled with many geometrical and mechanical difficulties. How these are to be solved, and what are the arguments *pro* and *contra*, I cannot undertake to explain in a short public lecture, with any hope of gaining your scientific conviction. I can therefore give only a short statement of this side of the question, representing my own opinions; but I must not conceal the fact, that several men of great scientific merit, principally among my own countrymen, do not yet agree with me.

The great fundamental problem which Faraday called up anew for discussion was the existence of forces working directly
279 at a distance without any intervening medium. During the last and the beginning of the present century, the model, after the likeness of which nearly all physical theories had been formed, was the force of gravitation acting between the sun, the planets, and their satellites. It is known with how much caution and even reluctance, Sir Isaac Newton himself proposed his grand hypothesis, which was destined to become the first great and imposing example of the power of true scientific method.

We need not wonder that Newton's successors attempted at first to gain the same success by introducing analogous assumptions into all the various branches of natural philosophy. Electrostatic and magnetic phenomena especially appeared as near relations to gravitation, because electric and magnetic attractions and repulsions, according to Coulomb's measurements, diminish in the same proportion as gravity with increasing distance.

But then came Oerstedt's discovery of the motions of magnets under the influence of electric currents. The force acting in these phenomena had a new and very singular character. It seemed as if this force would drive a single isolated pole of a magnet in a circle around the wire conducting the current, on and on, without end, never coming to rest. And although it is not possible really to separate one pole of a magnet from the other, Ampère succeeded in producing such continuous circular motions by making a part of the current itself moveable with the magnet.

This was the starting point for Faraday's researches on electricity. He saw that a motion of this kind could not be produced by any force of attraction or repulsion, working from point to point. The first motive which guided him seems to have been an instinctive foreboding of the law of conservation of energy, which many attentive observers of nature had entertained before it was brought by Joule to a precise scientific definition. If the current is able to increase the velocity of the magnet, the magnet must react on the current. So he made the experiment, and discovered induced currents. He traced them out through all the various conditions under which they ought to appear. He found that an electromotive force striving to produce these currents arises wherever and whenever magnetic force is generated or destroyed. He concluded that in a part of space traversed by magnetic force there ought to exist a peculiar state of tension, and that every change of this tension produces electromotive force. This unknown hypothetical state he called provisionally the electrotonic state, and be was occupied for years and years in finding out what this electrotonic state was. He first discovered in 1838 the dielec-

tric polarisation of electric insulators subject to electric forces. Such bodies, under the influence of electric forces, exhibit phenomena perfectly analogous to those observed in soft iron
280 under the influence of the magnetic force. Eleven years later, in 1849, he was able to demonstrate that all ponderable matter is magnetised under the influence of sufficiently intense magnetic force, and at the same time he discovered the phenomena of diamagnetism, which indicated that even space, devoid of all ponderable matter, is magnetisable. The most simple explanation of these phenomena, indeed, is, that diamagnetic bodies are less magnetisable than a vacuous space, or than the luminiferous ether filling that space. In this way real changes corresponding to that hypothetical electrotonic state were demonstrated, and now, with quite a wonderful sagacity and intellectual precision, Faraday performed in his brain the work of a great mathematician without using a single mathematical formula. He saw with his mind's eye that magnetised and dielectric bodies ought to have a tendency to contract in the direction of the lines of force, and to dilate in all directions perpendicular to the former, and that by these systems of tensions and pressures in the space which surrounds electrified bodies, magnets or wires conducting electric currents, all the phenomena of electro-static, magnetic, electro-magnetic attraction, repulsion, and induction could be explained, without recurring at all to forces acting directly at a distance. This was the part of his path where so few could follow him; perhaps a Clerk Maxwell, a second man of the same power and independence of intellect, was needed to reconstruct in the normal methods of science the great building, the plan of which Faraday had conceived in his mind, and attempted to make visible to his contemporaries.

Nobody can deny that this new theory of electricity and magnetism, originated by Faraday and developed by Maxwell, is in itself well consistent, in perfect and exact harmony with all the known facts of experience, and does not contradict any one of the general axioms of dynamics, which have been hitherto considered as the fundamental truths of all natural science, because they have been found valid, without any ex-

ception, in all known processes of nature. A confirmation of great importance was given to this theory by the circumstance demonstrated by Clerk Maxwell, that the qualities which it must attribute to the imponderable medium filling space are able to produce and sustain magnetic and electric oscillations, propagating like waves, and with a velocity exactly equal to that of light. Several parts even of the theory of light are deduced with less difficulty from this new theory than from the well-known undulatory theory of Huyghens, which ascribes to the luminiferous ether the qualities of a rigid elastic body.

Nevertheless, the adherents of direct action at a distance have not yet ceased to search for solutions of the electromagnetic problem. The moving forces exerted upon each other by two wires conducting galvanic currents had long ago been 281
reduced in a very ingenions way by Ampère, to attracting or repelling forces belonging to the linear elements of every current. The intensity of these forces is considered to depend not only on the distance of both parts of the current, but also in a rather complicated manner on the angles which the directions of the two currents make with each other and with the straight line joining them both. Ampère was not acquainted with induced currents, but the phenomena of these could be derived from the law of Ampère, connecting it with the general law, deduced by Faraday from his experiments, that the current induced by the motion of a magnet or of another current always resists this motion. The general mathematical expression of this law was established by Professor Neumann of Königsberg. It gave directly, not the value of the forces, but the value of their mechanical work, the value of what mathematicians call an electrodynamic potential, and it reduced electromagnetic phenomena to forces acting, not from point to point, but from one linear element of a current to another. Linear elements of a wire conducting a galvanic current are, of course, complicated structures compared with atoms. I have myself elaborated several mathematical papers to prove that this formula of Professor Neumann was in harmony with all the known phenomena exhibited by closed galvanic circuits,

and that it did not come into contradiction with the general axioms of mechanics in any case of electric motion. I succeeded in finding an experimental method of observing electrostatic effects of electromagnetic induction under conditions in which closed circuits could not be generated. This experiment decided against the supposition that Neumann's theory was complete so long as only the electric motions in metallic or fluid conductors were considered as active currents, but it was in accordance with the theory of Faraday and Maxwell, who supposed that from the extremities of conducting bodies, where an electric charge collects, electric motion is continued through the insulating media separating them.

Other eminent men have tried to reduce electromagnetic phenomena to forces acting directly between distant quantities of the hypothetical electric fluids, with an intensity which depends not only on the distance, but also on the velocities and accelerations of those electric quantities. Such theories have been proposed by Professor W. Weber, of Göttingen, by Riemann, the too early-deceased mathematician, and by Professor Clausius, of Bonn. All these theories explain very satisfactorily the phenomena of closed galvanic currents. But applied to other electric motions, they all come into contradiction with the general axioms of dynamics.

The hypothesis of Professor Weber makes the equilibrium of electricity unstable in any conductor of moderate dimen-
282 sions, and renders possible the development of infinite quantities of work from finite bodies. I do not find that the objections, brought forward at first by Sir W. Thomson and Professor Tait in their Treatise on Natural Philosophy, and discussed and specialised afterwards by myself, have been invalidated by the discussions going on about this question. The hypothesis of Riemann, which he did not himself publish during his lifetime, labours under the same objection, and is at the same time in contradiction to Newton's axiom, which established the equality of action and reaction for all natural forces.

The hypothesis of Professor Clausius avoids the first objection, but not the second, and the author himself has con-

ceded that this objection could be removed only by the assumption of a medium filling all space, between which and the electric fluids the forces acted.

The present development of science shows then, I think, a state of things very favourable to the hope that Faraday's fundamental conceptions may in the immediate future receive general assent. His theory, indeed, is the only one existing which is at the same time in perfect harmony with the facts as far as they are observed, and does not beyond the reach of facts lead into any contradiction to the general axioms of dynamics.

Clerk Maxwell himself has developed his theory only for closed conducting circuits. I have endeavoured during the last few years to investigate the results of this theory also for conductors not forming closed circuits. I can already say that the theory is in harmony with all the observations we have on the phenomena of open circuits: I mean (1) the oscillatory discharge of a condenser through a coil of wire, (2) my own experiments on electromagnetically induced charges of a rotating condenser, and (3) Mr. Rowland's observations on the electromagnetic effect of a rotatory disc charged with one kind of electricity.

The deciding assumption which removes the theoretical difficulties is that introduced by Faraday, who assumed that any electric motion in a conducting body which charges its surface with electricity is continued in the surrounding insulating medium as beginning or ending dielectric polarisation with an intensity equivalent to that of the current. A second inference from this supposition is, that the forces working at a distance do not exist, or are at least unimportant, when compared with the tensions and pressures of the dielectric medium.

It is not at all necessary to accept any definite opinion about the ultimate nature of the agent which we call electricity. Faraday himself avoided as much as possible giving any affirmative assertion regarding this problem, although he did not conceal his disinclination to believe in the existence
fo two opposite electric fluids. For our own discussion of the 283

electrochemical phenomena, to which we shall now turn, I beg permission to use the language of the old dualistic theory, which considers positive and negative electricity as two imponderable substances, because we shall have to speak principally on relations of quantity.

We shall try to imitate Faraday as well as we can by keeping carefully within the domain of phenomena, and, therefore, need not speculate about the real nature of that which we call a quantity of positive or negative electricity. Calling them substances of opposite sign, we imply with this name nothing else than the fact that a positive quantity never appears or vanishes without an equal negative quantity appearing or vanishing at the same time in the immediate neighbourhood. In this respect they behave really as if they were two substances, which cannot be either generated or destroyed, but which can be neutralised and become imperceptible by their union.

I see very well that this assumption of two imponderable fluids of opposite qualities is a rather complicated and artificial machinery, and that the mathematical language of Clerk Maxwell's theory expresses the laws of the phenomena very simply and very truly, with a much smaller amount of hypothetical implications; but I confess I should really be at a loss to explain without the use of mathematical formulae, what he considers as a quantity of electricity, and why such a quantity is constant, like that of a substance. The original old notion of substance is not at all identical with that of matter. It signifies, indeed, that which behind the changing phenomena lasts as invariable, which can be neither generated nor destroyed, and in this oldest sense of the word we may really call the two electricities substances.

I prefer the dualistic theory, because it expresses clearly the perfect symmetry between the positive and negative side of electric phenomena, and I keep the well known supposition that as much negative electricity enters where positive goes away, because we are not acquainted with any phenomena which could be interpreted as corresponding with an increase or a diminution of the total electricity contained in any body.

The unitary theory, which assumes the existence of only one imponderable electrical substance, and ascribes the effects of opposite kind to ponderable matter itself, affords a far less convenient basis for an electrochemical theory.

I now turn to the second fundamental problem aimed at by Faraday, the connection between electric and chemical force.

Already before Faraday went to work, an elaborate electrochemical theory had been established by the renowned Swedish chemist, Berzelius, which formed the connecting link of the great work of his life, the systematisation of the chemical knowledge of his time. His starting point was the series 284
in which Volta had arranged the metals according to the electric tension which they exhibit after contact with each other. Metals easily oxidised occupied the positive end of this series, those with small affinity for oxygen the negative end. Metals widely distant in the series develop stronger electric charges than those near to each other. A strong positive charge of one metal, and a strong negative of the other, must cause them to attract each other and to cling to each other. The same faculty of exciting each other electrically was ascribed by Berzelius to all the other elements; he arranged them all into a series, at the positive end of which he placed potassium, sodium, barium, calcium &c.; at the negative end oxygen, chlorine, bromine &c. Two atoms of different elements coming into contact are suposed to excite each other electrically, like the metals in Volta's experiment. Berzelius' conceptions about the distribution of opposite electricities in the molecules, and his deductions regarding the intensity of these forces, were not very clear, and not in harmony with the laws of electric forces which had already been developed by Green and Gauss. A fundamental point, which Faraday's experiment contradicted, was the supposition that the quantity of electricity collected in each atom was dependent on their mutual electrochemical differences, which Berzelius considered as the cause of their apparently greater chemical affinity.

His theory of the binary character of all chemical compounds was also connected with this electrochemical theory.

Two elements, as he supposed, one positive, the other negative, could unite to a compound of the first degree, a basic oxide or an acid; two such compounds into a compound of the second degree, a salt. But there was nothing to prevent one atom of every positive element from uniting as directly with two, three, or even seven of another negative element as with one. The same was assumed by Berzelius for negative elements. The modern experience of chemistry directly contradicts these statements. But although the fundamental conceptions of Berzelius' theory have been forsaken, chemists have not ceased to speak of positive and negative constituents of a compound body. Nobody can overlook that such a contrast of qualities as was expressed in Berzelius' theory really exists, well developed at the extremities, less evident in the middle terms of the series, and playing an important part in all chemical actions, although often subordinated to other influences.

When Faraday began to study the phenomena of decomposition by the galvanic current, which of course were considered by Berzelius as amongst the firmest supports of his theory, he put a very simple question, the first question, indeed, which every chemist speculating about electrolysis ought to have thought of. He asked, what is the quantity of electrolytic decomposition if the same quantity of electricity
255 is sent through several electrolytic cells. By this investigation
he discovered that most important law, generally known under his name, but called by him the law of definite electrolytic action.

When he began his experiments, neither Daniell's nor Grove's battery was known, and there were no means of producing currents of constant intensity; the methods of measuring this intensity were also in their infancy. This may excuse his predecessors. Faraday overcame this difficulty by sending the same current of electricity for the same time through a series of two or more electrolytic cells. He proved at first that the dimensions of the cell, and the size of the metallic plates through which the current entered and left the cell, had no visible influence upon the quantity oft he pro-

ducts of decomposition. Cells containing the same electrolytic fluid between plates of the same metals gave always the same quantity, after being traversed by the same current. Then he compared the amount of decomposition in cells containing different electrolytes, and he found it exactly proportional to the chemical equivalents of the elements, which were either separated or converted into new compounds.

Faraday concluded from his experiments that a definite quantity of electricity cannot pass a voltametric cell containing acidulated water between electrodes of platinum, without setting free at the negative electrode a corresponding definite amount of hydrogen, and at the positive electrode the equivalent quantity of oxygen, one atom of oxygen for every pair of atoms of hydrogen. If instead of hydrogen any other element capable of replacing hydrogen is separated from the electrolyte, this is done also in a quantity exactly equivalent to the quantity of hydrogen which would have been evolved by the same electric current. According to the modern chemical theory of quantivalence, therefore, the same quantity of electricity passing through an electrolyte either sets free, or transfers to other combinations, always the same number of units of affinity at both electrodes; for instance, instead

of $\left.\begin{matrix}H\\H\end{matrix}\right\}$, either $\left.\begin{matrix}K\\K\end{matrix}\right\}$, or $\left.\begin{matrix}Na\\Na\end{matrix}\right\}$, or $Ba\}$, or $Ca\}$, or $Zn\}$,

or $Cu\}$ from cupric salts,

or $\left.\begin{matrix}Cu\\Cu\end{matrix}\right\}$ from cuprous salts, &c.

The simple or compound halogens separating at the other electrodes, are equivalent of course to the quantity of the metallic element with which they were formerly combined.

According to Berzelius' theoretical views, the quantity of electricity collected at the point of union of two atoms ought to increase with the strength of their affinity. Faraday demonstrated by experiment, that so far as this electricity
came forth in electrolytic decomposition, its quantity did not 286
at all depend on the degree of affinity. This was really a fatal blow to Berzelius' theory.

Since that time our experimental methods and our know-

ledge of the laws of electrical phenomena have made enormous progress, and a great many obstacles have now been removed which entangled every one of Faraday's steps, and obliged him to fight with the confused ideas and ill-applied theoretical conceptions of some of his contemporaries. The original voltameter of Faraday, an instrument which measured the quantity of gases evolved by the decomposition of water, in order to determine with it the intensity of the galvanic current, has been replaced by the silver voltameter of Poggendorff, which permits of much more exact determinations by the quantity of silver deposited from a solution of silver nitrate on a strip of platinum. We have galvanometers which not only indicate that there is a galvanic current, but likewise measure its electromagnetic intensity very exactly and in a very short time, and do this as well for the highest as for the lowest degrees of intensity. We have electrometers, like the quadrant electrometer of Sir W. Thomson, able to measure differences of electric potential corresponding to less than one hundredth of a Daniell's cell. As for the frequently-used term of electric potential, a term introduced by Green, you may translate it as signifying the electric pressure to which the positive unit of electricity is subject at a certain place. We need not hesitate to say that the more experimental methods were refined, the more completely were confirmed the exactness and generality of Faraday's law.

In the beginning Berzelius and the adherents of Volta's original theory of galvanism, based on the effects of metallic contact, raised many objections against Faraday's law.

By the combination of Nobili's astatic pairs of magnetic needles with Schweigger's multiplier, a coil of copper wire with numerous circumvolutions, galvanometers became so delicate that they were able to indicate the electrochemical equivalent of currents so feeble as to be quite imperceptible by all chemical methods. With the newest galvanometers you can very well observe currents which would require to last a century before decomposing one milligram of water, the smallest quantity that is usually weighed on chemical balances. You see that if such a current lasts only some seconds or

some minutes, there is not the slightest hope of discovering its products of decomposition by chemical analysis. And even if it should last a long time, the minute quantities of hydrogen collected at the negative electrode may vanish, because they combine with the traces of atmospheric oxygen absorbed by the liquid. Under such conditions a feeble current may continue as long as you like without producing any visible trace of electrolysis, not even of galvanic polarisation, the
appearance of which can be used as an indication of previous 237
electrolysis. Galvanic polarisation, as you know, is an altered state of the metallic plates which have been used as electrodes during the decomposition of an electrolyte. Polarised electrodes, when connected by a galvanometer, give a current which they did not give before being polarised. By this current the plates are discharged again and returned to their original state of equality. The most probable explanation o this polarisation is that molecules of the electrolyte, charged with electricity, are carried by the current to the surface of the metal, itself charged with opposite electricity, and are retained there by electric attraction. That really constituent atoms of the electrolyte partake in the production of galvanic polarisation cannot well be doubted, because this state can be produced and also destroyed purely by chemical means. If hydrogen has been carried to an electrode by the current, contact with the atmospheric oxygen removes the state of polarisation.

The depolarising current is indeed a most delicate means of discovering previous decomposition. But even this may fail if the nascent polarisation is destroyed by an intervening chemical action, like that of the oxygen of the air. To avoid this, delicate experiments on this subject cannot be performed except in vessels carefully purified of all gases.

I have lately succeeded in doing this in a far more perfect way than before, by using the hermetically sealed cell (Fig. 3), which contains water acidulated with sulphuric acid.
Two platinum wires, *b* and *c*, and a third platinum wire, *a*, 238
which in the interior is connected with a spiral of palladium, can be used as electrodes. The tube, before it had been closed,

had been connected with an air-water-pump, and at the same time oxygen was evolved from *b* and *c* by two Grove's elements; the hydrogen carried to the palladium wire, *a*, was occluded in the metal. In this way the liquid in the tube is washed out with oxygen under low pressure and freed from all other gases. After the closing of the tube, the remaining small traces of electrolytic oxygen combine slowly with the hydrogen of the palladium. Traces of hydrogen occluded in the

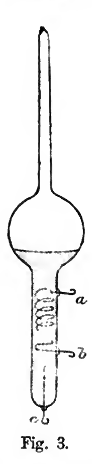


Fig. 3.

platinum wires *b* and *c* can be transferred by a feeble electromotive force into the palladium; and even new quantities of electrolytic gases, evolved after closing the tube, can be removed again by a Daniell's cell, which carries hydrogen to the palladium, where it is occluded, and oxygen to *b* and *c*, where it combines with hydrogen, as long as traces of this gas are dissolved in the liquid. The rest of the oxygen absorbed by the liquid combines with the occluded hydrogen.

I have ascertained with this apparatus that under favourable conditions one can observe the polarisation produced

during a few seconds by a current which would decompose only one milligram of water in a century.

But even if the appearance of galvanic polarisation should not be acknowledged by opponents as a sufficient indication of previous decomposition, it is not difficult at present to reduce the indications of a good galvanometer to absolute measure, and to calculate the amount of decomposition which ought to be expected according to Faraday's law, and to verify that in all the cases in which no products of electrolysis can be discovered, their amout is too small for chemical analysis.

Products of decomposition cannot appear at the electrodes without the occurrence of motions of the constituent molecules of the electrolyte throughout the whole length of the liquid. On this point the majority of Faraday's predecessors were already agreed, but they differed from each other as soon as they came to the question what those motions were. Faraday saw very clearly the importance of this problem, and again appealed to experiment. He filled two cells with an electrolytic fluid, connecting them by a thread of asbestos wetted with the same fluid, in order to determine separately the quantity of all the chemical constituents transferred to the one and the other extremity of the electrolytic conductor. You know that he proposed for these atoms or groups of atoms transported by the current through the fluid the Greek word „Ions", the „Travellers"; and comparing the current of positive electricity with a stream of water, he called „Kations" those atoms which went down the stream in the same direc- 289
tion with the positive electricity to the kathode, the metallic plate through which this electricity left the fluid. The „anions", on the contrary, go up the stream to the anode, the metal plate which is the source of the current of $+ E$. Kations generally are atoms which are substitutes of hydrogen; anions are halogens.

This subject has been studied very carefully and for a great number of liquids, by Professor Hittorff, of Münster, and Professor G. Wiedemann of Leipsic. They found that generally the velocity of the kation and the anion is different.

Professor F. Kohlrausch, of Würzburg, has brought to light the very important fact that in diluted solutions of salts, including hydrates of acids and hydrates of caustic alkalis, every ion under the influence of currents of the same density moves on with its own peculiar velocity, independently of other ions moving at the same time in the same or in opposite directions.

Among the kations hydrogen has the greatest velocity, then follow potassium, ammonium, silver, sodium, afterwards the bivalent atoms of barium, copper, strontium, calcium, magnesium, zinc; near to the latter appears univalent lithium. Among the anions hydroxyl (OH) is the first, then follow the other univalent atoms iodine, bromine, cyanogen, chlorine, the compounds NO_3, $Cl O_3$, the bivalent halogens of sulphuric and carbonic acid; after these fluorine and the halogen of acetic acid $(C_2 H_3 O_2)$. The only exception to this rule is the difference observed between the deçomposition of univalent and bivalent compounds. Generally the velocity of any ion when separated from a bivalent mate is less than when separated from one or two univalent mates.

It seems possible that the majority of molecules $SO_4 H_2$ may be divided electrolytically into SO_4 and H_2, some of them on the other hand into $SO_4 H$ and H. By the latter some hydrogen would be carried backwards, and therefore the velocity of the total amount might appear diminished.

If both ions are moving, we shall find liberated at each electrode (1) that part of the corresponding ion which has been newly carried to that side: (2) another part which has been left by the opposite ion, with which it had been formerly combined. The total amount of chemical motion in every section of the fluid is, therefore, represented by the sum of the equivalents of the kation gone forwards, and of the anion gone baçkwards, in the same way as in the dualistic theory of electricity the total amount of electricity flowing through a section of the conduçtor corresponds to the sum of positive electricity going forwards and of negative electricity going backwards.

This established, Faraday's law tells us that through each

section of an electrolytic conductor we have always equivalent electrical and chemical motion. The same definite quantity of either positive or negative electricity moves always with 290
each univalent ion, or with every unit of affinity of a multivalent ion, and accompanies it during all its motions through the interior of the electrolytic fluid. This quantity we may call the electric charge of the atom.

I beg to remark that hitherto we have spoken only of phenomena. The motion of electricity can be observed and measured. Independently of this, the motion of the chemical constituents can also be measured. Equivalents of chemical elements and equivalent quantities of electricity are numbers which express real relations of natural objects and actions. That the equivalent relation of chemical elements depends on the pre-existence of atoms may be hypothetical; but we have not yet any theory sufficiently developed which can explain all the facts of chemistry as simply and as consistently as the atomic theory developed in modern chemistry.

Now the most startling result of Faraday's law is perhaps this. If we accept the hypothesis that the elementary substances are composed of atoms, we cannot avoid concluding that electricity also, positive as well as negative, is divided into definite elementary portions, which behave like atoms of electricity. As long as it moves about in the electrolytic liquid, each ion remains united with its electric equivalent or equivalents. At the surface of the electrodes decomposition can take place if there is sufficient electromotive force, and then the ions give off their electric charges and become electrically neutral.

The same atom can be charged in different compounds with equivalents of positive or of negative electricity. Faraday pointed out sulphur as being an element which can act either as anion or as kation. It is anion in sulphide of silver, a kation perhaps in strong sulphuric acid. Afterwards he suspected that the deposition of sulphur from sulphuric acid might be a secondary result. The kation may be hydrogen, which combines with the oxygen of the acid, and drives out the sulphur. But if this is the case, hydrogen recombined with oxygen to

form water must retain its positive charge, and it is the sulphur, which in our case must give off positive equivalents to the kathode. Therefore this sulphur of sulphuric acid must be charged with positive equivalents of electricity. The same may be applied to a great many other instances. Any atom or group of atoms which can be substituted by secondary decomposition for an ion must be capable of giving off the corresponding equivalent of electricity.

When the positively charged atoms of hydrogen or any other kation are liberated from their combination and evolved as gas, the gas becomes electrically neutral; that is, according to the language of the dualistic theory, it contains equal quantities of positive and negative electricity; either every single atom is electrically neutralised, or one atom, remaining posi-
291 tive, combines with another charged negatively. This latter assumption agrees with the inference from Avogadro's law, that the molecule of free hydrogen is really composed of two atoms.

Now arises the question: Are all these relations between electricity and chemical combination limited to that class of bodies which we know as electrolytes. In order to produce a current of sufficient strength to collect enough of the products of decomposition without producing too much heat in the electrolyte, the substance which we try to decompose ought not to offer too much resistance to the current. But this resistance may be very great, and the motion of the ions may be very slow, so slow indeed that we should need to allow it to go on for hundreds of years before we should be able to collect even traces of the products of decomposition; nevertheless all the essential attributes of the process of electrolysis could subsist. In fact we find the most various degrees of conducting power in various liquids. For a great number of them, down to distilled water and pure alcohol, we can observe the passage of the current with a sensitive galvanometer. But if we turn to oil of turpentine, benzene, and similar substances, the galvanometer becomes silent. Nevertheless these fluids also are not without a certain degree of conducting power. If you connect an electrified conductor with one of

the electrodes of a cell filled with oil of turpentine, the other with the earth, you will find that the electricity of the conductor is discharged unmistakably more rapidly through the oil of turpentine than if you take it away and fill the cell only with air.

We may in this case also observe polarisation of the electrodes as a symptom of previous electrolysis. Connect the two pieces of platinum in oil of turpentine with a battery of eight Daniells, let it stay 24 hours, then take away the battery, and connect the electrodes with a quadrant electrometer; it will indicate that the two surfaces of platinum, which were homogeneous before, produce an electromotive force which deflects the needle of the electrometer. The electromotive force of this polarisation has been determined in some instances by Mr. Picker in the Laboratory of the University of Berlin; he has found that the polarisation of alcohol decreases with the proportion of water which it contains, and that that of the purest alcohol, ether, and oil of turpentine, is about 0·3, that of benzene 0·8 of a Daniell's element.

Another sign of electrolytic conduction is, that liquids placed between two different metals produce an electromotive force. This is never done by metals of equal temperature, or by other conductors which, like metals, let electricity pass without being decomposed. The production of an electromotive force is observed even with a great many rigid bodies, although very few of them allow us to observe electrolytic conduction with the galvanometer, and even these only at tem- 292
peratures near their melting points. I remind you of the galvanic pile of Zamboni, in which pieces of dry paper are intercalated between thin leaves of metal. If the connection lasts long enough, even glass, resin, shellac, paraffin, sulphur—the best insulators we known—do the same. It is nearly impossible to prevent the quadrants of a delicate electrometer from being charged by the insulating bodies by which they are supported.

In all the cases which I have quoted, one might suspect that traces of humidity absorbed by the substance or adhering to their surface were the electrolytes. I show you, therefore,

this little Daniell's cell, Fig. 4, constructed by my former assistant, Dr. Giese, in which a solution of sulphate of copper with a platinum wire, *a*, as an electrode, is enclosed in a bulb of glass hermetically sealed. This is surrounded by a second cavity, sealed in the same way, which contains a solution of zinc sulphate and some amalgam of zinc, to which a second

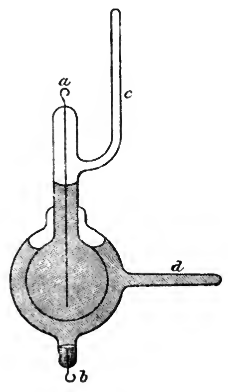


Fig. 4.

platinum wire, *b*, enters through the glass. The tubes *c* and *d* have served to introduce the liquids, and have been sealed afterwards. It is, therefore, like a Daniell's cell, in which the porous septum has been replaced by a thin stratum of glass. Externally all is symmetrical at the two poles; there is nothing in contact with the air but a closed surface of glass, through which two wires of platinum penetrate. The whole
293 charges the electrometer exactly like a Daniell's cell of very great resistance, and this it would not do if the septum of glass did not behave like an electrolyte: for a metallic conductor would completely destroy the action of the cell by its polarisation.

All these facts show that electrolytic conduction is not at all limited to solutions of acids or salts. It will, however, be rather a difficult problem to find out how far the electrolytic conduction is extended, and I am not yet prepared to give a positive answer. What I intended to remind you of was only that the faculty to be decomposed by electric motion is not necessarily connected with a small resistance to the current. It is easier for us to study the cases of small resistance, but the illustration which they give us about the connection of electric and chemical force is not at all limited to the acid and saline solutions usually employed.

Hitherto we have studied the motions of ponderable matter as well as of electricity, going on in an electrolyte. Let us now study the forces which are able to produce these motions. It has always appeared somewhat startling to everybody who knows the mighty power of chemical forces, and the enormous quantity of heat and mechanical work which they are able to produce, how exceedingly small is the electric attraction at the poles of a battery of two Daniell's cells, which nevertheless is able to decompose water. 1 gram of water, produced by burning hydrogen with oxygen, develops so much heat, that this heat transformed by a steam engine into mechanical work would raise the same weight to a height of 1,600,000 metres. And on the contrary we require to use the most delicate contrivances to show that a gold leaf or a little piece of aluminium hanging on a silk fibre can be at all moved by the electric attraction of the battery. The solution of this riddle is found if we look at the quantities of electricity with which the atoms appear to be charged.

The quantity of electricity which can be conveyed by a very small quantity of hydrogen, when measured by its electrostatic forces, is exceedingly great. Faraday saw this, and endeavoured in various ways to give at least an approximate determination. He ascertained that even the most powerful batteries of Leyden jars, discharged through a voltameter, give scarcely any visible traces of gases. At present we can give definite numbers. The electrochemical equivalent of the electromagnetic unit of the galvanic current has been deter-

mined by Bunsen, and more recently by other physicists. This determination was followed by the very difficult comparison of the electromagnetic and electrostatic effects of electricity, accomplished at first by Professor W. Weber, and afterwards under the auspices of the British Association by Professor
294 Clerk Maxwell.[1]) The result is, that the electricity of 1 mgrm. of water, separated and communicated to two balls, 1 kilom. distant, would produce an attraction between them equal to the weight of 26,800 kilogr. [Added 1884 to the German translation: The amount of electricity, contained in 1 mgr. of water, would be twice as much, and the attraction of both quanta 4 times as much i. e. equal to the weight of 102180 kgr.]

As I have already remarked, the law that the intensity of the force is inversely proportional to the square of the distance, and directly proportional to the quantities of attrac-

---

[1]) According to the latest and most careful measurements of the electrochemical effect performed by Professor Kohlrausch junr., the electromagnetic unit of the galvanic current, as it was defined by W. Weber (= 0·1 of the British Association unit), decomposes 0·009476 mgrm. of water per second. This same unit-current of Weber transfers about 300×10^9 electrostatic units of electricity (Weber himself gave 311×10^9, Maxwell 288×10^9) through each section of the circuit per second, half of them being positive, half of them negative, the two halves going in opposite directions. The electrostatic unit introduced by Gauss and W. Weber is that quantity of electricity which repels the same quantity at the distance of one millimeter with unit force, that is, with a force which, acting during one second upon one milligram, transmits to it a velocity of one millimeter per second. Gravity acting upon one milligram produces an acceleration 9,809 times as great. Weber's unit force, therefore, is equal to $1/_{9809}$ of the weight of one milligram.

The force, F, measured by weight, with which the electric quantity, $+E$, measured in electrostatic units, attracts the opposite quantity $-E$, at a distance r is equal to

$$F = \frac{E^2}{r^2} \cdot \frac{1}{9809} \text{ mgrm.}$$

If E is the quantity carried to each electrode during the decomposition of one milligram of water, it is according to the determinations quoted before $= 1618 \times 10^{10}$ units, and if we put $r = 1$ kilometer $= 1{,}000{,}000$ millimeters, we get the result quoted above.

ting and of attracted mass, holds good as well in the case of gravitation as in that of electric attraction and repulsion. We may, therefore, compare the gravitation acting between two quantities of hydrogen and oxygen with the attraction of their electric charges. The result will be independent of the size and the distance of these quantities. We find that the electric force is as great as the gravitation of ponderable masses, being 71,000 billion times greater than that of the oxygen and hydrogen[1]) containing these electric charges.

---

[1]) The gravity of a weight m is the force of attraction between it and the mass of the earth, which may be considered as concentrated in the central point of the earth. If h is the mean density of the earth, and r its radius, the mass of the earth will be

$$\frac{4\pi}{3} r^3 . h.$$

If G is the force of attraction between two units of mass at unit of distance, the attraction of the mass m by the earth will be

$$gm = \frac{4\pi}{3} r h . G m.$$

Take

$$\frac{\pi}{2} r = 10^7 \text{ meters} = 10^{10} \text{ mm.}$$

$$h = 5{\cdot}62 \text{ mgrms. per cub. mm.,}$$

the attraction between $^8/_9$ mgrm. of oxygen and $^1/_9$ mgrm. of hydrogen contained in 1 mgrm. of water, and separated by a distance of 1 mm. will be

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot G = \frac{g}{27 \times 5,62 \times 10^{10}},$$

or equal to the weight of

$$\frac{65904}{10^{17}} \text{ mgrm.}$$

The attraction of the electric charges, which has been calculated before for a distance of 1 kilometer, reduced to that of 1 mm., will be equal to the weight of

$$20800 \times 10^{18} \text{ mgrms.}$$

From this it follows that the attraction by gravitation of those two masses would become equal to the attraction of their electric charges, if each of the masses could be increased 71,300 billions of times. [Calculated for the double quantity of $\pm$ Electricity, which according to the dualistic theory is contained in 1 mgr. of water, this gives again four times as great a force (1884)].

295 The total force exerted by the attraction of an electrified body upon another charged with opposite electricity is always proportional to the quantity of electricity contained on the attracting as on the attracted body.

Although, therefore, the attracting forces exerted by the poles of a little battery able to decompose water on such electric charges as we can produce with our electric machines, are very moderate, the forces exerted by the same little apparatus on the enormous charges of the atoms in one milligram of water may very well compete with the mightiest chemical affinity.

If we now turn to investigate how the motions of the ponderable molecules are dependent upon the action of these forces, we must distinguish two different cases. At first we may ask what forces are wanted to call forth motions of the ions with their charge through the interior of the fluid; secondly, what are wanted to separate the ion from the fluid and its previous combinations?

Let us begin with the case in which the conducting liquid is surrounded everywhere by insulating bodies. Then no electricity can enter, none can go out through its surface, but positive electricity can be driven to one side, negative to the other, by the attracting and repelling forces of external electrified bodies. This process going on as well in every metallic conductor is called „electrostatic induction". Liquid conductors behave quite like metals under these conditions. Great quantities of electricities are collected, if large parts of the surfaces of the two bodies are very near to each other. Such an arrangement is called an electric condenser. We can arrange electric condensers in which one of the surfaces is that of a liquid, as Messrs. Ayrton and Perry have done lately. The water-dropping collector of electricity, invented by Sir W. Thomson, is a peculiar form of such a condenser, which can be charged with perfect regularity by the slightest electromotive force perceptible only to the most sensitive electro-
296 meters. Professor Wüllner has proved that even our best insulators, exposed to electric forces for a long time, are ultimately charged quite in the same way as metals would be charged

in an instant. There can be no doubt that even electromotive forces less than $^1/_{100}$ Daniell produce perfect electrical equilibrium in the interior of an electrolytic liquid.

Another somewhat modified instance of the same effect is afforded by a voltametric cell containing two electrodes of platinum, which are connected with a Daniell's cell the electromotive force of which is insufficient to decompose the electrolyte. Under this condition the ions carried to the electrodes cannot give off their electric charges. The whole apparatus behaves, as was first accentuated by Sir W. Thomson, like a condenser of enormous capacity. The quantity of electricity, indeed, collected in a condenser under the same electromotive force is inversely proportional to the distance of the plates. If this is diminished to $^1/_{100}$, the condenser takes in 100 times as much electricity as before. Now, bringing the two surfaces of platinum and of the liquid into immediate contact, we reduce their interval to molecular distances. The capacity of such a condenser has been measured by Messrs. Varley, Kohlrausch and Colley. I have myself made some determinations which show that oxygen absorbed in the fluid is of great influence on the apparent value. By removing all traces of gas I have got a value a little smaller than that of Kohlrausch, which shows that if we divide equally the total value of the polarisation between two platinum plates of equal size, the distance between the two strata of positive and negative electricity, the one lying on the last molecules of the metal, the other on those of the fluid, ought to be a ten millionth part (Kohlrausch $^1/_{15000000}$) of a millimeter. We always come nearly to the same limit, when we calculate the distances through which molecular forces are able to act, as already shown in several other instances by Sir W. Thomson.

Owing to the enormous capacity of such an electrolytic condenser, the quantity of electricity which enters into it, if it is charged even by a feeble electromotive force, is sufficiently great to be indicated easily by a galvanometer. What I now call charging the condenser, I have before called polarising the metallic plate. Both, indeed, are the same process,

because electric motion is always accompanied in the electrolytes by chemical decomposition.

Observing the polarising and depolarising currents in a cell like that represented in Fig. 3, we can observe these phenomena with the most feeble electromotive forces of $^1/_{1000}$ Daniell, and I found that down to this limit the quantity of electricity entering into the condenser was proportional to the electromotive force by which it was collected. By taking larger surfaces of platinum, I suppose it will be possible to reach a limit much lower than that. If any chemical force
297 existed besides that of the electrical charges which could bind all the pairs of opposite ions together, and required any amount of work to be vanquished, an inferior limit ought to exist to such electromotive forces as are able to attract the ions to the electrodes, and to charge these as condensers. No phenomenon indicating such a limit has as yet been discovered, and we must, therefore, conclude that no other force resists the motions of the ions through the interior of the liquid than the mutual attractions of their electric charges. These are able to prevent the atoms of the same kind which repel each other from collecting at one place, and atoms of the other kind attracted by the former from collecting at any other part of the fluid, as long as no external electric force favours such distribution. The electric attraction, therefore, is able to produce an equal distribution of the opposite constituent atoms throughout the liquid, so that all parts of it are neutralised electrically as well as chemically.

On the contrary, as soon as an ion is to be separated from its electrical charge, we find that the electrical forces of the battery meet with a powerful resistance, the overpowering of which requires a good deal of work to be done. Usually the ions, losing their electric charges, are at the same time separated from the liquid; some of them are evolved as gases, others are deposited as rigid strata on the surface of the electrodes, like galvanoplastic copper. But the union of two constituents having powerful affinity to form a chemical compound, always produces, as you know very well, a great amount of heat, and heat is equivalent to work. On the con-

trary, decomposition of the compound substance requires work, because it restores the energy of the chemical forces which has been spent by the act of combination. Oxygen and hydrogen separated from each other contain a store of energy, for on burning the hydrogen in the oxygen they unite, form water, and develop a great amount of heat. In the water the two elements are contained, and their chemical attraction continues to work as before, keeps them firmly united, but can no more produce any change, any positive action. We must reduce the combined elements into their first state, we must separate them, applying a force which is capable of vanquishing their affinity before they are ready to renew their first activity. The amount of heat produced by the chemical combination is the equivalent of the work done by the chemical forces brought into action. It requires the same amount of work to separate the compound and to restore hydrogen and oxygen uncombined. I have already given the value of this amount calculated as a weight raised against the force of gravity.

Metals uniting with oxygen or halogens produce heat in the same way, some of them, like potassium, sodium, and zinc, even more than an equivalent quantity of hydrogen; less oxidisable metals, like copper, silver and platinum, less. We 298
find, therefore, that heat is generated when zinc drives copper out of its combination with the compound halogen of sulphuric acid, as is the case in a Daniell's cell.

If a galvanic current passes through any conductor, a metallic wire, or an electrolytic fluid, it evolves heat. Dr. Joule was the first who proved experimentally that if no other work is done by the current, the total amount of heat evolved in a galvanic circuit during a certain time is exactly equal to that which ought to have been generated by the chemical actions which have been performed during that time. But this heat is not evolved at the surface of the electrodes where these chemical actions take place, but is evolved in all the parts of the circuit, proportionally to the galvanic resistance of every part. From this it is evident that the heat evolved is an immediate effect, not of the chemical action, but of the galvanic current, and that the chemical work

of the battery has been spent to produce only the electric action.

To keep up an electric current through an electric conductor, indeed, requires work to be done. New stores of positive electricity must be continually introduced at the positive end of the conductor, the repulsive force acting upon them having to be overcome; negative electricity, in the same way, into the negative end. This can be done by mere mechanical force, with an electric machine working by friction, or by electrostatic or by electromagnetic induction. In a galvanic current it is done by chemical force, but the work required remains the same.

If we apply Faraday's law, a definite amount of electricity passing through the circuit corresponds with a definite amount of chemical decomposition going on in every electrolytic cell of the same circuit. According to the theory of electricity, the work done by such a definite quantity of electricity which passes, producing a current, is proportionate to the electromotive force acting between both ends of the conductor. You see, therefore, that the electromotive force of a galvanic circuit must be, and is indeed, proportional to the heat generated by the sum of all the chemical actions going on in all the electrolytic cells during the passage of the same quantity of electricity. In the cells of the galvanic battery chemical forces are brought into action able to produce work; in cells in which decomposition is occurring, work must be done against opposing chemical forces; the rest of the work done appears as heat evolved by the current, as far as it is not used up to produce motions of magnets or other equivalents of work.

You see the law of the conservation of energy requires that the electromotive force of every cell must correspond exactly with the total amount of chemical forces brought into play, not only the mutual affinities of the ions, but also those
299 minor molecular attractions produced by the water and other constituents of the fluid. These minor attractions have lately formed the subject of most valuable and extended calorimetric researches by Messrs. Andrews, Thomsen, and Berthelot. But

even influences too minute to be measured by calorimetric methods may be discovered by measuring the electromotive force. I have myself deduced from the mechanical theory of heat the influence which the quantity of water contained in a solution of metallic salts has on the electromotive force. The chemical attraction between salt and water can be measured in this instance by the diminution of the tension of the aqueous vapours over the liquid, and the results of the theoretical deduction have been confirmed in a very satisfactory manner by the observations of Dr. James Moser.

Hitherto we have supposed that the ion with its electric charge is separated from the fluid. But the ponderable atoms can give off their electricity to the electrode, and remain in the liquid, being now electrically neutral. This makes scarcely any difference in the value of the electromotive force. For instance, if chlorine is separated at the anode, it will at first remain absorbed by the liquid; if the solution becomes saturated, or if we make a vacuum over the liquid, the gas will rise in bubbles. The electromotive force remains unaltered. The same may be observed with all the other gases. You see in this case that the change of electrically negative chlorine into neutral chlorine is the process which requires so great an amount of work, even if the ponderable matter of the atoms remains where it was.

On the contrary, if the electric attraction does not suffice to deprive the ions collecting at the surface of the electrodes of their electric charge, you will find the kation attracted and retained by the kathode, the anion by the anode, with a force far too great to be overpowered by the expansive force of gases. You may make a vacuum as perfect as you like over a kathode polarised with hydrogen, or an anode polarised with oxygen; you will not obtain the smallest bubble of gas. Increase the electric potential of the electrodes, so that the electric force becomes powerful enough to draw the electric charge of the ions over to the electrode: the ions will be liberated and free to leave the electrode, passing into the gaseous state or spreading in the liquid by diffusion. One cannot assume, therefore, that their ponderable matter is attracted by

the electrode; if this were the case, this attraction ought to last after discharge as before. We must conclude, therefore, that the ions are drawn to the electrode only because they are charged electrically.

The more the surface of the positive electrode is covered with negative atoms of the anion, and the negative with the positive ones of the kation, the more is the attracting force of the electrodes exerted upon the ions of the liquid diminished
300 by this second stratum of opposite electricity covering them. On the contrary, the force with which the positive electricity of an atom of hydrogen situated at the surface of the electrode itself is attracted towards the negatively charged metal increases in proportion as more negative electricity collects before it on the metal, and more ions of hydrogen behind it in the fluid.

The electrical force acting on equal quantities of electricity situated at the inside of one of the electric strata of a condenser is proportional to the electromotive force which has charged the condenser, and inversely proportional to the distance of the charged surfaces. If these are $^1/_{100}$ mm. apart, it is 100 times as great as if they are one millimeter apart. If we come, therefore, to molecular distances, like those calculated from the measurement of the capacity of polarised electrodes, the force is ten million times as great, and becomes able, even with a moderate electromotive force, to compete with the powerful chemical forces which combine every atom with its electric charge, and hold the atoms bound to the liquid.

Such is the mechanism by which electric force is concentrated at the surface of the electrodes and increased in its intensity to such a degree that it becomes able to overpower the mightiest chemical affinities we know of. If this can be done by a polarised surface, acting like a condenser charged by a very moderate electromotive force, can the attractions between the enormous electric charges of anions and kations be an unimportant and indifferent part of chemical affinity?

In a decomposing cell the ions resist external forces striving to separate them from their electric charges. Let the current go in the opposite direction, and you will have an opposite effect. In a Daniell's cell neutral zinc enters as kation

into the electrolyte, taking with it only positive electricity, and leaving its negative electricity to the metallic plate. At the copper electrode positive copper separates from the electrolyte and is neutralised, giving off its charge to the electrode. But the Daniell's cell in which this goes on does work, as we have seen. We must conclude, therefore, that an equivalent of positive electricity, on charging an atom of zinc, does more work than the same equivalent does on charging an atom of copper.

You see, therefore, if we use the language of the dualistic theory and treat positive and negative electricities as two substances, the phenomena are the same as if equivalents of positive and negative electricity were attracted by different atoms, and perhaps also by the different values of affinity belonging to the same atom with different force. Potassium, sodium, zinc, must have strong attraction to a positive charge; oxygen, chlorine, bromine to a negative charge.

Do we perceive effects of such an attraction in other cases? Here we come to the much discussed question of Volta's assumption that electricity is produced by contact of two metals.
About the fact there can be no doubt. If we produce metallic 301
contact between a piece of copper and a piece of zinc, opposed to each other like the two plates of a condenser, and carried by insulating rods of shell-lac we find that after contact the zinc is charged positively, the copper negatively. This is just the effect we ought to expect if zinc has a higher attracting force to positive electricity, this force working only trough molecular distances. I have proposed this explanation of Volta's experiments in my little pamphlet on the "Conservation of Energy," published in 1847. All the facts observed with different combinations of metallic conductors are perfectly in harmony with it. Volta's law of the series of tension comprising all metallic conductors is easily deduced from it. If only metals come into play, their galvanic attractions produce instantaneously a state of electric equilibrium, so that no lasting current can occur. Electrolytic conductors, on the contrary, are decomposed chemically by every motion of electricity through their surface. Electric equilibrium, therefore, will not be possible before this decomposition has been finished, and till that stage is reached,

the electric motion must continue. This point has been accentuated already by Faraday, as the essential difference between the two classes of conductors.

The original theory of Volta was incomplete in an essential point, because he was not acquainted with the fact of electrolytic decomposition. His original conception of the force of contact is, therefore, in contradiction to the law of Conservation of Energy; and even before this law was established and enunciated with scientific precision, there were many chemists and physicists, amongst them Faraday, who had the right instinct that this could not be the true explanation. The opponents of Volta's opinions tried to give chemical explanations also of those experiments of his, which were carried out exclusively with metalic conductors. They might be oxidised by the oxygen of the air, and the amount of oxidation required for a very slight electric charge was so infinitesimal, that no chemical analysis could ever discover it; so small, that even in the highest vacuum, and in the purest specimens of hydrogen or nitrogen with which we might surround the plates, there was oxygen enough to continue the effect for years. From this point of view the chemical theory cannot be refuted. On the contrary, the so-called chemical theory of Volta's fundamental experiments was rather indefinite; it scarcely did more than tell us: here is the possibility of a chemical process, here electricity can be produced. But which kind, how much, to which potential, remained indefinite. I have not found in all the papers which have been written for the defence of the chemical theory, a clear explanation why zinc opposed to copper in liquids, where zinc really is oxidized and dissolved, becomes negative, and why in air and
302 other gases it becomes positive, if the same cause, namely oxidation, is at work. The hypothesis, on the contrary, of a different degree of affinity between the metals and the two electricities, gives a perfectly definite answer. I do not see why an actual chemical process should be wanted to charge the zinc and copper on contact. But you see that the forces, which according to their hypothesis produce the electric effect, are the same as those which must be considered as the cause of a main part of all chemical actions.

Again, the electric charges produced by contact of zinc and copper are very feeble. They have become measurable only with the help of the latest improvements introduced into the construction of electrometers by Sir W. Thomson; but the cause of their feeble intensity is evident. If you bring into narrow contact two plain and well-polished plates of zinc and copper, the quantity of electricity collected at both sides of their common surface is probably very great; but you cannot observe it before having separated the plates. Now it is impossible to separate them at the same instant over the whole extent of their surface. The charge which they retain will correspond with the inclined position which they have at the moment when the last point of contact is broken; then all the other parts of the surfaces are already at a distance from each other infinitely greater than molecular distance, and conduction in metals always establishes nearly instantaneously the electric equilibrium corresponding to the actual situation. If you wish to avoid this discharge during the separation of the plates, one of them must be insulated; then indeed we get a far more striking series of phenomena, those belonging to electricity of friction. Friction, probably, is only the means of producing a very close contact between the two bodies. If the surfaces are very clean and free from air, as for instance in a Geissler's tube, the slightest rolling contact is sufficient to develop the electric charge. I can show you two such tubes exhausted so far that very high electric tension is necessary to make the vacuum luminous, one containing a small quantity of mercury, the other the fluid compound of potassium and sodium. In the first the negative metal is intensely negative relatively to glass, in the second the metal is on the positive extremity of Volta's series; the glass proves to be more positive also in this case, but the difference is much smaller than with mercury, and the charge is feeble.

Faraday very often recurs to this to express his conviction that the forces termed chemical affinity and electricity are one and the same. I have endeavoured to give you a survey of the facts connected with the question, and to avoid as far as possible the introduction of hypotheses, except the atomic theory of modern chemistry. I think the facts leave no doubt that the

very mightiest among the chemical forces are of electric origin. The atoms cling to their electric charges, and opposite electric
303 charges cling to each other; but I do not suppose that other molecular forces are excluded, working directly from atom to atom. Several of our leading chemists have lately begun to distinguish two classes of compounds, viz., molecular aggregates and typical compounds, the latter being united by atomic affinities, the former not.

Electrolytes belong to the latter class. If we conclude from the facts that every unit of affinity is charged with one equivalent either of positive or of negative electricity, they can form compounds, being electrically neutral only if every unit charged positively unites under the influence of a mighty electric attraction with another unit charged negatively. You see that this ought to produce compounds in which every unit of affinity of every atom is connected with one and only one other unit of another atom. This, as you will see immediately, is the modern chemical theory of quantivalence, comprising all the saturated compounds. The fact that even elementary substances, with few exceptions, have molecules composed of two atoms, makes it probable that even in these cases electric neutralisation is produced by the combination of two atoms, each charged with its full electric equivalent, not by neutralisation of every single unit of affinity.

Unsaturated compounds with an even number of unconnected units of affinity offer no objection to such an hypothesis; they may be charged with equal equivalents of opposite electricity. Unsaturated compounds with one unconnected unit, existing only at high temperatures, may be explained as dissociated by intense molecular motion of heat in spite of their electric attractions. But there remains one single instance of a compound which, according to the law of Avogadro, must be considered as unsaturated even at the lowest temperature, namely, nitric oxide (NO), a substance offering several very uncommon peculiarities, the behaviour of which will be perhaps explained by future researches.

But I abstain from entering into further specialities; perhaps I have already gone too far. I would not have dared to

do it, had I not felt myself sheltered by the authority of that great man who was guided by a never-erring instinct of truth. I thought that the best I could do for his memory was to recall to the minds of the men by whose energy and intelligence chemistry has undergone its modern astonishing development, what important treasures of knowledge lie still hidden in the works of that wonderful genius. I am not sufficiently acquainted with chemistry to be confident that I have given the right interpretation, the interpretation which Faraday himself would have given, if he had been acquainted with the law of chemical quantivalence. Without the knowledge of this law I do not see how a consistent and comprehensive electrochemical theory could be established. Faraday did not try to develop a complete theory of this kind. It is as characteristic of a man of high intellect to see where to avoid going further in his theoretical 304
speculations for want of facts, as to see how to proceed when he finds the way open. We ought therefore to admire Faraday also in his cautious reticence, although now, standing on his shoulders, and assisted by the wonderful development of organic chemistry, we are able, perhaps, to see farther than he did. I shall consider my work of to-day well rewarded if I have succeeded in kindling anew the interest of chemists in the electrochemical part of their science.

CXII.

On Galvanic Currents passing through a very Thin Stratum of an Electrolyte.

Aus: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. S. 596 bis 599. 1883—84.

596 If one closes a galvanic circuit containing a small battery, the electromotive force of which is not able to decompose water, and a voltameter with two platinum plates dipping into water acidulated with sulphuric acid, the current has a great intensity in the first moment, and diminishes at first very rapidly, afterwards slowly. At last its intensity approaches to zero more and more, but it never ceases completely. The more sensitive the galvanometer by which you measure its intensity, the longer is the time during which you are able to observe the deflection of the needle. If the electrolytic fluid is in contact with atmospheric air, it is easy, even with a galvanometer of simple construction and moderate sensibility, to observe that at last, a feeble residue of current remains, keeping a nearly constant intensity. This intensity, however, is increased by the slightest motion of the fluid, also by such feeble motions as are kept up by changes of temperature. Under these conditions, it is nearly impossible to determine by measurement regular relations
597 between the electromotive force, the resistance, and the intensity of the current. Three years ago I had the honour to describe before the Royal Society a little apparatus, hermetically sealed and purified as much as I was able to do from all traces of oxygen and hydrogen. There I thought that the current could be really reduced to zero. But since that time I have

applied an extremely delicate galvanometer, and I have found that this cell also lets pass a never-ceasing current even with small electromotive forces. The residual current remaining under such conditions is indeed only the ten thousandth or hundred thousandth part of the current which would be produced by the same electromotive force in a metallic conductor of the same galvanic resistance, and it goes on decreasing through weeks and weeks before it becomes constant, or rather slowly oscillating about a constant mean value.

Lately I have tried to shorten the time through which one has to wait for such observations, and to increase the intensity of the residual current by making the stratum of electrolytic fluid between two plane surfaces of platinum very thin. I have used plane plates of glass lying horizontally and separated by very thin little pieces of clean glass. The two plane plates were platinised along their interior surfaces, and the platinum covering of the superior plate (a rectangle of about 10 and 5 cm. side), which was smaller than the inferior, extended over a part of its upper side in order to fix on the upper sides of both plates two little hollow cylinders of paper containing mercury in contact with the platinum. By the mercury the platinum could be connected with the other parts of the circuit.

If one brings drops of the electrolytic fluid near to the margin of the upper plate, they are sucked in by capillary force into the fissure between the plates and kept fast there. The galvanic resistance of the little apparatus is only a small fraction of an ohm, and can be neglected when compared with the other parts of the circuit, which contained about 600 ohms. The fluid at the edge of the upper plate was in contact with atmospheric air, and therefore saturated with atmospheric oxygen according to its density in the atmosphere.

I was able, indeed, with this little apparatus, to get the constant value of the residual current after six or twelve hours, and to have it unusually strong. If one compares the intensity of the residual current with that which would have been 598
produced in a metallic conductor of the same resistance (600 ohms), it was about 0.025 of the latter with an electro-

motive force of 0.8 Daniell, 0.125 with 1.0 Daniell, 0.4 with 2.0 Daniells. I shall not try to give more exact numbers, because I hope to get them still more accurate than they are at present. But there was not the slightest trace of evolution of gas. And you see that even with two Daniells the current which was kept up required the force of 0.8 Daniells to overcome the resistance of the circuit. Therefore, only 1.2 Daniells remained for the decomposition of the water, which are insufficient to develop the two gases under atmospheric pressure. By reducing the resistance of the circuit to 300 ohms I could get a decomposing force of 1.36 Daniells. But also this was not sufficient for visible decomposition. The arrangement of the apparatus used hitherto did not admit of going farther. For these experiments a very constant electromotive force is needed, which is steady through months, and of which well-measured parts can be derived to pass through the electrolyte, and I had not yet had the time to introduce those modifications of the apparatus which are necessary for the employment of higher electromotive force.

These experiments show that in this case a current of about 0.002 ampère could pass constantly through acidulated water without developing any visible trace of oxygen and hydrogen.

I don't think, nevertheless, that the electrolytic law of Faraday is violated in this case. I suppose that really oxygen and hydrogen exist separately at the electrodes, only they don't bubble off, but remain dissolved in the fluid, where they exist electrically neutralised, being no longer subject to electric attraction, and therefore free to migrate through the fluid by diffusion. But when electrically neutral oxygen reaches the kathode, where positive electricity is subject to the attraction of the negative electricity of the metal, it will yield its $+E$ far easier to the kathode than does hydrogen. And the same will happen at the anode. Neutral hydrogen, carried over by diffusion, will yield its $-E$ easier to the positive metal than the anion oxygen will do. This, as you see, produces only a convective current of electricity. At the kathode diffused
599 oygen, having given off its $+E$ and now charged with $-E$,

will combine with the kation $+ H$. At the anode diffused hydrogen, after having received a positive charge from the metal, will combine with the anion $- O$. So the results of the electrolytic decomposition of water are annihilated continually. Oxygen, charged negatively, migrates as anion from the kathode to the anode, then, neutralised, it is diffused backwards to the kathode. Hydrogen, charged and discharged, goes in the opposite direction. The work done by the electromotive force of the battery is not chemical decomposition, but it is this migration of the constituents of the fluids by which heat ought to be evolved. That heat, which is evolved by the migration of the ions, is mixed up with the heat evolved by galvanic resistance, but the heat evolved by diffusion ought to be proportional to the intensity of the current. At first, before this stationary state of the current can be reached, electrolytic decomposition must go on till the required amount of gases is dissolved in the fluid, if there is not already from the beginning a sufficient quantity of one of the gases, viz., oxygen of the atmosphere in solution. Here the thermodynamic inferences come into play, which I have developed lately from the law of Carnot. They show that a limited quantity of the gases can be produced electrolytically even by very feeble electromotive forces, till a certain value of density of the dissolved gases corresponding to the value of the decomposing force has been produced.

Out of these thermodynamic laws one can develop a complete mathematical theory of galvanic polarisation and its effects. As far as the accuracy of my measurements reaches, the facts appear to be in sufficient harmony with such a theory.

CXIII.

Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge.

III.

Folgerungen die galvanische Polarisation betreffend.

(Aus den Sitzungsberichten der Akad. d. Wiss. zu Berlin vom 31. Mai 1883. S. 647 bis 665.)

---

647 Zur Vorgeschichte der in meiner ersten Mittheilung »zur Thermodynamik chemischer Vorgänge« vom 2. Februar 1882[1]) entwickelten Sätze erlaube ich mir hier nachzutragen, dass, wie ich seitdem gefunden, zunächst Lord Rayleigh in einem vor der Royal Institution am 5. März 1875 gehaltenen Vortrage es als allgemeines Princip ausgesprochen hat, dass nicht die Wärmeentwickelung allein über die Möglichkeit entscheide, ob eine chemische Veränderung in bestimmter Richtung eintrete, sondern dass dies nur geschehen könne, wenn dabei die Entropie (dissipation of Energy) wachse, oder wenigstens nicht abnehme.

Dass die Wärmeentwickelung allein genommen namentlich nicht für die Grösse der elektromotorischen Kräfte galvanischer Elemente entscheidend sei, hat Hr. F. Braun in einer Reihe von Aufsätzen vom Jahre 1878[2]) anfangend, ausgesprochen und durch eine Anzahl wichtiger Versuche erwiesen. Die theoretische Auffassung freilich, von der er in den ersten dieser Aufsätze ausgegangen ist, namentlich der Satz, dass

---

[1]) In Band II, S. 958 dieser Sammlung als Nr. XCVII abgedruckt.

[2]) Wiedemann's Annalen Bd. 5 S. 182; Bd. 16 S. 561; Bd. 17 S. 592.

»die chemische Energie von der Natur der Wärme sei«, dass jeder chemische Vorgang zunächst immer nur Wärme erzeuge, und dass es nur von zufälligen Nebenumständen abhänge, wie viel von der hohen Temperatur der eben verbundenen Atome in reversible Arbeit anderer Art verwandelt werde, ist meines Erachtens in Widerspruch mit den Thatsachen, welche zeigen, dass galvanische Ketten auch unter Bindung von Wärme arbeiten können. Ein Process, wie ihn Hr. Braun dort angenommen hat, würde nicht reversibel sein, und also, wenn er bei Auflösung eines Metalls eintritt, nicht auch bei der Ausscheidung desselben in gleicher Weise vor sich gehen können. Da übrigens der genannte Autor sich neuerdings 648
mit meiner analytischen Formulirung des Princips einverstanden erklärt hat, so wird weitere Discussion dieser theoretischen Frage nicht nöthig sein.

Die grosse Vereinfachung der thermodynamischen Sätze ferner, welche sich durch Darstellung der Energie und Entropie eines Körpersystems durch die Differentialquotienten einer Intregralfunction ergiebt, hat vor mir schon im Jahre 1877 Hr. F. Massieu[1]) gefunden und wenigstens für zwei Variable vollständig durchgeführt, aber ohne Beziehung auf chemische Processe. Er nennt die entsprechende Integralfunction, die er mit H bezeichnet, welches meinem $(-\mathfrak{F})$ entspricht, die charakteristische Function des Körpers. Ich ziehe vor, für die Function $\mathfrak{F}$ den von mir gewählten Namen der freien Energie beizubehalten, da dieser die wichtige physikalische Bedeutung dieser Grösse deutlicher ausdrückt.

Hr. Massieu hat die Sätze in einer etwas allgemeineren und für die bequemere Durchführung gewisser Rechnungen vortheilhafteren Form dargestellt. Die von mir gegebene Ableitung macht nämlich die Voraussetzung, das die Parameter p, welche in Verbindung mit der Temperatur ϑ den Zustand des Körpersystems vollständig definiren, so gewählt seien, dass die nach aussen geleistete Arbeit nur von den dp, nicht von $d\vartheta$ abhänge. Allerdings können die Parameter immer dieser

---

[1]) Mémoires des Savants étrangers t. XXII; Journal de Physique par d'Almeida t. VI. p. 216.

Bedingung gemäss gewählt werden; aber die so gewählten können unter Umständen schwer herauszufinden und zu berechnen sein, so dass es bequemer ist, andere Parameter zu brauchen, bei deren Constanz Änderung der Temperatur nicht ohne Arbeit vor sich gehen kann. Die entsprechenden Änderungen der allgemeinen Formeln sind leicht durchzuführen. Bei Hrn. Massieu kommt ein dahin gehöriges Beispiel vor, wo er Druck und Temperatur als Parameter für gasige und tropfbare Körper braucht.

In sehr umfassender und allgemeiner Weise sind endlich die thermodynamischen Bedingungen für moleculare und chemische Vorgänge in Körpersystemen, die aus beliebig vielen verschiedenen Stoffen zusammengesetzt oder gemischt sind, von Hrn. J. W. Gibbs[1] (1878) analytisch entwickelt worden. Herrn Massieu's charakteristische Function ist darin ebenfalls gefunden und Kräftefunction für constante Temperatur genannt. Die allgemeinen Ergebnisse aller dieser Untersuchungen zeigen natürlich keine wesentlichen Unterschiede,
149 soweit sie einfach Folgerungen aus den wohlbekannten Principien der Thermodynamik sind.

Für die Theorie der galvanischen Polarisation haben nun diese Folgerungen aus der Thermodynamik deshalb grosse Wichtigkeit, weil sich zeigt, dass der Überschuss freier Energie des Knallgases über die des Wassers in hohem Grade von dem Druck abhängt, während die Wärmeentwickelung bei der Verbindung davon fast unabhängig ist. So lange man die elektromotorische Kraft der Polarisation nach letzterer berechnen zu müssen glaubte (was ich selbst in meinen früheren Arbeiten gethan habe), musste sie als eine fast unveränderliche Grösse erscheinen, und das machte gewisse Vorgänge bei der Polarisation eines Voltameters fast unerklärlich. Wenn man aber die elektromotorische Kraft nach der freien Energie berechnet, so erscheint sie im höchsten Grade veränderlich nach der Gassättigung der letzten den Elektroden anliegenden

---

[1]) On the Equilibrium of heterogeneous substances. Transact. Connecticut Acad. III. p. 108—248; 343—524; Sillimann's Journal 1878. XVI. p. 441—458.

Flüssigkeitsschichten, und dadurch wird die Erklärung eines grossen Theils der Polarisationserscheinungen wesentlich verändert, und das meiste, was bisher räthselhaft war, erscheint verständlich.

Da meine Erklärungsversuche der Vorgänge bei der galvanischen Polarisation durch eine Reihe älterer Aufsätze[1]) zerstreut sind, und einiges darin den neuen Gesichtspunkten entsprechend geändert werden muss, so erlaube ich mir, dieselben hier im Zusammenhang zu recapituliren.

Die Grundvoraussetzungen, von denen ich immer ausgegangen bin und die ich festhalte, sind das Gesetz von der Constanz der Energie und die strenge Gültigkeit von Faraday's elektrolytischem Gesetz. Letzterem entsprechend halte ich die Voraussetzung fest, dass Elektricität aus der Flüssigkeit an die Elektroden nur unter äquivalenter chemischer Zersetzung übergehen kann, und dass dieser Übergang nicht stattfinden kann, vielmehr die Grenzfläche wie eine vollkommen isolirende Zwischenschicht wirkt, wenn die zur Zerlegung der chemischen Verbindungen nöthige Arbeit nicht durch die vorhandenen elektrischen Kräfte geleistet werden kann.

Wenn in einem Voltameter die beiden Elektroden elektrisch geladen werden und verschiedenes Potential erhalten, so werden zunächst, dem Abfall des Potentials entsprechend, elektrische Kräfte im Innern der Flüssigkeit wirksam, welche $+E$ gegen die Kathode, $-E$ gegen die Anode treiben. Diese Bewegung der Elektricität geschieht, so viel wir wissen, niemals ohne 650
eine gleichzeitige Bewegung der Jonen des Elektrolyten, an denen das bewegte $+E$ und $-E$ haftet. Es geht also positiv beladener Wasserstoff $(H+ \cdot H+)$ zur negativ geladenen Kathode, und negativ geladener Sauerstoff $(-O-)$ an die positiv geladene Anode. Wenn es nachher zur Entwickelung der Gase kommt, so sind die ausgeschiedenen Gase elektrisch neutral. Also muss nach dem consequent durchgeführten

[1]) Monatsberichte der Akad. 1873, S. 587; 1877, S. 713; 1880, S. 285; auch in Poggendorff's Annalen Bd. CL. S. 483 bis 495; Wiedemann's Annalen Bd. III. S. 201 bis 216; Bd. XI. S. 737 bis 759. — Faraday Lecture im Journal of the Chemical Society 1881. June. (Es sind dieses die Nr. XLII, XLIV, XLVI in Bd. 1 und Nr. CXI in Bd. III der vorliegenden Sammlung.)

Princip des Faraday'schen Gesetzes der entwickelte Wasserstoff ($H+ \cdot H-$) sein, und der frei gewordene Sauerstoff, entweder ($-O- \cdot +O+$), oder ($-O+$). Da die Molekeln des entwickelten Sauerstoffs aus zwei oder (Ozon) drei Atomen bestehen, so halte ich die erstere Form für wahrscheinlicher, Ozon würde sein: ($-O- \cdot +O- \cdot +O+$).

Die hierbei entstandene Ansammlung von ($H+$) an der negativ geladenen Kathode und von ($-O-$) an der positiven Anode ergiebt zunächst die condensatorischen Ströme zu den sich polarisirenden Elektroden. Bei diesen verhalten sich die beiden Elektrodenflächen nur wie zwei Condensatorflächen von colossaler Capacität, letztere bedingt durch den ausserordentlich geringen, nur molekularen Abstand der entgegengesetzt geladenen beiden Schichten. Verbindet man die beiden Elektroden nach Ausschaltung der Batterie durch einen einfachen Leitungsdraht, so entladen sich die beiden Condensatoren wieder und geben den depolarisirenden Strom. Der hierbei stattfindenden Elektricitätsbewegung, welche die Grenzen des flüssigen Leiters nicht überschreitet, scheinen die chemischen Kräfte innerhalb der Flüssigkeit gar keinen Widerstand entgegenzusetzen, da unter dem Einfluss vertheilender Kräfte sich elektrolytische Leiter ebenso vollständig in elektrostatisches Gleichgewicht setzen, wie metallische. Das zeigt bis zu einem hohen Grade von Genauigkeit Sir William Thomson's Water dropping collector, in dem die schwächsten elektrostatischen Kräfte die Oberfläche der sich lösenden Wassertropfen bis zum vollkommensten elektrostatischen Gleichgewicht zu laden im Stande sind. Ich selbst habe in möglichst luftleer gemachten Zersetzungszellen die bei sehr geringen elektromotorischen Kräften leicht zu constatirende Proportionalität zwischen elektromotorischer Kraft und Grösse der condensatorischen Ladung bis hinab zu 0.0001 Daniell verfolgen können. Dagegen ist der Uebergang der Elektricität von den geladenen Jonen der Grenzschicht an das Metall offenbar dem Widerstande der chemischen Kräfte unterworfen. Erst die elektrische Entladung der Jonen löst definitiv die chemische Verbindung. So lange sie nicht entladen sind, können sie noch aus der Ansammlung in den Grenzschichten bei lang-

samer Schwächung der sie festhaltenden elektrischen Anziehungskraft ohne in Betracht kommende Wärmeentwickelung in ihre frühere Verbindung zurückkehren. Dies führt zu dem Schlusse, 651
dass der mächtigste und wesentlichste Theil der chemischen Kräfte, der namentlich die eigentlich typischen Verbindungen zusammenhält, in der verschiedenen Anziehung der elementaren Substanzen gegen die beiden Elektricitäten begründet ist. Faraday's Gesetz zwingt dabei zu der Annahme, dass jede Valenzstelle jedes Elements immer mit einem ganzen Aequivalent, sei es positiver, sei es negativer Elektricität geladen sei, und dass die Grösse dieser elektrischen Aequivalente ebenso unabhängig von dem Stoffe ist, mit dem sie sich verbinden, wie die Atomgewichte der einzelnen chemischen Elemente unabhängig sind von den Verbindungen, die sie eingehen, gerade so als wäre die Elektricität selbt in Atome getheilt.

Dass die elektrischen Kräfte, die hierbei in Betracht kommen, durchaus nicht zu klein sind, um die grossen bei den chemischen Scheidungen und Wiedervereinigungen auftretenden Arbeitsbeträge zu leisten, ergiebt sich, wenn man die colossale Grösse der bei diesen Processen ausgetauschten elektrischen Aequivalente berücksichtigt. Meine in der Faraday Lecture[1]) veröffentlichte Berechnung ergiebt, dass, wenn das an den Atomen von 1^{mg} Wasser haftende $+ E$ auf eine Kugel, das $- E$ auf eine andere 1 Kilometer entfernte ohne Verlust übertragen werden könnte, beide Kugeln sich mit einer Kraft anziehen würden, welche der Schwere von 102180 kg gleich sein müsste. Eben wegen der colossalen Grösse dieser Ladungen der Atome sind auch die verhältnissmässig schwachen Anziehungskräfte, welche ein oder zwei Daniell'sche Elemente in einer elektrolytischen Flüssigkeit hervorbringen, verhältnissmässig so grosser Leistungen fähig. Schwach sind diese Kräfte nur den kleinen Mengen freier Elektricität gegenüber, welche durch unsere Elektrisirmaschinen geliefert werden.

Die für die Herstellung elektrischen Gleichgewichts nothwendige Ausbildung der elektrischen Doppelschichten erklärt

---

[1]) Abgedruckt als Nr. CXI auf S. 52 dieses vorliegenden Bandes (die Zahlen entsprechend dem Zusatz auf S. 74 u. 75 geändert).

einen grossen und wesentlichen Theil der Vorgänge bei der Polarisation, nämlich die starken Anfangsströme bei Ladung und Entladung der Elektroden. Erheblich verlängert werden können diese Ströme, wenn gleichzeitig Occlusion[1]) eines oder beider Gase in dem Metall der Elektroden vorkommt. Aber keiner dieser beiden Processe erklärt die unbegrenzte Dauer der Ströme bei schwächeren elektromotorischen Kräften.

In meiner Arbeit vom Jahre 1873 habe ich gezeigt, dass der Gehalt der elektrolytischen Flüssigkeit an aufgelösten
652 Gasen, namentlich atmosphärischem Sauerstoff, auf die Stärke dieser dauernden Ströme von grössestem Einfluss ist, und habe das Zustandekommen der davon abhängigen Ströme, der Convectionsströme, erklärt. Dabei kommt in Betracht, dass elektrisch neutral gewordene Gase, die in der Flüssigkeit aufgelöst sind, der Anziehung der elektrisch geladenen Elektroden nicht in der gleichen Weise unterliegen, wie es die elektrisch geladenen Jonen vor ihrer Entladung thun, sondern frei durch die Flüssigkeit diffundiren können. Nehmen wir nun eine stärkere Anziehung des Sauerstoffs zu $-E$ an, so wird neutraler gelöster Sauerstoff an der negativ geladenen Kathode sich ohne Widerstand oder sogar unter Leistung positiver Arbeit zur Unterstützung des Stroms mit $-E$ sättigen können, und dann entweder der Verbindung mit $(H+\cdot H+)$ verfallen, oder eine neue Wanderung als Anion zur Anode antreten, während gleichzeitig an der Anode ein Molekel von $(-O-)$ sich neutralisirt. Die ganze Arbeit der elektromotorischen Kraft der Batterie besteht dann nur darin, dass aufgelöstes neutrales O an der Anode in sauerstoffarmer Flüssigkeit als solches verschwindet, sich negativ ladet und wieder Bestandtheil des Wassers wird, während an der Kathode das Anion des Wassers zu neutralem aufgelösten Sauerstoff wird, aber in sauerstoffreiche Flüssigkeit eintritt. Ein stationärer Strom ist möglich, sobald

[1]) In meiner Arbeit über „Bewegungsströme am polarisirten Platina" (1880) [auf S. 899 des 1. Bandes der vorliegenden Sammlung als Nr. XLVI abgedruckt] habe ich diesen Einfluss überschätzt, da ich die Gegenkraft der Wasserzersetzung für unveränderlich hielt. Ich sehe jetzt, dass viele der dort gegebenen Erklärungen sich viel einfacher und folgerichtiger aus der Diffusion der Gase in der Flüssigkeit herleiten lassen.

durch Diffusion so viel gelöster Sauerstoff von der Kathode zur Anode zurückwandert, als durch den Strom als Anion von der Kathode zur Anode geführt wird.

Ich habe seit Veröffentlichung jener Arbeit mannigfache Versuche angestellt, die letzten Spuren der aufgelösten Gase vollständiger zu beseitigen als dies mir damals gelungen war, aber ohne besseren Erfolg. Ich habe die Berührung der elektrolytischen Flüssigkeit mit dem Quecksilber der damals gebrauchten Quecksilberpumpe beseitigt, weil der Verdacht nicht ganz sicher auszuschliessen war, dass minimale Spuren aufgelöster Quecksilbersalze sich bilden könnten. Ich habe in einer zugeschmolzenen Zelle[1]) die atmosphärische Luft durch elektrolytisch entwickeltes Knallgas auszuwaschen und letzteres wieder durch den Einfluss einer wasserstoffhaltigen Palladiumplatte zu beseitigen gesucht, die den Sauerstoff wieder zu Wasser machen, den Wasserstoff unter dem Einflusse elektrischer Ströme occludiren sollte. Das Wasser in der Zelle klapperte scharf wie in einem Pulshammer, aber dauernde elektrische Ströme waren immer noch da.

Was man mit solchen Zellen erreichen kann, habe ich in neuerer Zeit einfacher mit kleinen aus Glas geblasenen Zellen erreicht, welche sich an das obere Ende eines Barometerrohrs anschliessen. Am besten lässt man vier Elektroden von Platin- 653
draht im Kreuze einander gegenüberstehend einschmelzen, von denen man zwei platiniren kann. So kann man beliebige Mengen Knallgas durch zwei der Elektroden entwickeln, und die beiden anderen zu den Messungen der Polarisation brauchen. Das untere Gefäss des Barometers wird durch eine doppelhalsige Flasche gebildet, in deren einem Halse das Barometerrohr luftdicht eingekittet ist. Der andere Hals enthält ein kürzeres Glasrohr, durch welches man Flüssigkeiten und Quecksilber einfüllen oder mittels einer Pipette entfernen kann. Dasselbe Rohr kann auch mit einer Wasserluftpumpe verbunden werden, um die Luft aus der Barometerzelle zu entfernen. Wenn man die in dieser enthaltene Flüssigkeit bis 30° oder 40° C. erwärmt, giebt sie grosse Volumina Dampf aus, die die letzten Spuren Luft austreiben. Sobald man langsam die Luft wieder in die

[1]) Faraday Lecture. (Siehe Fig. 3., S. 66 des vorliegenden Bandes.)

Flasche eindringen lässt, steigt das Quecksilber im Barometerrohr empor, bis zu der um den Wasserdampfdruck verminderten Barometerhöhe. Aus diesen Apparaten ist neugebildetes Gas immer leicht wieder zu entfernen und sehr vollständiges Auskochen ist möglich.

Indessen überzeugt man sich immer wieder, dass ein Zustand der Flüssigkeit, wobei ein hinreichend empfindlicher Multiplicator nicht auch bei Kräften kleiner als ein Daniell dauernde Ströme anzeigte, nicht zu erreichen ist. Ich habe in den letzten Jahren ein Siemens'sches Instrument mit astatischen Glockenmagneten angewendet, bei welchem in der gewählten Aufstellung ein Scalentheil einer Intensität von 10^{-9} Ampère entspricht. Ein solcher noch vollkommen sicher zu beobachtender Strom würde 334 Jahre brauchen, um 1^{mg} Wasser zu zersetzen. Wenn also nur 1^{cmm} Knallgas von 0^{0} und 760^{mm} Quecksilberdruck (0.0005^{mg}) im Wasser aufgelöst wäre, brauchten dessen Bestandtheile in 36 Tagen nur einmal von der Anode zur Kathode zu wandern, um den angezeigten Strom zu geben.

Ebenso zeigte sich auch in den möglichst luftleer gemachten Zellen durchaus nicht, dass die Polarisation eine oberste Grenze erreicht hatte, wenn die Entwickelung der Gasbläschen begann, und also die elektromotorische Kraft der Batterie gross genug geworden war, den Widerstand der chemischen Kräfte zu bewältigen, sondern es stieg noch immer die Gegenkraft der Polarisation mit der Steigerung der Kraft der galvanischen Batterie, wenn längst schon lebhafte Gasentwickelung vorhanden war.

Überhaupt ist bei allen den Graden elektromotorischer Kraft, die der Grenze der Gasentwickelung nahe liegen, in dem Verhalten des Stromes nichts zu entdecken, was eine plötzlich eintretende Überwältigung der chemischen Kräfte durch die elektrischen anzeigte.

634 Für diese Schwierigkeiten eröffnet nun die thermodynamische Theorie einen willkommenen Ausweg, indem sie zeigt, dass, wenn die gebildeten Gase sich in der elektrolytischen Flüssigkeit auflösen, der durch den Strom zu überwindende Widerstand der chemischen Kräfte immer grösser und grösser werden muss, je mehr von den ausgeschiedenen Gasen rings um die

Elektroden aufgelöst ist, und dass der Antheil der Gase keineswegs unerheblich ist, sondern jeden beliebigen positiven Werth zwischen 0 und ∞ annehmen kann.

Dass die Wasserzersetzung bei hohem Druck selbst bei elektromotorischen Kräften von drei bis vier Daniell aufhören kann, ist von Herrn Werner Siemens[1] gezeigt worden. Leider fehlen Angaben über die Grösse des erreichten Drucks und über die Intensität des gleichzeitig eingetretenen Convectionsstroms, der den für die chemische Arbeit verwendbaren Theil der elektromotorischen Kraft erheblich herabsetzen musste.

Thermodynamische Berechnung der freien Energie des Knallgases.

Ich bezeichne mit U_g die gesammte innere Energie für 1^{gr} Knallgas, wobei die beiden Gase aber als nicht mit einander gemischt angenommen werden.[2] U_g sei Function der Temperatur und der Dichtigkeit beider Gase, welche drei Grössen die unabhängigen Variablen des Problems bilden. U_w sei die gesammte innere Energie von 1^{gr} Wasser bei derselben absoluten Temperatur ϑ, für welche U_g bestimmt ist. Dann ist $(U_g - U_w)$ das Arbeitsäquivalent der Wärme, welche bei der Verbrennung des Knallgases und seiner Ueberführung in tropfbar flüssiges Wasser entwickelt wird. Zu bemerken ist nur, dass wenn die Gase vor und bei der Verbrennung unter atmosphärischem Druck stehen, auch noch Wärme durch diesen Druck entwickelt wird, indem das Volumen der Gase sich auf das des Wassers verkleinert. Letztere Wärmemenge Q ist

$$Q = \frac{p.v}{\mathfrak{J}}$$

wenn p den normalen Atmosphärendruck, v das Volumen von 1^{gr} Knallgas unter dem Drucke p, und $\mathfrak{J}$ das mechanische Äquivalent der Wärmeeinheit bezeichnet.

---

[1] Gesammelte Abhandlungen und Vorträge. 1. Aufl. S. 445.

[2] Mischung derselben würde die freie Energie ändern, wie Lord Rayleigh nachgewiesen hat (Philosophical Magazine. 1875. April). S. auch L. Boltzmann Sitzb. der K. Akad. der Wissensch. zu Wien. Bd. LXXVIII. II. Abth. 10. October 1878.

Die entwickelte Wärme muss aber innerhalb solcher
653 Temperaturgrenzen, wo die specifische Wärme des Wassers und der Gase sich nicht merklich ändert, von der Form sein:

$$U_g - U_w = C - \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{k} \cdot \vartheta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

$$\mathfrak{k} = 1 - \frac{2a_h \cdot \gamma_h + a_o \cdot \gamma_o}{2a_h + a_o}$$

worin a_h und a_o die Atomgewichte des Wasserstoffs und Sauerstoffs, γ_h und γ_o aber die specifischen Wärmen für constantes Volumen bedeuten. Wenn die Gase constantes Volumen behalten und man die durch die sehr kleinen Volumenänderungen des Wassers zu leistende mechanische Arbeit vernachlässigt, bleibt bei Temperatursteigerungen nur die durch die Wärmeaufnahme bedingte Änderung der inneren Energie zu berücksichtigen.

Aber auch Volumenänderungen der Gase haben keinen merklichen Einfluss auf die Werthe von U, da beide Gase sehr nahehin die Bedingung des vollkommenen Gaszustandes erfüllen, wonach die äussere Arbeit das genaue Äquivalent der verschwundenen Wärme ist und daher nach Wiederherstellung der früheren Temperatur die Änderung im Werthe von U wieder ausgeglichen ist. Die Zahlenwerthe der obigen Formel ergeben sich, wenn man mit v das Volumen von je 1^{gr} eines Gases unter dem Drucke p und bei der Temperatur ϑ bezeichnet, und

$$\frac{p \cdot v}{\vartheta} = R \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1\text{ a.}$$

setzt, ferner die specifische Wärme bei constantem Druck mit c bezeichnet, wie folgt:

$$a_h = 1 \qquad\qquad a_o = 16$$

$$\mathfrak{J} \cdot \gamma_h = \mathfrak{J} \cdot c_h - R_h \qquad\qquad \mathfrak{J} \cdot \gamma_o = \mathfrak{J} \cdot c_o - R_o$$

Nach Regnault ist

$$c_h = 3.4090$$

$$c_o = 0.2175$$

$$v_h = 11163.6 \cdot \frac{cm^3}{g} \text{ für } 0^0 \text{ und } 760^{mm} \text{ Quecksilberdruck,}$$

also

$\gamma_h = 2.29965$
$\gamma_o = 0.17371$
$\mathfrak{f} = 0.58007$

Aus den bei 0° im Eiscalorimeter angestellten Versuchen der Hrn. Schuller und Wartha (Wiedemann's Annalen II. S. 378, Werthe a) ergiebt sich als Mittelwerth der durch 1^gr^ H bei der Verbrennung zu flüssigem Wasser entwickelten Wärme 34123.56 Calorien, also für 1^gr^ H_2O 3791.5 Calorien. 656
Die Arbeit der Atmosphäre hat davon 45.232 Calorien geliefert; es bleiben 3746.268 für den chemischen Process bei 0°. Daraus ergiebt sich die Constante C der Gleichung 1:

$$C = \mathfrak{J} \cdot 3904.63.$$

Nach den von mir in meiner Mittheilung vom 2. Februar 1882[1]) gebrauchten Bezeichnungen ist die gesammte Energie eines körperlichen Systems aus dem Werthe seiner freien Energie $\mathfrak{F}$ zu finden durch die folgende Beziehung (l. c. S. 12 Gleichung 1^h^):

$$U = \mathfrak{F} - \vartheta \cdot \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta}$$

oder

$$-\frac{U}{\vartheta^2} = \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left[\frac{\mathfrak{F}}{\vartheta}\right].$$

Setzt man in diese Gleichung den Werth von $U_g - U_w$ aus Gleichung 1 und integrirt, so erhält man

$$\mathfrak{F}_g - \mathfrak{F}_w = C + \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{f} \cdot \vartheta \cdot \log \vartheta + \vartheta \cdot \varphi \quad \ldots\ldots \quad 1\,\text{b.}$$

Hierin ist φ die Integrationsconstante, welche nicht von ϑ, wohl aber von v_h und v_o abhängig sein kann.

Deren Abhängigkeit von den letztgenannten Grössen bestimmt sich, wenn man die Arbeit für Volumänderungen der einzelnen Gase berechnet. Es ist nur der Summand $\mathfrak{F}_g$, der von beiden Grössen abhängen kann:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_g}{\partial v_h} = \frac{-2 p_h a_h}{2a_h + a_o}, \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{F}_g}{\partial v_o} = \frac{-p_o a_o}{a_o + 2a_h}.$$

---

[1]) In Bd. II, S. 958 bis 978 dieser Sammlung als Nr. XCVII abgedruckt. (Die hier citirte Gleichung findet sich auf S. 969 des Abdruckes.)

Benutzt man die obige Gleichung 1 a, so ergiebt sich

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_g}{\partial v_h} = - R_h \cdot \frac{\vartheta}{v_h} \cdot \frac{2a_h}{2a_h + a_o} \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_g}{\partial v_h} = - R_o \cdot \frac{\vartheta}{v_o} \cdot \frac{a_o}{2a_h + a_o}.$$

Aus Gleichung 1 b dagegen

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_g}{\partial v_h} = \vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v_h} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{F}_g}{\partial v_o} = \vartheta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v_o}.$$

Also ist

$$\varphi = - R_h \cdot \frac{2a_h}{2a_h + a_o} \cdot \log v_h - R_o \cdot \frac{a_o}{2a_h + a_o} \cdot \log v_o + H' \ldots 1\text{bb},$$

worin H′ eine Integrationsconstante bezeichnet.

Der Gesammtwerth der freien Energie, den die getrennten Gase mehr haben, als das Wasser, ergiebt sich daraus:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{F}_g - \mathfrak{F}_w = C + \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{k} \cdot \vartheta \cdot \log\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right) - \vartheta \cdot \Big[\frac{R_h \cdot 2a_h}{2a_h + a_o} \cdot \log(v_h) \\ + R_o \frac{a_o}{2a_h + a_o} \cdot \log(v_o) + H \Big] \end{aligned}\right\} 1\text{ c}$$

worin

$$H = H' + \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{k} \cdot \log(\vartheta_0)$$

nur einer anderen Bezeichnung der Integrationsconstante entspricht, und ϑ_0 irgend eine passend gewählte Normaltemperatur, z. B. die des schmelzenden Eises bezeichnet.

Zu bemerken ist übrigens, dass für die vollkommenen Gase nach Avogadro's Gesetz

$$R_h \cdot a_h = R_o \cdot a_o \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1\text{ d}.$$

Die Gleichung 1c zeigt an, dass die durch Vereinigung der Gase zu leistende Arbeit allerdings und in sehr wesentlicher Weise von ihrer Dichtigkeit vor der Vereinigung abhängt, während dies für ihre Verbindungswärme nicht der Fall ist, falls nicht dabei fremde Arbeit z. B. die der Atmosphäre hinzukommt. Da die Volumina v_h und v_o alle positiven Werthe von 0 bis ∞ annehmen können, so können ihre Logarithmen von $-\infty$ bis $+\infty$ steigen, und da die übrigen Grössen der rechten Seite von Gleichung 1_c alle nothwendig endlich sind, könnte

auch der Werth von $\mathfrak{F}_g - \mathfrak{F}_w$ von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen; oder da negative Werthe die Möglichkeit der Verbrennung ausschliessen, mindestens von 0 bis $+\infty$.

Arbeitsäquivalent gelöster Gase.

Bei elektrolytischer Zersetzung treten die Gase zuerst in Lösung in der elektrolytischen Flüssigkeit auf und erst, wenn in den die Elektroden berührenden Grenzschichten die aufgelöste Menge die Grenzen der Sättigung überschreitet, die bei dem gegebenen Drucke eintreten kann, werden sie sich in Bläschen ausscheiden.

Wenn ein Gas in dem Volumen V von Wasser unter dem Drucke p zur Sättigung aufgelöst ist, so ist die aufgelöste Menge m gegeben durch die Gleichung

$$\frac{b \cdot p}{\vartheta} = R \cdot \frac{m}{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2$$

worin b der Bunsen'sche Absorptionscoefficient ist, der übrigens selbst eine Function der Temperatur bildet.

Wenn die Menge dm aus der Flüssigkeit austritt, so leistet sie einen ersten Theil der Arbeit

$$- d\mathfrak{F}_1 = p \cdot v \cdot dm.$$

Soll nun weiter das ausgetretene Gas in einen Normal- 658
zustand übergeführt werden, der durch den Index 1 angezeigt werden mag, so ergiebt dies einen zweiten Theil der Arbeit:

$$\begin{aligned} - d\mathfrak{F}_2 &= dm \int_v^{v_1} p \cdot dv \\ &= dm \cdot p_1 \cdot v_1 - dm \int_p^{p_1} v \cdot dp - dm \cdot p \cdot v. \end{aligned}$$

Also die gesammte Arbeit, die der Austritt der Menge dm des Gases aus der Flüssigkeit und Übergang desselben in den gewählten Normalzustand leistet, ist:

$$\left.\begin{aligned} - d\mathfrak{F} &= -(d\mathfrak{F}_1 + d\mathfrak{F}_2) \\ &= \vartheta \cdot R \cdot dm \left[1 - \log \cdot \left(\frac{p_1}{p}\right)\right] \ldots\ldots\ldots \\ &= \vartheta \cdot R \cdot dm \left[1 + \log \cdot \left(\frac{v_1}{v}\right)\right] \ldots\ldots\ldots \\ &= \vartheta \cdot R \cdot dm \left[1 - \log \cdot \left(\frac{m_1}{m}\right)\right] \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 2a.$$

In der letzten Gleichung bezeichnet m_1 die Menge des Gases, die unter dem Drucke p_1 des Normalzustandes aufgelöst sein würde.

Diese Gleichungen zeigen an, dass bei abnehmenden Werthen von m steigende Arbeit nöthig ist, um die gleiche Menge dm des Gases aus der Flüssigkeit wegzunehmen; dass also die Flüssigkeit die letzten Portionen des aufgelösten Gases mit einer bis unendlich steigenden Kraft festhält, beziehlich heranzieht.

Wenn also bei der Zersetzung des Wassers die freigewordenen Elemente sich nicht als Gase unter dem Drucke p_1 entwickeln, sondern im Wasser gelöst bleiben, so wird $d\mathfrak{F}$ berechnet für 1[gr] Knallgas von der bei der Zersetzung des Wassers zu leistenden Arbeit als noch nicht geleistet abzuziehen sein. Für 1[gr] Wasser giebt dies also

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{F}_g - \mathfrak{F}_w = C + \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{k}\cdot\vartheta\cdot\log\cdot\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right) \\ +\vartheta\Big\{R_h\cdot\frac{2a_h}{2a_h+a_o}\left[1-\log(v_h)\right] \\ +R_o\frac{a_o}{2a_h+a_o}\left[1-\log v_o\right]-H\Big\}\end{aligned}\right\} \quad 3.$$

Hierin bedeuten v_h und v_o die specifischen Volumina, welche über der Flüssigkeit stehendes Gas haben müsste, um denselben Grad der Sättigung hervorzubringen, den das in den Grenzschichten an der Elektrode gelöste Gas hat. Auch in diesem Falle kann also, wenn noch sehr wenig Gas gelöst ist, und die betreffenden v daher sehr gross sind, der Werth $(\mathfrak{F}_g - \mathfrak{F}_w)$ gleich Null oder selbst negativ werden. Stabiles Gleichgewicht
659 der chemischen Kräfte ist hiernach im Wasser überhaupt nur bei einem gewissen minimalen Grade der Dissociation seiner Elemente möglich, und andererseits wird um so geringerer Arbeitsaufwand durch eine dazu angewendete elektromotorische Kraft nöthig sein, um neue Zersetzung hervorzubringen, je weniger von den betreffenden Gasen im Wasser schon aufgelöst ist. Es wird also ein Convectionsstrom durch wässerige Elektrolyte auch bei den schwächsten elektromotorischen Kräften streng genommen niemals ganz fehlen können; bei stärkeren Kräften wird der Gehalt an aufgelösten Gasen und damit auch

die Stärke des Convectionsstromes wachsen müssen. Andererseits erklärt es sich aus der Langsamkeit der Diffusionsprocesse, dass es viele Tage dauern kann, ehe bei constant gehaltener elektromotorischer Kraft der stationäre Znstand der Gaslösung und des Stromes sich ausbildet. Auch erhellt hieraus, dass jede Bewegung der Flüssigkeit, sei sie nun durch mechanische Ursachen oder durch Temperaturungleichheiten hervorgerufen, Änderungen der Stromstärke, meistentheils Steigerungen derselben hervorrufen muss, da sie die Ordnung der Flüssigkeitsschichten von verschiedenem Gasgehalt stört. Aus beiden Umständen ergiebt sich eine grosse Schwierigkeit für die Ausführung der Versuche über den stationären Zustand, da dieselben sehr lange Zeit in Anspruch nehmen und die Störung durch Erschütterungen, wenigstens im Innern einer grossen Stadt, kaum zu vermeiden sind. Galvanische Ketten von hinreichender Constanz lassen sich bei der geringen Intensität dieser Ströme mit Hülfe der Calomelelemente oder anderer ähnlicher Combinationen gut herstellen. Nur habe ich in meinen neuesten Versuchsreihen die Vorsicht gebraucht, die zur Messung der elektromotorischen Kräfte dienenden Elemente dieser Art immer nur compensirt und daher nahehin stromlos anzuwenden und die elektromotorische Kraft derjenigen, welche dauernde Ströme zu geben hatten, von Zeit zu Zeit durch die der stromlosen zu bestimmen.

Wenn wir zur Messung der elektrischen Ströme Ampère's, Volt's und Ohm's gebrauchen, ist $A \cdot J \cdot t = J^2 \cdot W \cdot t$ die Arbeit der elektromotorischen Kraft A bei der Stromstärke J während der Zeit t, ausgedrückt in den entsprechenden Einheiten cg. 10^{-9}, cm. 10^9 und Secunden. Die Einheit der Arbeit wäre das von Sir William Siemens vorgeschlagene Watt, welches zehnmillionen mal grösser ist, als das in g, cm. und sec. berechnete Arbeitsmaass des C. G. S.-Systems, welches wir der Berechnung der Gasarbeit zu Grunde gelegt haben.

Wenn wir mit η die Menge Wasser bezeichnen, welche ein Ampère in der Secunde zersetzt (nach Hrn. F. Kohlrausch[1]) $\eta = 0.00009476$), so ergiebt sich für die Arbeit, welche 660

[1]) Pogg. Ann. Bd. 49 S. 175. (Dort für 1 Weber in mg. gegeben.)

ein Ampère bei der Wasserzersetzung in der Secunde liefert:

$$A = 10^{-7} \cdot \eta\,(\mathfrak{F}_g - \mathfrak{F}_w) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3\,\text{a.}$$

Wenn wir bei der Substitution des Werthes der letzteren Parenthese aus Gleichung 3 den Werth derjenigen elektromotorischen Kraft mit A_a bezeichnen, welcher eintritt, wenn die sich entwickelnden Gase unter atmosphärischem Druck p_a stehen, so ist

$$v_h = R_h \cdot \frac{\vartheta}{p_a} \text{ und } v_o = R_o \cdot \frac{\vartheta}{p_a}$$

also

$$\left.\begin{aligned}
A_a &= 10^{-7} \cdot \eta \Big[C + \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{k}_a \cdot \vartheta \cdot \log\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right) \\
&\quad + \vartheta \Big\{ R_h \cdot \frac{2a_h}{2a_h + a_o} \log(p_a) + R_o \cdot \frac{a_o}{2a_h + a_o} \log(p_a) - H_a \Big\} \Big] \\
\mathfrak{k}_a &= \frac{2a_h(1-c_h) + a_o(1-c_o)}{2a_h + a_o} = 0.5970 \\
H_a &= H + \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{k}_a \log(\vartheta_0) - R_h \cdot \frac{2a_h}{2a_h + a_o}[1 - \log R_h] \\
&\quad - R_o \cdot \frac{a_o}{2a_h + a_o}[1 - \log R_o]
\end{aligned}\right\} \text{3b.}$$

Dagegen ist für andere Werthe des Druckes der gelösten Gase

$$\left.\begin{aligned}
A = A_a + 10^{-7} \cdot \eta \cdot \vartheta \cdot \Big\{ R_h \cdot \frac{2a_h}{2a_h + a_o} \log\left(\frac{p_h}{p_a}\right) \\
+ R_o \frac{a_o}{2a_h + a_o} \log\left(\frac{p_o}{p_a}\right) \Big\}
\end{aligned}\right\} \text{3c.}$$

Um zunächst nur eine angenäherte Vorstellung von dem Grade der Veränderlichkeit der elektromotorischen Kraft zu geben, benutze ich den Werth von A_a, der sich mir aus den Versuchen an den barometrischen Zellen für das erste Aufsteigen von Gasbläschen ergab:

$$A_a = 1.6447 \text{ Volt.}$$

Wenn nur Knallgas in der Flüssigkeit gelöst ist, und wir mit $\mathfrak{p}$ den Druck bezeichnen, den das befreite Gas in einem

Volumen haben würde, welches dem der Flüssigkeit gleich wäre, so ist

$$\tfrac{2}{3}\,\mathfrak{p} = b_h \cdot p_h \text{ und } \tfrac{1}{3}\,\mathfrak{p} = b_o \cdot p_o \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3\,\text{d.}$$

Die Absorptionscoëfficienten b sind nach R. Bunsen bei 20° C

$$b_h = 0.0193$$
$$b_o = 0.0480.$$

Aus diesen Daten ergiebt sich für $A = 0$, d, h. für den Druck des von selbst und ohne Zuhülfenahme einer elektromotor ischen Kraft dissociirten Gases aus Gleichung 2 b.

$$\mathfrak{p} = \frac{p_a}{3{,}420 \cdot 10^{38}} = p_a \cdot 0{,}2923 \cdot 10^{-38},$$

oder $0.2655^{\text{grm}} \cdot 10^{-36}$ Knallgas im Cubikcentimeter der Flüssigkeit, während man bisher im Vacuum der besten Quecksilberluftpumpen nur etwa bis $p_a \cdot 10^{-8}$ gelangt ist.[1]) Für alle chemischen
und selbst für alle galvanometrischen Prüfungen wird ein 661
solches Quantum als unwahrnehmbar betrachtet werden müssen.

Die Differenz $(A_a - A)$ würde also durch Einführung und Steigerung einer äusseren elektromotorischen Kraft A etwa auf ein Viertel von A_a (also $A = 1.2$ Volts, etwa ein Daniell) zurückgeführt werden müssen, ehe das aufgelöste Gas anfangen könnte wahrnehmbar zu werden.

Wenn man das $\mathfrak{p}$ so wählt, dass es der Zersetzung durch einen Strom von einem Scalentheil meines Galvanometers während einer Secunde entspricht und das entstandene Gas in ein Cubikcentimeter der Flüssigkeit zusammengedrängt annimmt, also

$$\mathfrak{p} = \frac{\eta \cdot 10^{-9}}{v_h}$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen 3_c und 3_d der Werth

$$A_a - A = 0.33745$$
$$A = 1.3 \text{ Volt.}$$

Da etwa 100 Cubikcentimeter Wasser in meinen barometrischen Zellen waren, die bei stationärer Strömung mit jedem der Gase im Mittel halb so stark beladen sein mussten, als angenommen wurde, so hätte der Dissociationsstrom hierbei schon eine Ab-

---

[1]) E. Bessel-Hagen in Wiedemann's Annalen Bd. 12 S. 438.

lenkung von einem Theilstrich durch 50 Secunden geben können. Wir können dies etwa als die Grenze seiner galvanometrischen Wahrnehmbarkeit betrachten.

Wenn dagegen die volle elektromotorische Kraft A_a eintritt, so muss die Parenthese der rechten Seite von 3c. gleich Null werden, d. h.

$$\frac{\mathfrak{p}}{p_a} = 0.04942$$

was einem Strome entspräche, dessen Zeitintegral für 100 Cubikcentimeter Flüssigkeit 2176 Millionen Scalentheile mal Secunden ausmachte.

In der That haben schon meine unter dem 11. März 1880[1]) mitgetheilten Versuche ergeben, dass auffallend viel stärkere und andauernde Ströme auftreten, wenn die elektromotorische Kraft etwas über die Grenze von einem Daniell gesteigert wird, als bei geringeren Kräften der Fall war, und dasselbe hat sich auch regelmässig in den neueren Versuchen gezeigt. Um diese stärkeren Ströme an der Grenze der Gasentwickelung überhaupt nur beobachten zu können, musste ich den durch das Galvanometer gehenden Theil des Stromes sehr erheblich, nämlich auf $^1/_{680}$ herabsetzen. Die übrig bleibenden Convectionsströme entsprachen etwa 0.001 Ampère. Aber auch wenn diese Strom-
662 stärken ganz zur Gasentwickelung verbraucht würden, würde es 36 Minuten dauern, ehe die zur Sättigung nöthige Gasmasse entwickelt ist. In Wahrheit dauert es viele Stunden oder selbst Tage, weil der grösste Theil des betreffenden Stromes nicht der Entwickelung, sondern nur der Diffusion des schon entwickelten Gases entspricht.

Der Temperaturcoëfficient der Kraft A_a ergiebt sich aus den obigen Formeln und Werthen sehr klein, nämlich nahehin $^1/_{8000}$ des Werthes als Abnahme für 1° C.

Bildung der Gasblasen.

Wenn die Sättigung der den Elektroden benachbarten Schichten mit Gas gross genug geworden ist, dass bei dem auf der Flüssigkeit lastenden Drucke sich Gasbläschen bilden

[1]) Siehe meine „Wissenschaftliche Abhandlungen“ Bd. I, S. 903.

können, so beginnen diese aufzusteigen. Die Gasbläschen enthalten nur das an der betreffenden Elektrode sich ausscheidende Gas und die der Temperatur entsprechende Menge von Wasserdämpfen. Sie stehen unter dem Druck der Gasmasse, die über der Flüssigkeit steht, ferner der Wassersäule, die sich über ihnen befindet, endlich der Capillarspannung der kugeligen Grenzfläche des umgebenden Wassers. Der Druck im Innern einer kugeligen Capillarfläche ist bekanntlich

$$p = \frac{2T}{r},$$

wenn r den Radius der Kugel und T die Spannung der Capillarfläche bezeichnet. Setzen wir die letztere nach den Bestimmungen von Herrn G. Quincke gleich der Schwere von 8.253^{mg} wirkend durch ein Millimeter, so ist in einem Bläschen von 0.1^{mm} Radius der Druck p gleich dem von 12.14^{mm} Quecksilber; bei sehr feinen Bläschen von 0.01^{mm} Radius würde er das Zehnfache davon ausmachen. Es ergiebt sich daraus eine erhebliche Schwierigkeit für die erste Bildung der entstehenden Bläschen, welche auch in dem grossen Siedeverzug luftfreier Flüssigkeiten bekanntlich sehr auffällig hervortritt. Im Allgemeinen scheint die Bildung der Blasen an der Berührungsfläche der Flüssigkeit mit einer Wand, der sie nicht stark anhaftet, am leichtesten zu gelingen. Wie grossen Einfluss hierbei die Natur der Wand hat, ist aus dem Studium der Siedeverzüge wohl bekannt. Auch in Wasser gelöste Kohlensäure entwickelt sich viel reichlicher an Metallen, namentlich edlen, als an Glas und an rauhen oder scharfeckigen Stellen des Glases mehr als an ganz glatten. Die elektrolytischen Gase zeigen ein entsprechendes Verhalten. Man muss anfangs eine grössere elektromotorische Kraft gebrauchen, um die ersten Blasen zu erhalten, als nachher nöthig ist, um die Entwickelung zu unterhalten. Wenn diese begonnen hat, kann man in kleinen Schritten zu schwächeren Kräften absteigen. Dann steigen die Blasen schliesslich nur noch von einer oder einigen wenigen Stellen des Drahtes auf. Unterbricht man aber die Entwickelung auch nur auf wenige Minuten durch zu grosse oder zu schnelle Abschwächung der elektromotorischen Kraft, so muss man von Neuem eine viel grössere

Kraft zur Einleitung eines neuen Blasenstroms einführen. Offenbar hat sich dann die Rissstelle zwischen Flüssigkeit und Elektrode geschlossen, und muss neu gebildet werden.

Es kann daher der Anfang der Gasentwickelung von vielen kleinen Zufälligkeiten an der Oberfläche der Elektrode abhängen. Platinirtes Platin bildet leichter Blasen als glattes.

Auf die elektromotorische Gegenkraft des Voltameter, d. h. auf die Grösse, die man als Stärke der Polarisation zu bezeichnen pflegt, muss die Gasentwickelung einen wesentlichen Einfluss haben, insofern die chemische Arbeit nach dem oben gegebenen Theorem von der Gasbeladung der letzten Flüssigkeitsschichten abhängt, und diese durch die Entwickelung der Gasblasen herabgesetzt wird. Darin könnte auch die Erklärung für die verschiedene elektromotorische Kraft der galvanischen Elemente mit einer Flüssigkeit liegen, in denen sich Wasserstoff an verschiedenen Metallen entwickelt. Wo die Blasen sich schwer bilden, wird sich der Wasserstoff in einer mit diesem Gase stärker gesättigten Flüssigkeit ausscheiden müssen, was mehr freie Energie verlangt. Dies könnte an den unedlen Metallen im Gegensatz zum Platin der Fall sein, und ihr abweichendes Verhalten erklären. Diese Umstände erschweren nun auch in hohem Grade die Messung der elektromotorischen Kräfte, welche im gegebenen Falle nöthig sind, um eine andauernde Gasentwickelung einzuleiten, und zwar ist das Hinderniss für die Blasenbildung verhältnissmässig grösser in den Fällen, wo die Flüssigkeit geringere Gasmengen enthält, weil aus diesen schwerer diejenige Gasmenge an einem Punkte zu sammeln sein wird, welche nöthig ist, um den bei gleicher Grösse der Gasblasen gleich bleibenden Druck der capillaren Fläche im Gleichgewicht zu halten. Hierzu wird bei gleich grossen Blasen immer dieselbe Menge Gas herbeigeschafft werden müssen, während die Menge, welche den Druck der über der Flüssigkeit stehenden Atmosphäre trägt, diesem Drucke proportional ist, so dass in demselben Maasse mehr Gas zur Füllung der Blase verlangt wird, als die Flüssigkeit mehr davon enthält.

In der That fand ich, dass bei möglichst vollständiger Entfernung des Gases über der Flüssigkeit Blasen sich bei geringerer elektromotorischer Kraft entwickelten, als wenn der

Druck des Knallgases über der Flüssigkeit $^1/_3$ oder $^1/_2$ Atmosphäre betrug. Aber die Unterschiede waren nicht so gross, als nach der Theorie zu erwarten wäre. Ich habe Blasenbildung
bei 1.5877 Volts gesehen, wenn blos der Dampfdruck ohne 664
messbaren Gasdruck über der Flüssigkeit lastete, und in demselben Gefässe trat die Blasenbildung erst bei 1.6314 Volts ein, als ein Druck von 380^{mm} Knallgas und 16^{mm} Wasserdampf auf der Flüssigkeit lastete. Indessen habe ich mich überzeugt, dass auch bei noch geringeren elektromotorischen Kräften, als die erstangegebene ist, das Barometer langsam fällt, selbst wenn keine sichtbare Gasentwickelung mehr stattfindet, und ich hoffe durch Bestimmung der Grenze, bis zu welcher es fällt, ein genaueres Maass für die einem bestimmten Drucke entsprechende elektromotorische Kraft zu erhalten, als die Beobachtung der Blasenbildung mir bisher ergeben hat. Solche Versuche erfordern indessen verhältnissmässig lange Zeit; deshalb kann ich sie heut noch nicht vollendet vorlegen.

Arbeit bei der Diffusion.

Wenn die Masse δm eines aufgelösten Gases aus einem gesättigteren Theile der Flüssigkeit, welche $(m + dm)$ in der Volumeinheit enthält, übergeht in einen weniger gesättigten Theil, der nur m enthält, so verschwindet freie Energie, deren Betrag nach Gleichung 2a sein würde

$$\frac{\partial}{\partial m}[\delta \mathfrak{F}] = \frac{\vartheta \cdot R}{m} \cdot \delta m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4$$

Dieses Arbeitsäquivalent kann nur in Wärme verwandelt werden, da keine andere Form freier Energie dafür wieder auftritt. Zu der Wärmeentwickelung durch den Strom, die in den elektrolytischen Leitern der Reibung der elektrolytisch fortgeführten Jonen entspricht, wird also in denselben Flüssigkeiten auch noch eine Wärmeentwicklung durch die Diffusion der aufgelösten, elektrisch neutralen Bestandtheile kommen müssen, die den gleichartigen Jonen entgegengesetzt wandern. Wenn man jeden Process, der einen Theil der Energie der strömenden Elektricität in Wärme verwandelt, als Widerstand bezeichnen will, so wäre in der That hiermit ein Vorgang gegeben,

den man als Übergangswiderstand der Zelle bezeichnen könnte.

Wenn der oben angenommene Übergang aus der Sättigung $(m + dm)$ in m auf der Strecke ds zu Stande kommt, so wäre der oben gegebene Werth der entsprechenden Arbeit, dividirt durch ds die Kraft, welche jedes Theilchen der Masse m in Richtung von ds fortzutreiben sucht. Da nun diese Kraft umgekehrt proportional zu m ist, andererseits die angetriebene Masse proportional m, so wird innerhalb solcher Grenzen der Dichtigkeit des gelösten Gases, wo die Reibung, welche die diffundirende Masse gegen das Wasser erleidet, unabhängig von
665 deren Dichtigkeit und proportional ihrer Geschwindigkeit ist, die Strömungsgeschwindigkeit der Diffusion unabhängig vom Werthe von m und proportional zu $\partial m / \partial s$ werden müssen. Daraus ergiebt sich dann, nach den bekannten in der Theorie der Wärmeleitung angewendeten Betrachtungen, dass innerhalb solcher Grenzen, wo die genannten Bedingungen zutreffen, für jedes der Gase sei

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -k^2 \left[\frac{\partial^2 m}{\partial t} + \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial z^2} \right] \quad \ldots\ldots\ldots 5$$

worin m, wie vorher bestimmt, die in der Volumeneinheit aufgelöste Menge des Gases bezeichnet und k^2 eine von der Natur des Gases und der Flüssigkeit abhängige Constante.

Die Gleichung 5, deren Integrationsformen aus der Theorie der Wärmeleitung bekannt sind, mit den vorher aufgestellten zusammen genommen, erlaubt zunächst wenigstens für prismatische Formen des elektrolytischen Leiters eine ziemlich vollständige analytische Theorie der Polarisationsströme zu geben, deren Consequenzen mit der Erfahrung in allen wesentlichen Zügen zu stimmen scheinen.

CXIV.

Bestimmung magnetischer Momente mit der Waage.

(Aus den Sitzungsberichten der Akad. d. Wiss. zu Berlin. Sitzung vom 5. April 1883. S. 405 bis 408.)

Die zu beschreibenden Versuche sind bisher von mir nur 405
mit einer guten chemischen Waage ausgeführt worden, die aber nicht frei von Eisentheilen war. Der Einfluss dauernder Magnetisirung der vorhandenen Stahlstücke konnte durch mehrfache Wägungen bei umgekehrter Richtung der Magnete eliminirt werden, aber der Verdacht, dass temporäre Magnetisirung durch Influenz der angewendeten Magnete mitwirke, konnte nicht ganz beseitigt werden. Ich hoffe demnächst diese Messungen mit einer eisenfrei gebauten und für Spiegelablesung eingerichteten Waage wiederholen zu können. Aber schon die bisherigen Versuche zeigen, dass man auf diesem Wege sehr constante und mindestens bis auf $^1/_4$ Procent genaue Werthe erreichen kann, bei denen man von den durch die unablässigen Veränderungen des Erdmagnetismus verursachten Störungen vollständig frei ist. Das letztere erachte ich als den wesentlichsten Theil der Methode.

Die Controlle darüber, ob Magnetstäbe von geeigneter Grösse unverändertes Moment behalten haben, eine Frage, die bei vielen magnetischen Messungen in Betracht kommt, kann nach der zu beschreibenden Methode auch mit jeder hinreichend feinen, wenn auch nicht eisenfreien Waage ausgeführt werden.

Zu einer vollständigen Bestimmung braucht man drei nahehin gleiche Magnetstäbe. Die von mir gebrauchten waren hohle Röhren von Stahl 10^{cm} lang und $1{,}3^{cm}$ im Durchmesser.



Die Röhrenform ist bequem, weil sie sich gut aufhängen lassen und verhältnissmässig starken Magnetismus halten. Zur Ausführung der Messung werden zwei von den Stäben auf passende Träger geschoben und an Häkchen aufgehängt, welche in der oberen Biegung der Bügel, die die Schaalen tragen, angebracht sind. Der eine von den Magneten *V* hängt vertical, der andere *H* horizontal, und zwar so, dass seine Axe verlängert die Mitte von *V* trifft. Wenn *H* seinen Nordpol gegen *V*
406 wendet und letzterer den seinigen nach oben, so drängt der Nordpol von *H* den von *V* abstossend nach oben, während er den Südpol von *V* in die Höhe zieht. Umgekehrt wird der Nordpol von *H* und mit ihm die zweite Schaale der Waage nach unten gedrängt. Bei gleicher Belastung beider Schaalen steigt also *V* und sinkt *H*. Umgekehrt, wenn man einen von beiden Magneten umkehrt. Die Differenz der Belastung, welche man anwenden muss bei ungeänderter Lage von *H*, um die Waage in Gleichgewicht zu setzen erst bei Wendung des Nordpols von *H* nach oben, dann nach unten, misst die vierfache Verticalkraft, mit der die beiden Magnete auf einander wirken. Durch Umkehren von *H* und Wiederholung der Wägung kann man die Wirkungen des permanenten Magnetismus von Stahltheilen der Waage eliminiren. Endlich kann man zur Controlle noch den bisher horizontalen Magneten vertical hängen, und umgekehrt; man muss dann dasselbe Resultat erhalten, wenn nicht die mittlere Poldistanz der beiden Magnete (s. unten) erheblich verschieden ist.

Wenn m und μ die Momente der beiden Magnete sind, a die Entfernung ihrer Mittelpunkte, die gleich dem Abstand der seitlichen Schneiden der Waage von einander ist (30^{cm} bei der bisher von mir gebrauchten Waage), so ist die Gewichtsdifferenz G, auf absolute Krafteinheiten reducirt, bei Umkehr eines der Magnete der Hauptsache nach gegeben durch den Ausdruck:

$$G = \frac{12 \cdot m \cdot \mu}{a^4}.$$

Der Werth von G war für die stärksten der bisher von mir gebrauchten Magnete 0.0219^{grm}, wobei die Einheiten der letzten Ziffer bei vorsichtigem Wägen sicher herauskommen.

Natürlich dürfen die Magnete beim Umhängen nur mit Zangen oder reinen Handschuhen angefasst werden. Mit der besonders für diesen Zweck construirten Waage hoffe ich noch eine Stelle mehr zu erreichen.

Hat man drei ähnliche Magnete und bestimmt die drei Grössen $m_1 m_2$, $m_1 m_3$, und $m_2 m_3$, so ergiebt sich

$$m_1 = \sqrt{\frac{(m_1 m_2) \cdot (m_1 m_3)}{m_2 m_3}}.$$

Das Verhältniss $m_1 : m_2$ wurde auch mit einem Bifilarmagnetometer nach F. Kohlrausch bestimmt. Der durch Wägung gefundene Werth stimmte gut mit dem Mittel der magnetometrischen Werthe, aber letztere schwankten viel mehr als der erstere.

Bei den angegebenen Dimensionen der Waage und der Magnete sind die höheren Glieder der Entwickelung nicht ganz zu vernachlässigen. Man lege die x Axe in die Axe 407
des horizontalen Magneten, die y Axe vertical, bezeichne mit H und V die Momente der betreffenden Magnete und setze

$$h = \Sigma(\mu x^3) \text{ und } v = \Sigma(\mu y^3),$$

so ist der vollständigere Werth der Glieder, die nach Combination der vier oben erwähnten Wägungen übrig bleiben,

$$G = \frac{12 \cdot H \cdot V}{a^4} + \frac{40\, H \cdot v - 30\, V \cdot h}{a^6}.$$

Die Grössen

$$\frac{v}{V} = \mathfrak{y}^2 \text{ und } \frac{h}{H} = \mathfrak{x}^2$$

kann man, da es sich nur um Correctionsglieder handelt, durch magnetometrische Messungen bestimmen, oder auch mit der Waage, indem man die Wägung bei höherer oder tieferer Aufhängung eines der Magnete wiederholt. Setzt man

$$H = 2\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{x} \text{ und } V = 2\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{y}$$

so ist

$$h = 2\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{x}^3 \text{ und } v = 2\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{y}^3$$

d. h. diese ersten Glieder der Fernwirkung sind dieselben, wie sie zwei einzelne punktförmige magnetische Quanta $+\mathfrak{h}$ und $-\mathfrak{h}$ in der Entfernung $2\mathfrak{x}$ von einander, beziehlich $+\mathfrak{v}$

und — $\mathfrak{v}$ in der Entfernung $2\mathfrak{y}$ hervorbringen würden. Diese Grössen sind es, die ich oben als mittlere Entfernung der Pole bezeichnet habe. Hr. Kohlrausch hat schon bemerkt, dass sie bei den Röhrenmagneten meist $^5/_6$ ihrer Länge betragen. Ich habe bei den beiden oben erwähnten Magneten 0.84 und 0.86 gefunden. Es wird bei Anwendung dieser Bezeichnung

$$G = \frac{12\,H \cdot V}{a^4} \cdot \left\{1 + \frac{20 \cdot \mathfrak{y}^2 - 15 \cdot \mathfrak{x}^2}{6a^2}\right\}.$$

Sind diese Grössen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bestimmt, so ist die Berechnung der Kraft am besten unter der Fiction auszuführen, dass aller Magnetismus in den betreffenden beiden Punkten concentrirt sei, und macht sich dann sehr einfach.

Wenn das magnetische Moment eines Magneten nach seinem absoluten Werthe genau bestimmt ist, und jeden Augenblick genau controllirt werden kann: so sind mittels magnetometrischer Methoden alle anderen magnetischen Momente und alle Stromintensitäten leicht auf jenes eine zurückzuführen. Magnetische Momente ändern sich freilich auch; aber bei nicht ganz neu magnetisirten und gut gehärteten Stahlstücken gehen in Wochen und Monaten Veränderungen vor sich, wie
408 sie der Erdmagnetismus zuweilen in fünf Minuten erleidet. Es lässt sich daher offenbar eine viel sicherere absolute Bestimmung der Stromstärken erreichen, wenn man ihre magnetische Kraft mit dem jederzeit controllirbaren Moment eines gut gehärteten Stahlstabes oder Magnetsteins vergleicht, als wenn man sie mittels der Tangentenbussole auf den Erdmagnetismus bezieht, der in unseren mit verborgenem Eisen durchwebten Gebäuden ausserdem wenige Fuss entfernt von einer ersten Beobachtungsstelle ganz andere Werthe zeigen kann.

CXV.

Studien zur Statik monocyklischer Systeme.

Aus den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Sitzung vom 6. März 1884. S. 159 bis 177.
Die drei ersten Paragraphen sind später nochmals in Borchardt-Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik (Bd. 97) abgedruckt worden als Anfang der weiter unten folgenden Abhandlung Nr. CXVI, in der ich nach noch weiter gehenden Verallgemeinerungen der hier gewonnenen Resultate gestrebt habe. Die auf diesen Abdruck bezüglichen Seitenzahlen sind hier ebenfalls, aber eingeklammert beigefügt.

Ich verstehe unter *monocyklischen Systemen* solche mecha- 159
nische Systeme, in deren Innerem eine oder mehrere stationäre, (111)
in sich zurücklaufende Bewegungen vorkommen, die aber, wenn es mehrere sind, in ihrer Geschwindigkeit nur von einem Parameter abhängen. Ich setze ferner voraus, dass zwischen den einzelnen Körpern, welche das System bilden, nur conservative Kräfte wirken, beziehlich feste Verbindungen bestehen, während die äusseren Kräfte, welche noch hinzukommen, nicht nothwendig conservativ zu sein brauchen. Ich bezeichne die Aufgaben, die ich behandeln will, als *statische*, insofern vorausgesetzt wird, dass die Aenderungen, welche im Zustande des Systems erfolgen, mit so geringer Geschwindigkeit vor sich gehen, dass das System sich während derselben niemals merklich von solchen Zuständen entfernt, in denen es dauernd verweilen könnte.

Das Hauptinteresse solcher Untersuchungen liegt darin, dass auch die Wärmebewegung, wenigstens in ihren nach aussen hin beobachtbaren Wirkungen, die wesentlichen Eigenthümlichkeiten eines monocyklischen Systems zeigt, und dass namentlich

die beschränkte Verwandlungsfähigkeit der Arbeitsäquivalente, die in die Form von Wärme übergegangen sind, auch für die Arbeit der monocyklischen Systeme unter gewissen Bedingungen gilt. Zwar ist die Wärmebewegung nicht im strengen Sinne monocyklisch. Jedes einzelne Atom wechselt wahrscheinlich fortdauernd in der Art seiner Bewegung, und erst dadurch, dass in einer ungeheuer grossen Anzahl von Atomen stets alle möglichen Stadien der Bewegung repräsentirt sind, wenn auch jedes einzelne Stadium bald von diesem bald von jenem Atome ausgeführt wird, tritt der mechanische Charakter einer mono-
(112) cyklischen Bewegung ein. In den theoretischen Untersuchungen über Wärmebewegung, soweit solche bisher durchführbar waren, müssen wir fortdauernd mit Durchschnittswerthen der in der Zeit für dasselbe Theilchen auf einander folgenden Werthe rechnen. Diejenigen Gesetze der Bewegung, welche, trotz des Schwankens der Einzelwerthe, sich hierbei nachweisen lassen, können dadurch nicht ungültig werden, dass der Durchschnitts-
160 werth bei den eigentlich monocyklischen Systemen aus lauter gleichen Einzelwerthen zu nehmen ist. In diesem Sinne schliessen sich die vorzulegenden Studien an die Theorie der Wärme an.

§ 1.

Recapitulation der Gesetze der Wärme.

Wir setzen voraus, dass wir den Zustand eines in allen seinen Theilen gleich temperirten Körpers oder Systems von Körpern vollständig charakterisiren können durch die absolute Temperatur ϑ und durch eine gewisse Anzahl von Parametern p_a, welche so gewählt sind, dass Aenderung der Temperatur ohne Aenderung der Grössen p_a die Einnahme oder Ausgabe keiner anderen Arbeitsform als eines Quantums Wärme bedingt. Es werden in diesem Falle die Parameter p_a Raumabmessungen, im weiteren Sinne genommen, sein müssen. Unter ihnen kommt sehr gewöhnlich das Volumen des Ganzen oder einzelner Theile vor, aber sie können auch angeben, wie viel von einer besonderen Substanz oder wie viel Elektricität in einem bestimmten Raume zu finden sei.

Die frei verwandelbare, also nicht in Wärme übergeführte Arbeit, welche das betrachtete System nach aussen hin abgiebt,

wenn der Parameter p_a in den Werth $(p_a + dp_a)$ übergeht, bezeichne ich mit $P_a . dp_a$. Die Grösse P_a ist also das *Kraftmoment* der innern Kräfte, welches auf Vergrösserung des Parameters p_a hinwirkt. Es wäre, wie mir scheint, nichts dagegen einzuwenden, dass man P_a als *Kraft in Richtung von* p_a bezeichnete, wie dies schon in vielen Beispielen der Anwendung geschehen ist. Jede der Grössen P_a ist im Allgemeinen Function des ϑ und der sämmtlichen p_a. Wie die den einzelnen P_a das Gleichgewicht haltenden Componenten gegebener äusserer Kräfte zu finden und zu sondern sind, ist in den Lehrbüchern genügend behandelt.

Wir bezeichnen ferner mit U die gesammte innere Energie des Systems und mit S seine Entropie. Beide Grössen sind ebenfalls Functionen von ϑ und den p_a. Endlich nennen wir (113)
dQ die während einer verschwindend kleinen Aenderung der Grössen ϑ und p_a in das System eingetretene Wärme, gemessen durch ihr Arbeitsäquivalent. Dann ist bekanntlich

$$\left.\begin{aligned} dQ &= dU + \Sigma(P_a . dp_a) \\ &= \vartheta . dS. \end{aligned}\right\} \quad (1.)$$

Diese beiden Gleichungen bilden die Grundlage der mechanischen Wärmetheorie. Aus ihnen folgt in bekannter Weise, dass von der Wärme dQ_1, die bei der Temperatur ϑ_1 161
des Körpers in ihn eintritt, immer nur ein Theil in frei verwandelbare Arbeit übergeführt werden kann. Wenn so viel Wärme dQ_0 in der Temperatur ϑ_0 abgegeben wird, dass schliesslich der ursprüngliche Zustand des Körpers in einem vollkommen reversiblen Processe wieder hergestellt werden kann, ist

$$\frac{dQ_1}{\vartheta_1} = \frac{dQ_0}{\vartheta_0},$$

und es wird also dabei in andere Arbeit verwandelt das Quantum:

$$dQ_1 \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\vartheta_1} = dQ_0 \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\vartheta_0}.$$

Mit Bezug auf das Folgende erlaube ich mir noch folgende Bemerkungen zu machen: Die *wesentliche physikalische Bedeutung der Temperatur* ϑ ist die, dass ihre Gleichheit oder

Ungleichheit zwischen zwei Körpern darüber entscheidet, ob und in welcher Richtung Wärme vom einen zum andern übergehen könne. Zwei Körper von gleicher Temperatur, die sich gegenseitig berühren, stören sich gegenseitig nicht in ihrer Wärmebewegung. Sie bilden, so lange vollkommene Ausgleichung der Temperatur zwischen ihnen stattfinden kann, wiederum ein einziges zusammengesetztes Körpersystem, auf welches die Gleichungen (1.) angewendet werden können. Unterscheiden wir die Grössen, welche sich auf die einzelnen Theilsysteme beziehen, durch die Indices 1 und 2, so ist für gleichzeitige Aenderungen

$$dQ_1 = dU_1 + \Sigma(P_a . dp_a) = \vartheta . dS_1,$$
$$dQ_2 = dU_2 + \Sigma(P_b . dp_b) = \vartheta . dS_2;$$

also wenn wir addiren:

$$d(Q_1 + Q_2) = d(U_1 + U_2) + \Sigma(P . dp) = \vartheta . d(S_1 + S_2).$$

Die Summe der Kraftmomente ist in der letzten Gleichung auf alle Kräfte beider Systeme zu erstrecken; $(U_1 + U_2)$ ist die
(114) gesammte Energie des vereinigten Systems, $d(Q_1 + Q_2)$ die gesammte zugeleitete Wärme, und die Gleichung zeigt, dass $(S_1 + S_2)$ die Entropie des vereinigten Systems ist.

Ohne Zuleitung von Wärme, wenn also $dQ = 0$, ist in jedem Einzelsystem auch $dS = 0$, oder S constant für alle reversiblen Processe.

Dies gilt für S_1 und S_2, so lange die beiden Körper einzeln sind, gilt aber auch für die Summe $(S_1 + S_2)$, wenn sie mit gleicher Temperatur vereinigt werden. Daraus folgt der von Hrn. Clausius gezogene Schluss, wonach die Summe der Entropiewerthe S also weder in der Trennung noch in der Verbindung durch reversible Processe geändert werden kann.

162 Dasselbe gilt, wie leicht zu sehen, für beliebig viele Körper, die beliebig getrennt und in gleicher Temperatur verbunden werden können, und diese Folgerung fliesst vollständig aus den beiden Gleichungen (1.) her. Da diese Sätze für unbeschränkte Veränderungen der Parameter p_a und p_b gelten, so gelten sie auch im Fall, wo feste Verbindung beider Körper Beschränkungen in der Veränderlichkeit der p einführt.

Die Entscheidung über die Richtung des Wärmeflusses

oder aber das Stattfinden von Wärmegleichgewicht würde auch nach der Ungleichheit oder Gleichheit von Werthen einer beliebig gewählten Function der Temperatur entschieden werden können, die deren Werth eindeutig bestimmt. Aus

$$\vartheta_1 = \vartheta_2$$

folgt auch

$$f(\vartheta_1) = f(\vartheta_2).$$

Die verschiedenen Thermometerscalen des Quecksilber-, Alkohol-, Luftthermometers geben bekanntlich solche nach der Art des thermometrischen Körpers verschiedene Functionen von ϑ.

Andererseits, wenn man unter s eine Function von S versteht, so würde man zu setzen haben

$$dQ = \vartheta \cdot \frac{\partial S}{\partial s} \cdot ds,$$

und wenn man bezeichnet:

$$\vartheta \cdot \frac{\partial S}{\partial s} = \eta,$$

so erhält man

$$dQ = \eta \,.\, ds\,. \qquad (1^a.)$$

Das s als Function von S ist, wie dieses, eine Function der p_a und des aus der Gleichung (1^a.) verschwundenen ϑ. Da η nach seiner obigen Definition eine Function des ϑ und (115)
der p_a ist, so kann ϑ aus η und den p_a bestimmt, und η an Stelle von ϑ als unabhängige Variable in die Werthe von U, p_a und s eingeführt werden. Die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} dQ &= dU + \Sigma(P_a . dp_a) \\ &= \eta \,.\, ds \end{aligned}\right\} \qquad (1^b.)$$

haben dann genau dieselbe Form, wie die Gleichungen (1.), aber es findet der wichtige Unterschied statt, dass η nicht mehr diejenige Grösse ist, deren Gleichheit das Wärmegleichgewicht zwischen zwei Körpern anzeigt. Diese Eigenschaft kommt nur der einen $\eta = \vartheta$ in der ganzen Reihe der Functionen zu, die durch die Gleichung (1^a.) gegeben sind.

Endlich ist noch auf einen Umstand zu merken, den ich schon in meiner ersten thermodynamischen Abhandlung[1]) vom

[1]) In Bd. II dieser Sammlung als Nr. XCVII abgedruckt.

2. Februar 1882 betont habe. In den Gleichungen (1.) kommt
163 als Arbeit keine lebendige Kraft der Theile des Systems vor, d. h. es ist vorausgesetzt, dass die Aenderungen $dp_\mathfrak{a}$ so langsam vor sich gehen, dass die lebendigen Kräfte der in geordneter Bewegung begriffenen Massen gegen die übrigen Arbeitsäquivalente verschwinden. Auch ist weiter vorausgesetzt, dass die Aenderungen der einzelnen Theile des Systems so langsam erfolgen, dass eine vollständige Ausgleichung ihrer Temperaturen stattfinden kann. Also gelten die Gleichungen (1.) nur für *Aenderungen* $d\vartheta$ *und* $dp_\mathfrak{a}$ *von verschwindender Geschwindigkeit.* In diesem Sinne sind die besprochenen Gleichungen der Thermodynamik also auch nur in dem oben erörterten Sinne als Gesetze der Statik thermischer Systeme zu betrachten, und wir haben nur in den Gesetzen der Statik monocyklischer Systeme die Analoga zu suchen. Uebrigens sind beide dem *Gesetze von den virtuellen Geschwindigkeiten,* welches sich auf ganz unbewegte Systeme bezieht, darin gleich, dass auch dieses nur von den bei langsamster Bewegung ausführbaren Arbeitsübertragungen handelt.

Die Zurückführung der in den Gleichungen (1.) vorkommenden Functionen auf die Differentialquotienten einer einzigen Function, wie sie Hr. Massieu[1]) zuerst ausgeführt hat, kann, wie schon Hr. Gibbs[2]) gezeigt hat, auch an der allgemeinen Form (1^b.) ausgeführt werden, wenn man η und die $p_\mathfrak{a}$ als unabhängige Variable benutzt. Dann ist zu setzen

(116)
$$dU = \frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot d\eta + \sum_\mathfrak{a}\left[\frac{\partial U}{dp_\mathfrak{a}}\cdot dp_\mathfrak{a}\right],$$
$$ds = \frac{\partial s}{\partial \eta}\cdot d\eta + \sum_\mathfrak{a}\left[\frac{\partial s}{\partial p_\mathfrak{a}}\cdot dp_\mathfrak{a}\right],$$

und es folgt, wenn wir setzen

$$H = U - \eta\,.\,s, \tag{1^c.}$$

aus den Gleichungen (1^b.):

---

[1]) Mémoires des Savants étrangers t. XXII. Journal de Physique par d'Almeida T. VI. p. 216.

[2]) Transactions Connecticut Acad. III. p. 108 bis 248; 343 bis 524. Silliman's Journal 1878. XVI. p. 441 bis 458.

$$\frac{\partial U}{\partial p_\mathfrak{a}} + P_\mathfrak{a} = \eta \cdot \frac{\partial s}{\partial p_\mathfrak{a}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \eta \cdot \frac{\partial s}{\partial \eta}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} P_\mathfrak{a} &= -\frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{a}}, \\ s &= -\frac{\partial H}{\partial \eta}, \\ U &= H - \eta \cdot \frac{\partial H}{\partial \eta}. \end{aligned}\right\} \quad (1^d.)$$

Dies sind die drei Beziehungen, welche ich den thermo- 164
dynamischen Folgerungen in meinen früheren Mittheilungen zu Grunde gelegt hatte, mich beschränkend auf den engeren Fall, wo $\eta = \vartheta$. Die Function H ist dort mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet und *freie Energie* genannt.

Der Werth des H ist natürlich verschieden je nach der Wahl des η. Denn das in seinem Werthe (1^c.) vorkommende Product

$$\eta \cdot s = \vartheta \cdot s \cdot \frac{\partial S}{\partial s}$$

variirt mit der Wahl des s als Function von S. Diese verschiedenen Werthe des H sind also alle in Jacobis Sinne Kräftefunctionen für die mechanischen Leistungen des Systems, aber sie entsprechen der unterscheidenden Bedingung, dass ihre besondere Variable η constant sein soll. Die von mir gebrauchte Kräftefunction ist die *isotherme;* man kann aber, wie Hr. Gibbs zeigte, auch eine *adiabatische* u. s. w. bilden; die letztgenannte fällt zusammen mit der Function U, wie die Gleichungen (1^b.) unmittelbar zeigen, wenn man darin die $p_\mathfrak{a}$ und s als unabhängige Variable einführt.

Nun liegt in dem Umstande, dass wir das Arbeitsäquivalent der Wärmemenge

$$dQ = dU + \Sigma\,(P_\mathfrak{a} \,.\, dp_\mathfrak{a})$$

in der Form (117)

$$dQ = \eta \,.\, ds$$

ausdrücken können, für die hier vorkommenden physikalischen Grössen nur insofern etwas Charakteristisches als Integrabilität der erstgenannten Gleichung auch für eine Mehrzahl von Parametern p_a vorausgesetzt ist, wie sie für nur einen derselben sicher besteht.[1]) Dann kann diese Umformung jedenfalls für jede Art von Abhängigkeit zwischen den Functionen U, P_a und p_a vollzogen werden, wenn nur die P_a mit U und den p_a sich continuirlich ändern. Es muss sich unter dieser Voraussetzung das Integral der Gleichung

$$dQ = 0$$

in der Form

$$s = \text{Const.}$$

oder

$$S = f_{(s)} = \text{Const.}$$

bilden lassen, welches das Gesetz der adiabatischen Aenderungen ausdrückt. Wenn also für Aenderungen des U und der p_a ist:

$$0 = dU + \Sigma [P_a . dp_a],$$

so ist auch immer:

$$0 = \frac{\partial s}{\partial U} \cdot dU + \Sigma \left[\frac{\partial s}{\partial p_a} \cdot dp_a \right],$$

welche Gleichungen für übrigens beliebige Werthe des dU und der dp_a nur dann aus einander folgen, wenn für jedes einzelne a

$$\frac{\partial s}{\partial U} = \frac{1}{P_a} \cdot \frac{\partial s}{\partial p_a} .$$

165 Wenn wir also die erste der Gleichungen $(1^b.)$ mit $\partial s / \partial U$ multipliciren, erhalten wir

$$\frac{\partial s}{\partial U} \cdot dQ = ds,$$

und wenn wir η definiren durch die Gleichung

$$\eta \cdot \frac{\partial s}{\partial U} = 1,$$

[1]) Dieser Satz ist geändert (1893).

so ergiebt sich

$$dQ = \eta \,.\, ds.$$

Das für die physikalischen Eigenthümlichkeiten der Wärmebewegung Charakteristische ist also nicht der Umstand, dass der Ausdruck für dQ sich in die letztgenannte Form bringen lässt, sondern liegt allein darin, dass einer unter den möglichen integrirenden Nennern η der Gleichung $dQ = 0$ gleichen Werth haben muss für je zwei Körper, zwischen denen Wärmegleichgewicht besteht.

§ 2. (118)

Die allgemeinen Gleichungen der Mechanik für polycyklische Systeme.

Wir setzen zunächst voraus ein beliebig zusammengesetztes mechanisches System, zwischen dessen einzelnen Theilen nur conservative Kräfte wirken, beziehlich feste Verbindungen bestehen und dessen augenblickliche Lage durch eine Anzahl allgemeiner Coordinaten p_a (die also nothwendig Abmessungen räumlicher Grössen sein müssen) vollständig bestimmbar ist. Die Momente äusserer Kräfte dagegen, welche nicht conservativ zu sein brauchen und welche auf Vergrösserung der Coordinaten p_a hinwirken, bezeichnen wir, wie vorher, mit $(-P_a)$, so dass

$$P_a \,.\, dp_a$$

die Arbeit ist, welche die inneren Kräfte des Systems in der Ueberwindung jener äusseren Kraftmomente während der Aenderung dp_a ausüben. Wir setzen ferner zur kürzeren Bezeichnung die Differentialquotienten

$$\frac{dp_a}{dt} = q_a, \qquad (2.)$$

die potentielle Energie des Systems gleich Φ, die lebendige Kraft gleich L. Die erstere, Φ, ist unter den genannten Bedingungen eine Function der Coordinaten p_a allein, die zweite, 166
L, eine homogene Function zweiten Grades der Grössen q_a, deren Coefficienten Functionen der p_a sind. Bei der Bildung der partiellen Differentialquotienten von L nach den p_a und den q_a werden diese als unabhängige Variable betrachtet, und die

in Gleichung (2.) ausgesprochene Beziehung zwischen ihnen nicht berücksichtigt. Aus der angegebenen Beschaffenheit der Function L folgt bekanntlich:

$$2L = \sum_{\mathfrak{a}} \left[q_{\mathfrak{a}} \cdot \frac{\partial L}{\partial q_{\mathfrak{a}}} \right]. \qquad (2^a.)$$

Unter diesen Umständen sind nach Lagrange die Bewegungsgleichungen des Systems von der Form:

$$P_{\mathfrak{a}} = -\frac{\partial}{\partial p_{\mathfrak{a}}} [\Phi - L] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial q_{\mathfrak{a}}} \right]. \qquad (2^b.)$$

Wenn wir setzen:

$$\Phi - L = H, \qquad (2^c.)$$

und bemerken, dass, weil Φ von den $q_{\mathfrak{a}}$ unabhängig ist,

$$\frac{\partial L}{\partial q_{\mathfrak{a}}} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{a}}}:$$

(119) so können wir die genannten Bewegungsgleichungen auch schreiben:

$$P_{\mathfrak{a}} = -\frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{a}}} + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{a}}} \right]. \qquad (2^d.)$$

Dann ist die Gesammtenergie:

$$\begin{aligned} U &= \Phi + L \\ &= H - \Sigma \left[q_{\mathfrak{a}} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{a}}} \right]. \qquad (2^e.) \end{aligned}$$

In diesen allgemeinsten Ausdruck der Bewegungsgleichungen wollen wir nun folgende Beschränkungen einführen:

1. Für eine besondere Gruppe der Coordinaten, die wir durch den Index $\mathfrak{b}$ unterscheiden wollen, und die wir als schnell veränderlich betrachten, nehmen wir an, dass die ihrer Veränderung entsprechende Art der Bewegung eine in sich zurücklaufende sei, und dass sich während dieser Bewegung weder Φ noch L merklich ändern, so dass also beide Grössen zwar von den $q_{\mathfrak{b}}$, aber nicht von den $p_{\mathfrak{b}}$ abhängig seien. Unter dieser Voraussetzung wird Gleichung (2^d.)

$$P_{\mathfrak{b}} = + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}} \right]. \qquad (3.)$$

Wenn wir diese Gleichung mit $q_{\mathfrak{b}} . dt$ auf beiden Seiten 167
multipliciren und setzen

$$P_{\mathfrak{b}} . q_{\mathfrak{b}} . dt = - dQ_{\mathfrak{b}},$$

so ist $dQ_{\mathfrak{b}}$ die auf Beschleunigung der Bewegung $q_{\mathfrak{b}}$ verwendete äussere Arbeit. Wenn wir also zu kürzerer Bezeichnung den Werth

$$\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}} = - s_{\mathfrak{b}} \tag{3^a.}$$

setzen, so ergiebt (3.):

$$dQ_{\mathfrak{b}} = q_{\mathfrak{b}} . ds_{\mathfrak{b}}, \tag{3^b.}$$

worin das $ds_{\mathfrak{b}}$ das vollständige Differential der Grösse $s_{\mathfrak{b}}$ bezeichnet.

Beispiele solcher Bewegungen wären Kreisel in reibungslosen Axenlagern laufend, symmetrisch um die Rotationsaxe gebaut. Wenn wir als Parameter $q_{\mathfrak{b}}$ die Winkelgeschwindigkeit setzen, wäre $s_{\mathfrak{b}}$ das Moment der Rotationsbewegung, d. h. das Product aus dem Trägheitsmoment und der Winkelgeschwindigkeit.

Ein anderes Beispiel wäre der Fluss einer reibungslosen Flüssigkeit in einem in sich zurücklaufenden Canale, mit elastischen Wänden, also dehnbar im Querschnitt, biegsam und dehnbar in der Länge. Wenn wir die Menge der in der
Secunde durch jeden Querschnitt ω strömenden Flüssigkeit als (120)
$q_{\mathfrak{b}}$ benutzen, wäre

$$s_{\mathfrak{b}} = \int u . dx,$$

worin dx ein Längenelement der Axe des Canals und

$$u = \frac{1}{\omega} . q$$

die Geschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen in Richtung von dx bezeichnet.

2. Uebrigens wollen wir voraussetzen, wie dies in den Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie erwähntermaassen immer geschehen ist, dass die Aenderungen aller anderen Parameter $p_{\mathfrak{a}}$ und ebenso die der Grössen $q_{\mathfrak{b}}$ mit verschwindender Geschwindigkeit erfolgen, so dass alle mit $q_{\mathfrak{a}}$, $dq_{\mathfrak{a}} / dt$ oder

$dq_{\mathfrak{b}}\,/\,dt$ multiplicirten Ausdrücke als verschwindende Grössen erster Ordnung zu behandeln sind.

Es setzt dies voraus, dass die äusseren Kräfte, die auf das System wirken, sich niemals weit von den Werthen entfernen, welche sie haben müssten, um die $p_{\mathfrak{a}}$ und $q_{\mathfrak{b}}$ constant zu machen. Dann werden in der That die sämmtlichen nach der Zeit genommenen Differentialquotienten, die in den Gleichungen (2^d.) vorkommen, sehr klein werden, und das System sich fortdauernd einem stationären Zustande sehr nahe befinden, in dem es beliebig lange Zeit ausdauern könnte. Ein System, welches diesen Bedingungen genügt, wollen wir ein *polycyklisches* nennen. Die Gleichungen (2^d.) reduciren sich für ein solches auf:

168
$$P_{\mathfrak{a}} = -\frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{a}}}, \tag{3^c.}$$

$$dQ_{\mathfrak{b}} = q_{\mathfrak{b}} \,.\, ds_{\mathfrak{b}} \tag{3^b.}$$

$$s_{\mathfrak{b}} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}}. \tag{3^a.}$$

Unter den bisher gemachten Voraussetzungen wird die in den Gleichungen (3.) bis (3^c.) vorkommende Function H immer noch den in (2^c.) angegebenen Werth haben:

$$H = \Phi - L,$$

$$2L = -\Sigma\left[q_{\mathfrak{a}} \,.\, \frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{a}}}\right],$$

und L wird eine ganze homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten $q_{\mathfrak{a}}$ sein. In letzterer Beziehung aber kann eine Aenderung eintreten, *wenn eine oder mehrere der Kräfte, die wir durch den Index* $\mathfrak{c}$ *unterscheiden wollen, dauernd*
(121) *gleich Null sind, und wir die entsprechenden Gleichungen*

$$0 = \frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{c}}}, \tag{4.}$$

benutzen, um die Grössen $p_{\mathfrak{c}}$ *zu eliminiren.* Bezeichnen wir den Ausdruck für den Werth von H, der durch die Elimination der $p_{\mathfrak{c}}$ gewonnen wird, mit $\mathfrak{H}$, so ist

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} = \frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{a}}} + \sum_{\mathfrak{c}}\left[\frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{c}}} \cdot \frac{\partial p_{\mathfrak{c}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}}\right],$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}} + \sum_{\mathfrak{c}}\left[\frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{c}}} \cdot \frac{\partial p_{\mathfrak{c}}}{\partial q_{\mathfrak{b}}}\right].$$

Wegen der Gleichungen (4.) reducirt sich dies auf

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} = \frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{a}}},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}}.$$

Es ist also noch immer:

$$\mathfrak{H} = \Phi - L, \tag{4^a.}$$

$$P_{\mathfrak{a}} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_{\mathfrak{a}}}, \tag{4^b.}$$

$$s_{\mathfrak{b}} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_{\mathfrak{b}}}, \tag{4^c.}$$

$$L = \Sigma\,[q_{\mathfrak{b}} \cdot s_{\mathfrak{b}}]. \tag{4^d.}$$

Aber dieser Werth von L ist keine ganze homogene Function 169
zweiten Grades mehr von den Grössen $q_{\mathfrak{b}}$, da die Gleichungen (4.) im Allgemeinen Glieder zweiten Grades nach den $q_{\mathfrak{b}}$ enthalten, und die Werthe der $p_{\mathfrak{c}}$, die sich daraus ergeben, verwickelte Functionen der $q_{\mathfrak{b}}$ sein können, welche bei der Elimination diese Grössen in den Werth des Φ und in die Coefficienten der Glieder zweiten Grades des L eintreten machen. Eben deshalb sind dann auch die $s_{\mathfrak{b}}$ keine homogenen linearen Functionen der $q_{\mathfrak{b}}$, wie es vor der Elimination der Fall war.

Ein Beispiel für einen solchen Fall wäre die lebendige Kraft eines Kreisels, an dessen Axe ein Centrifugalregulator befestigt ist, dessen Hebung und Senkung durch keine wechselnde äussere Kraft $P_{\mathfrak{a}}$, sondern nur durch dauernd wirkende conservative Kräfte (Schwere, elastische Federn) beeinflusst wird, und daher als Function der Rotationsgeschwindigkeit dargestellt werden kann. In dem Werthe der lebendigen Kraft, welche gleich dem halben Product aus dem Trägheitsmoment
und dem Quadrat der Rotationsgeschwindigkeit ist, wird dann (122)
auch das genannte Moment von dieser Geschwindigkeit abhängig.

Da es später nothwendig werden wird, diesen Unterschied zu betonen, so wollen wir das System, in dem alle $p_{\mathfrak{c}}$ erhalten sind, das *vollständige*, und das nach Elimination der $p_{\mathfrak{c}}$ bleibende das *unvollständige* nennen.

§ 3.

Monocyklische Systeme.

Diesen Namen will ich, wie oben erwähnt, gebrauchen für Systeme, in denen in sich zurücklaufende innere Bewegung vorkommt, die durch nur einen Parameter σ neben den Coordinaten p_a vollständig bestimmt wird.

Der einfachste Fall einer solchen Bewegung ist gegeben, wenn in dem Systeme des § 2 nur eine Geschwindigkeit q vorkommt. Dann erhalten wir die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} P_a &= -\frac{\partial H}{\partial p_a}, \\ dQ &= s\,.\,dq, \\ s &= -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ U &= H - q\,.\,\frac{\partial H}{\partial q}. \end{aligned}\right\} \quad (5.)$$

Daraus folgt

$$dQ = dU + \Sigma\,[P_a\,.\,dp_a] = s\,.\,dq.$$

Diese Gleichungen sind vollkommen von gleicher Form, wie die oben aufgestellten für die Wärmebewegung. An Stelle der Temperatur ϑ oder der von ihr abhängigen Grösse η ist
170 die Geschwindigkeit q getreten. Die Grösse dQ bedeutet hier die auf directe Steigerung der inneren Bewegung gerichtete Arbeit, wie dort, nur dass diese innere Bewegung jetzt von anderer Art ist als die Wärmebewegung.

Es ist also q hier integrirender Nenner der Gleichung $dQ = 0$; wir können aber, wie dort, die Form der Gleichungen auch wahren, wenn wir als Parameter für die Intensität der Bewegung neben den p_a eine Grösse $q \cdot \partial s / \partial \sigma$ einführen, worin σ eine Function von s bedeutet. Dann verliert aber die nunmehr einzuführende Function

$$\mathfrak{H} = U - q\,.\,\frac{\partial s}{\partial \sigma}\,.\,\sigma$$

die für H in (2^e.) angenommene Bedeutung: $H = \Phi - L$.

Beachtenswerth ist, dass in diesem einfachsten Falle (123)
monocyklischer Bewegung auch die lebendige Kraft

$$L = -\,{}^1\!/_2\, q \,.\, \frac{\partial H}{\partial q} = {}^1\!/_2\, q \,.\, s \qquad (5^a.)$$

einer der integrirenden Nenner des Systems ist. Wenn man die hierfür zu wählende Function $\mathfrak{S}$ von s durch die Gleichung definirt

$$d\,Q = 2\,L \,.\, d\mathfrak{S} = q \cdot ds,$$

so erhalten wir

$$d\mathfrak{S} = \frac{ds}{s}\,,$$

$$\mathfrak{S} = \log s - \log A,$$

wo A eine Integrationsconstante. Oder:

$$\mathfrak{S} = \log\left(\frac{s}{A}\right) = {}^1\!/_2 \log L + {}^1\!/_2 \log\left(\frac{s}{A^2 \,.\, q}\right). \qquad (5^b.)$$

Hier tritt die Analogie mit der kinetischen Gastheorie schon sehr deutlich heraus. Die Temperatur ϑ ist der lebendigen Kraft proportional, und wenn wir mit $\mathfrak{J}$ das mechanische Wärmeäquivalent, mit v das Volumen der Masseneinheit, mit c und γ die Wärmecapacität für constanten Druck und constantes Volumen bezeichnen, so ist die Entropie der Masseneinheit:

$$S = \mathfrak{J} \,.\, \gamma \,.\, \log \vartheta + \mathfrak{J} \cdot (c - \gamma) \,.\, \log v + C.$$

Im vorliegenden Falle ist das Verhältniss $s\,/\,q$ das Trägheitsmoment der rotirenden Masse, welches wie das v in der Entropie der Gase von Raumabmessungen abhängt, und zwar nur von solchen, so lange nicht etwa Grössen $p_\mathfrak{c}$ eliminirt sind.

§ 4.

Ein allgemeinerer Fall der monocyklischen Bewegung tritt ein, wenn mehrere Geschwindigkeiten $q_\mathfrak{b}$ vorhanden sind, die aber alle von einer von ihnen und den Co- 171
ordinaten $p_\mathfrak{a}$ bestimmt werden, so dass das Verhältniss der verschiedenen $q_\mathfrak{b}$ zu einander mit der Lage des Systems

wechselt. Aeusserst mannigfache und wechselnde Beziehungen zwischen Drehungsgeschwindigkeiten können bekanntlich auch an mechanischen Apparaten hergestellt werden. Eine Frictionsrolle könnte z. B. auf dem Umfang eines Rotationskörpers laufen, der an verschiedenen Stellen verschiedenen Durchmesser hat, und durch Centrifugalkräfte an der Axe, mit der er sich dreht, auf- und abgeschoben wird.

Nehmen wir also den allgemeinen Fall solcher Abhängigkeit, wobei jede Geschwindigkeit $q_\mathfrak{b}$ eine vorgeschriebene Function der $p_\mathfrak{a}$ und des Parameters σ sei, die Verbindung aber von der Art, dass dadurch keine Arbeit verzehrt oder gewonnen werde. Es wird alsdann die von aussen her zur Aenderung der $q_\mathfrak{b}$ aufzuwendende Arbeit sein:

$$dQ = \sum_\mathfrak{b} [dQ_\mathfrak{b}] = \sum_\mathfrak{b} [q_\mathfrak{b} \cdot ds_\mathfrak{b}],$$

wobei die Verbindung des Systems es gleichgültig macht, ob die äusseren Kräfte direct nur auf eines oder mehrere der $q_\mathfrak{b}$ wirken.

Da die $s_\mathfrak{b}$ durch die Gleichungen

$$s_\mathfrak{b} = -\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{b}}$$

als Functionen der $p_\mathfrak{a}$ und $q_\mathfrak{b}$ gegeben sind, sind sie auch als solche der $p_\mathfrak{a}$ und des σ darzustellen, und demgemäss auch das dQ als eine homogene lineare Function der $dp_\mathfrak{a}$ und des $d\sigma$, deren integrirende Nenner, so weit solche existiren, gefunden werden können. Dadurch würde auch dieser allgemeinste Fall auf die früher gegebenen Formen zurückgeführt. Indessen lässt sich die Art der integrirenden Nenner nicht so allgemein bestimmen. Hierbei ist namentlich die Frage aufzuwerfen, unter welchen Bedingungen die lebendige Kraft einer der integrirenden Nenner bleibt; diese wollen wir weiter unten noch behandeln.

§ 5.

Koppelung je zweier Systeme.

Von Interesse ist hier namentlich der Fall, wo zwischen zwei Systemen, welche gleiche Werthe eines ihrer integrirenden Nenner haben, eine mechanische Verbindung so hergestellt

wird, dass während diese Verbindung besteht, diese Gleichheit der genannten Nenner erhalten bleiben muss. Um eine solche Art der Verbindung kurz zu bezeichnen, will ich sie *isomore Koppelung* (ἴσον μόριον, gleicher Nenner) nennen.

Beispiele wären zwei Kreisel, deren Axen so verbunden werden, dass sie zu gleicher Umlaufsgeschwindigkeit gezwungen werden. Ist gleiche Rotation schon beim Eingehen der Ver- 172
bindung vorhanden, so lässt sich die Koppelung ohne Störung der vorhandenen Bewegungen herstellen. Ihre Axen könnten Centrifugalregulatoren verschiedener Art tragen, deren Stellung von der Axe aus durch Kräfte P_a regulirt werden könnte, wodurch mittelbar auch die Umlaufsgeschwindigkeit auf beliebige Höhe zu bringen wäre.

Auch zwei Ströme in ringförmigen Röhren können ohne Störung beider in einen Ring vereinigt werden, wenn beide gleiche Strömung durch jeden Querschnitt haben. Streckung des Canals vermindert die Strömung, Verkürzung erhöht sie. Dadurch kann man je zweien gleichen Werth geben.

Dann gelten genau dieselben Betrachtungen, welche für die Wärmebewegung aus den Gleichungen (1) folgen, und an die ich in § 1 kurz erinnert habe. Wir erhalten dadurch genau dieselben Gesetze für die Möglichkeit auf reversible Weise Arbeit der Kräfte P_a auf Kosten der inneren Bewegung der Systeme zu gewinnen. Die Grundvoraussetzung hierfür ist also die, dass wir kein anderes Mittel haben, direct auf die innere Bewegung der gegebenen monocyklischen Systeme zu wirken, als durch isomore Koppelung mit anderen Systemen, und dass für jedes einzelne der koppelbaren Systeme ein einziger bestimmter integrirender Nenner besteht, welcher die ungestörte Koppelung mit dem gleich grossen Nenner eines anderen Systems zulässt, wie dies in den oben angeführten Beispielen von Centrifugalregulatoren oder Ringströmen der Fall sein würde.

Dass wir die Wärmebewegung der Atome nicht directer angreifen und verwandeln können, als es der Fall ist, hängt doch auch nur davon ab, dass wir unsere Einwirkungen nicht auf bestimmte, in bestimmter Richtung vorgehende Atome isoliren können, sondern nothwendig immer alle eines bestimmten

Raumbezirks gleichmässig treffen müssen. Es beruht nur auf der Beschränkung der uns zu Gebot stehenden Methoden, und nicht im Wesen der Bewegung. Eben deshalb dürfen wir ähnliche Beschränkungen unseres Eingreifens auch für die hier besprochenen analogen Fälle voraussetzen, ohne die Natur des Problems zu verändern.

§ 6.

Bedingungen, unter denen die lebendige Kraft integrirender Nenner ist.

Da die lebendige Kraft der inneren Bewegung nach der kinetischen Gastheorie der Temperatur direct proportional und somit integrirender Nenner ist, da ferner die lebendige Kraft
173 die einzige fest bestimmte Bewegungsgrösse ist, die ganz unabhängig von aller Verschiedenheit der Systeme, zwischen denen Wärmegleichgewicht eintreten kann, nothwendig in genau bestimmtem Werthe immer wieder sich vorfindet: so hat die von den Hrn. Boltzmann[1]) und Clausius[2]) aufgestellte Hypothese, dass sie immer das Maass der Temperatur sei, einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit. Es schien mir deshalb wichtig zu untersuchen, welches die Bedingungen für das in § 5 definirte allgemeinere monocyklische System seien, unter denen die lebendige Kraft integrirender Nenner wird. Damit dies der Fall sei, muss sein

$$dQ = \sum_{\mathfrak{b}} [dQ_{\mathfrak{b}}] = \sum_{\mathfrak{b}} [q_{\mathfrak{b}} \cdot ds_{\mathfrak{b}}]$$

von der Form

$$dQ = \sum_{\mathfrak{b}} [q_{\mathfrak{b}} \cdot s_{\mathfrak{b}}] \cdot d\,(\log \sigma) \tag{6.}$$

wo wir mit $\log \sigma$ den Parameter bezeichnen, als dessen Functionen die ausserdem von den Coordinaten $p_{\mathfrak{a}}$ abhängigen Grössen $q_{\mathfrak{b}}$ und $s_{\mathfrak{b}}$ dargestellt werden sollen. Vergleichung mit den Sätzen des § 3, namentlich den Gleichungen (5^a) und (5^b) zeigt, dass dieses σ das Bewegungsmoment eines dem zusammengesetzten gleichwirkenden einfachen Systems wäre und

$$q = \frac{2L}{\sigma},$$

---

1) Wiener Sitzungsber. 1866, Bd. LIII, Abth. II, S. 195—220.

2) Poggendorff, Annalen 1871, Bd. 142, S. 433—461, § 14 und 15 der Abhandlung.

die entsprechende Geschwindigkeit einer einfachen inneren Bewegung. Wenn wir demnach die p_a und σ als unabhängige Variable in die Gleichung (6) einführen, erhalten wir folgende Reihe von Gleichungen:

$$\sum_b \left[q_b \cdot \frac{\partial s_b}{\partial p_a} \right] = 0$$

$$\sum_b \left[q_b \cdot \left(\frac{\partial s_b}{\partial \sigma} - \frac{s_b}{\sigma} \right) \right] = 0.$$

Dividirt man sie alle durch σ und bezeichnet:

$$\frac{s_b}{\sigma} = \nu_b ,$$

so werden die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sum_b \left[q_b \cdot \frac{\partial \nu_b}{\partial p_a} \right] = 0 \\ \sum_b \left[q_b \cdot \frac{\partial \nu_b}{\partial \sigma} \right] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (6^a.)$$

Man kann also die obige Gleichung (6) schreiben:

$$\Sigma [q_b \cdot d\nu_b] = 0.$$

Da mittels der Gleichungen (3^a), beziehlich (4^c), die q_b als Functionen der s_b, also auch der ν_b und σ dargestellt werden können, so sind die Gleichungen (6^a) solche, welche die Beziehungen zwischen den ν_b, p_a und σ bestimmen. 174

Ist a die Anzahl der Parameter p_a und b die der Geschwindigkeiten q_b, so haben wir $(a+1)$ Gleichungen zur Bestimmung von b Unbekannten ν_b.

Ist $(a+1) = b$, so folgt aus den Gleichungen (6^a), dass die Determinante der Coefficienten der q_b gleich Null sein muss, diese ist aber die Functionaldeterminante der ν_b in Beziehung auf die unabhängigen Variablen p_a und σ. Dann wird also eines der ν_b eine Function der anderen sein müssen, oder es wird eine Gleichung $F = 0$ existiren müssen, in der F eine Function der ν_b mit constanten Coefficienten ist, die nur mittels der ν_b von den p_a und σ abhängt. Bildet man nun aus der Gleichung

$$F = C \qquad (6^b.)$$

die Reihe ihrer Differentialquotienten:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial p_\mathfrak{a}} &= \sum_\mathfrak{b}\left[\frac{\partial F}{\partial \nu_\mathfrak{b}}\cdot\frac{\partial \nu_\mathfrak{b}}{\partial p_\mathfrak{a}}\right] = 0,\\ \frac{\partial F}{\partial \sigma} &= \sum_\mathfrak{b}\left[\frac{\partial F}{\partial \nu_\mathfrak{b}}\cdot\frac{\partial \nu_\mathfrak{b}}{\partial \sigma}\right] = 0,\end{aligned}\right\}\quad (6^c.)$$

so sind dies für die Grössen $\partial F / \partial \nu_\mathfrak{b}$ genau dieselben linearen Gleichungen, die wir in (6^a.) für die $q_\mathfrak{b}$ gehabt haben. Daraus folgt

$$q_\mathfrak{b} = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \nu_\mathfrak{b}} \qquad (6^d.)$$

wo λ ein gemeinsamer Factor ist. Die $(b+1)$ Gleichungen (6^b.) und (6^d.) bilden dann ein System von Integralgleichungen, aus denen die $(b+1)$ Unbekannten $\nu_\mathfrak{b}$ und λ gefunden werden können, abhängig bleibend von der willkürlichen Constanten C.

Ist die Zahl $(a+1) > b$, so ergiebt das System der Gleichungen (6^a.) und (6^b.) mehr als eine Gleichung zwischen den $\nu_\mathfrak{b}$, die alle erfüllt sein müssen, und bildet also das System der Integralgleichungen.

Wenn dagegen $(a+1) < b$ ist, so kann man $(b-a)$ willkürliche Functionen $F_\mathfrak{c}$ von den Grössen $\nu_\mathfrak{b}$ aufstellen mit der Bedingung

$$\left.\begin{aligned}F_\mathfrak{c} &= C_\mathfrak{c}\\ q_\mathfrak{b} &= \sum\left[\lambda_\mathfrak{c}\cdot\frac{\partial F_\mathfrak{c}}{\partial \nu_\mathfrak{b}}\right]\end{aligned}\right\}\quad (6^e.)$$

also im Ganzen $(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ Gleichungen für die $(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ Unbekannten $\nu_\mathfrak{b}$ und $\lambda_\mathfrak{c}$, welche als Integralgleichungen zu ihrer Bestimmung dienen, wobei aber die Abhängigkeit der $\nu_\mathfrak{b}$ von einander eine Reihe unbestimmter Beziehungen zulässt.

175 Die lebendige Kraft ist:

$$2L = \sum_\mathfrak{b}[q_\mathfrak{b}\cdot s_\mathfrak{b}] = \sigma\cdot\sum_\mathfrak{c}\left\{\lambda_\mathfrak{c}\cdot\sum_\mathfrak{b}\left[\nu_\mathfrak{b}\cdot\frac{\partial F_\mathfrak{c}}{\partial \nu_\mathfrak{b}}\right]\right\},$$

und die zugeleitete Bewegungsarbeit:

$$dQ = \sum_\mathfrak{b}\sum_\mathfrak{c}\left\{\lambda_\mathfrak{c}\cdot\nu_\mathfrak{b}\cdot\frac{\partial F_\mathfrak{c}}{\partial \nu_\mathfrak{b}}\right\}d\sigma.$$

Der einfachste Fall ist der, wo die Functionen $F_\mathfrak{c}$ linear angenommen werden. Dann sind ihre Differentialquotienten constante Grössen, die ich mit $m_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ bezeichnen will. Also

$$q_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}} [m_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} \cdot \lambda_{\mathfrak{c}}]. \qquad (6^{f}.)$$

Sind keine der Parameter $p_{\mathfrak{c}}$ eliminirt, wie oben in Gleichungen (4.) bis (4^{d}.), so sind die $q_{\mathfrak{b}}$ lineare Functionen der $s_{\mathfrak{b}}$ oder $\sigma \cdot \nu_{\mathfrak{b}}$. Nimmt man zu den $\mathfrak{b}$ Gleichungen (6^{f}.), dann noch die $\mathfrak{c}$ als linear vorausgesetzten Gleichungen

$$F_{\mathfrak{c}} = C_{\mathfrak{c}},$$

so hat man $(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$ nicht homogene lineare Gleichungen für die $(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$ Unbekannten $\nu_{\mathfrak{b}}$ und $(1/\sigma) \cdot \lambda_{\mathfrak{c}}$, woraus deren Werthe zu finden sind. Da die Coefficienten der $\nu_{\mathfrak{b}}$ in den Werthen der $(1/\sigma) \cdot q_{\mathfrak{b}}$ im Allgemeinen Functionen der $p_{\mathfrak{a}}$ sind, so gilt dies auch für die Werthe $\nu_{\mathfrak{b}}$ (beziehlich $(1/\sigma) \cdot s_{\mathfrak{b}}$) und der $(1/\sigma) \cdot \lambda_{\mathfrak{c}}$. Das σ kommt aber nicht weiter vor, als in den zuletzt angegebenen Zusammensetzungen, so dass bei constant bleibenden $p_{\mathfrak{a}}$ die sämmtlichen $q_{\mathfrak{b}}$ und $s_{\mathfrak{b}}$ proportional dem Parameter σ wachsen. Bei geänderten Parametern aber ändern sich im Allgemeinen auch die Verhältnisse zwischen den Geschwindigkeiten, wenn $\mathfrak{c}$ mehrere Werthe hat, da die $\lambda_{\mathfrak{c}}$ Functionen der $p_{\mathfrak{a}}$ sind.

Dieselbe Regel gilt überhaupt, so lange nicht Parameter $p_{\mathfrak{a}}$, auf welche keine äusseren Kräfte $P_{\mathfrak{a}}$ wirken, eliminirt sind, und die lebendige Kraft noch durch eine homogene ganze Function zweiten Grades gegeben ist, auch wenn die Functionen $F_{\mathfrak{c}}$ nicht linear sind, weil dann in den Integralgleichungen des Systems das σ nur in der Verbindung $(1/\sigma) \cdot \lambda_{\mathfrak{c}}$ vorkommt neben den Grössen $\nu_{\mathfrak{b}}$.

Es trifft diese Regel aber nicht mehr zu, wenn Parameter $p_{\mathfrak{a}}$ eliminirt sind, weil diese nach der Vorbedingung der Elimination durch auf sie wirkende äussere Kräfte nicht mehr constant gehalten werden können.

In dem erstgenannten Falle, wo die $q_{\mathfrak{b}}$ und $s_{\mathfrak{b}}$, bei con- 176
stanten Parametern $p_{\mathfrak{a}}$, alle dem σ proportional zunehmen, werden die den einzelnen cyklischen Bewegungen entsprechenden lebendigen Kräfte $q_{\mathfrak{b}} \cdot s_{\mathfrak{b}}$ also dem σ^2 proportional ab- und zunehmen. Hr. **Clausius** hat diese Bedingung schon angegeben[1]), aber ohne den Einfluss der geänderten Parameter zu erwähnen.

---

[1]) **Poggendorff's** Annalen Bd. 142, S. 458.

Isomore Koppelung nach der lebendigen Kraft. Schliesslich will ich noch die Frage erörtern, unter welchen Bedingungen Systeme, in denen die lebendige Kraft integrirender Nenner ist, so gekoppelt werden können, dass in dem vereinigten Systeme die lebendige Kraft wieder integrirender Nenner ist. Ich bezeichne das eine System mit dem Index 1, das andere mit 2, die Grössen des gekoppelten Systems lasse ich ohne Index. Ich setze also

$$\left.\begin{aligned} dQ_1 &= L_1 \cdot d(\log \sigma_1) \\ dQ_2 &= L_2 \cdot d(\log \sigma_2) \\ dQ &= dQ_1 + dQ_2 = (L_1 + L_2) \cdot d \log \sigma \end{aligned}\right\} \quad (7.)$$

Damit das gekoppelte System die Entropie $\log \sigma$ bekommt, werden σ_1 und σ_2 in einer gewissen Beziehung zu σ stehen müssen, die übrigens auch durch die Werthe ihrer beiderseitigen Coordinaten p_a beeinflusst sein kann. Wir können sie also als Function von den p_a und σ betrachten. Dann ergeben die Gleichungen (7.) das System der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} L_1 \cdot \frac{\partial}{\partial p_a} \log\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right) + L_2 \cdot \frac{\partial}{\partial p_a} \log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}\right) &= 0 \\ L_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} \log\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right) + L_2 \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} \log\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (7^a.)$$

Daraus folgt, wie aus dem entsprechenden System der Gleichungen (6^c.), dass eine Gleichung

$$F = C$$

bestehen muss, worin F eine Function von $\nu_1 = \sigma_1 / \sigma$ und $\nu_2 = \sigma_2 / \sigma$ ist. Dann wird

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \nu_1} \\ L_2 &= \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \nu_2} \end{aligned}\right\} \quad (7^b.)$$

Also wird die Bedingung der Koppelung geschrieben werden können:

$$\frac{L_1}{\frac{\partial F}{\partial \nu_1}} = \frac{L_2}{\frac{\partial F}{\partial \nu_2}} \quad (7^c.)$$

177 Die Art dieser Bedingung ist denen ganz analog, die inner-

halb jedes einzelnen Systems die einzelnen verschiedenen Bewegungen verketten.

Verlangt man nun, dass wie bei dem Wärmeaustausch zwischen gleich temperirten Körpern, die Möglichkeit der Koppelung nur von der Gleichheit einer Grösse (Temperatur) abhänge, die nur durch den Zustand jedes einzelnen Körpers bedingt ist: so muss sich *erstens* aus den Nennern der Gleichung (7[e].) die Grösse σ wegheben, was nur geschehen kann, wenn die beiden Differentialquotienten von F homogene Functionen von ν_1 und ν_2 gleichen Grades sind; und es muss *zweitens* $\partial F / \partial \nu_1$ nur ν_1, und $\partial F / \partial \nu_2$ nur ν_2 enthalten. Dann wird schliesslich die Bedingung der Koppelung

$$\frac{L_1}{a_1 \cdot \sigma_1^n} = \frac{L_2}{a_2 \cdot \sigma_2^n} \tag{7^d.}$$

Der Exponent n muss für die ganze Reihe der unter den angegebenen Bedingungen koppelbaren Systeme der gleiche sein. Ist er für einige derselben gleich Null (Wärmebewegung in den Gasen), so muss er für alle gleich Null sein. Dann ist also die Bedingung der Koppelung, dass $(1/a) \cdot L$ in den gekoppelten Systemen den gleichen Werth behalte.

Für die Systeme mit nur einem q ist

$$L_1 = \tfrac{1}{2} q_1 \cdot s_1 .$$

Für $n = 1$, also die Bedingung der Koppelung

$$\frac{q_1}{a_1} = \frac{q_2}{a_2};$$

wie es schon in den besprochenen Beispielen angenommen war.

Für die Verbindung der inneren Bewegungen eines Systems mit vielen q_b, erscheinen die Bedingungen, wie oben auseinandergesetzt ist, weniger beschränkt, da keine Möglichkeit der Trennung und Koppelung mit anderen Systemen vorausgesetzt wurde.

CXVI.

Principien der Statik monocyklischer Systeme.

Aus Borchardt-Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Bd. 97. S. 111 bis 140. 1884.

Die drei ersten Paragraphen dieser Abhandlung sind identisch mit §§ 1 bis 3 des vorstehend (Nr. CXV) abgedruckten Aufsatzes und dort nachzusehen. Die hier folgenden enthalten weitere Generalisationen und eine gänzliche Umarbeitung der vorläufigen Mittheilung.

---

§ 4.[1]

Ein *allgemeinerer Fall der monocyklischen Bewegung* tritt ein, wenn mehrere Geschwindigkeiten $q_{\mathfrak{b}}$ vorhanden sind, die aber alle von einer von ihnen und den Coordinaten $p_{\mathfrak{a}}$ bestimmt werden. Aeusserst mannigfache und wechselnde Beziehungen zwischen Drehungsgeschwindigkeiten können bekanntlich auch an mechanischen Apparaten hergestellt werden. Eine Frictionsrolle könnte z. B. auf dem Umfang eines Rotationskörpers laufen, der an verschiedenen Stellen verschiedenen Durchmesser hat, und durch Centrifugalkräfte an der Axe, mit der er sich dreht, auf- und abgeschoben wird.

124 Wir werden uns eine solche Verbindung im Allgemeinen analytisch darstellen können durch $(n-1)$ Gleichungen zwischen den Grössen $p_{\mathfrak{a}}$ und den n Grössen $q_{\mathfrak{b}}$. Wie in andern Theilen

---

[1]) Eine spätere einfachere Darstellung des Inhalts dieses Paragraphen folgt in § 8.

der Mechanik, wo feste Verbindungen angenommen werden, denken wir uns die Wirkung dieser festen Verbindung so, dass sie diejenigen Bewegungen, die von selbst unter dem Spiel der einwirkenden Kräfte so verlaufen würden, wie es den Gleichungen der Verbindung entspricht, gar nicht beinflusst, dass sie aber beginnenden Abweichungen allemal solche Kräfte entgegenstellt, als nöthig sind, die Abweichung zu verhindern. Hierbei wirkt die feste Verbindung immer so, dass die von ihr ausgehenden Kräfte keinen Arbeitsbetrag zu dem der von aussen einwirkenden Kräfte hinzufügen. Durch diese letztere Bedingung ist die Grösse der Kräfte, die sie in jedem Zustand des Systems ausüben, vollständig bestimmt.

Wenden wir dies an auf unser zusammengesetzteres monocyklisches System, so werden wir die allgemeinste Form der Abhängigkeit der Geschwindigkeiten $q_\mathfrak{b}$ von einander so darstellen können, dass wir jede einzelne derselben als Function der $p_\mathfrak{a}$ und irgend einer neu einzuführenden Variablen x ausdrücken.

Da die $s_\mathfrak{b}$ vermöge des Gleichungssystems

$$s_\mathfrak{b} = - \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{b}}$$

als Function der $p_\mathfrak{a}$ und der $q_\mathfrak{b}$ dargestellt werden können, so lassen sie sich ebenfalls als Functionen der $p_\mathfrak{a}$ und des x ausdrücken. Wir wollen das System nach der Einführung der besprochenen festen Verbindungen kurzweg als *das gefesselte System* bezeichnen.

Unter den von uns gemachten Annahmen, die das Problem als ein statisches charakterisiren, folgt, dass die Kräfte $P_\mathfrak{a}$ dauernd wirken, auch während das System seinen Zustand nicht ändert; im Gegentheil vernachlässigen wir die Aenderungen der $P_\mathfrak{a}$, die von der Geschwindigkeit der Zustandsänderungen abhängen. Die Arbeitswerthe $dQ_\mathfrak{b}$ dagegen treten nur ein, so lange solche Zustandsänderungen währen. Da beide Arten von Einwirkungen also ganz verschiedenen, von einander unabhängigen Zeitperioden entsprechen, so können Kräfte P, welche durch die feste Verbindung gegeben werden, und die wir zur Unterscheidung mit P' bezeichnen wollen, auch niemals den in den

$dQ'_{\mathfrak{b}}$ arbeitenden Kräften das Gleichgewicht halten, und umgekehrt; sondern es müssen die Kräfte jeder dieser Klassen für sich im Gleichgewicht sein.

125 Daraus folgt also *erstens* für die gesammte Arbeit der Kräfte $P'_{\mathfrak{a}}$:

$$\Sigma [P'_{\mathfrak{a}} . dp_{\mathfrak{a}}] = 0.$$

Da die $dp_{\mathfrak{a}}$ vollkommen willkürlich bleiben müssen, wenn durch die eingetretene feste Verbindung keiner von den Graden der Bewegungsfreiheit verloren gehen soll, so müssen in diesem Falle alle $P'_{\mathfrak{a}} = 0$ sein, also auch in dem gefesselten System die Kräfte $P_{\mathfrak{a}}$ ihren früheren Werth behalten:

$$P_{\mathfrak{a}} = -\frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{a}}}. \tag{6.}$$

Anderseits muss die auf Beschleunigung der Bewegung des gefesselten Systems verwendete Arbeit dQ gleich der Summe der im ungefesselten bei den gleichen Geschwindigkeitsänderungen verwendeten Arbeit sein, also

$$dQ = \sum_{\mathfrak{b}} [q_{\mathfrak{b}} . ds_{\mathfrak{b}}]. \tag{6^a.}$$

Wenn wir die $s_{\mathfrak{b}}$ als Functionen der $p_{\mathfrak{a}}$ und des x betrachten, so wird diese Gleichung:

$$dQ = \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} \left[q_{\mathfrak{b}} . \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} . dp_{\mathfrak{a}} \right] + \sum_{\mathfrak{b}} \left[q_{\mathfrak{b}} . \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial x} \right] dx. \tag{6^b.}$$

Wenn wir mit U die gesammte innere Energie des Systems bezeichnen, ist

$$dU = dQ - \Sigma [P_{\mathfrak{a}} . dp_{\mathfrak{a}}].$$

U ist ursprünglich gegeben als Function der $p_{\mathfrak{a}}$ und $q_{\mathfrak{b}}$; werden die letzteren durch die $p_{\mathfrak{a}}$ und durch x ausgedrückt, so ergiebt die Gleichung

$$dQ = 0$$

die Form

$$\sum_{\mathfrak{a}} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial p_{\mathfrak{a}}} + P_{\mathfrak{a}} \right) dp_{\mathfrak{a}} \right] + \frac{\partial U}{\partial x} . dx = 0,$$

deren Integral, falls ein solches auch für eine Mehrzahl der $p_{\mathfrak{a}}$ existirt, wir schreiben können:

$$\sigma = \text{Const.},$$

worin σ eine Function der $p_\mathfrak{a}$ und des x sein muss. Dann ergiebt sich, wie oben am Ende von § 1:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p_\mathfrak{a}} + P_\mathfrak{a}\right) = \lambda \, . \frac{\partial \sigma}{\partial p_\mathfrak{a}} \, ,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lambda \, . \frac{\partial \sigma}{\partial x} \, .$$

Folglich bekommt die Gleichung (6^b.) die Form:

$$dQ = \lambda \, . \, d\sigma. \tag{6^c.}$$

Wir können somit die Function σ als die Entropie des ge- 126
fesselten Systems bezeichnen. Statt derselben könnten, wie oben erwähnt, auch beliebige Functionen von σ gewählt werden.

Besondere Wahl des x.

Bisher ist die Wahl der Function x vollkommen willkürlich gewesen. Nehmen wir für sie eines dieser σ, so wird in (6^b.)

$$dQ = \lambda \, . \, d\sigma$$

zu setzen sein, und (6^b.) zerfällt dann in die Reihe der Gleichungen

$$\sum_\mathfrak{b} \left[q_\mathfrak{b} \cdot \frac{\partial s_\mathfrak{b}}{\partial p_\mathfrak{a}} \right] = 0, \tag{6^d.}$$
$$\sum_\mathfrak{b} \left[q_\mathfrak{b} \cdot \frac{\partial s_\mathfrak{b}}{\partial \sigma} \right] = \lambda. \tag{6^e.}$$

Die Gleichungen (6^d.) sind nach den $q_\mathfrak{b}$ lineare homogene Gleichungen. Nehmen wir an, dass die Anzahl der darin enthaltenen $p_\mathfrak{a}$ durch passende Wahl derselben auf ihr kleinstes Maas zurückgeführt sei. Es könnte nämlich vorkommen, dass n von den Grössen $p_\mathfrak{a}$ nur in der Form von weniger als n Functionen derselben in die Werthe der $s_\mathfrak{b}$ eintreten. Dann würde man diese Functionen an Stelle einer gleichen Anzahl der $p_\mathfrak{a}$ einführen können. Ist nach dieser Reduction *die Anzahl $\mathfrak{A}$ der Indices $\mathfrak{a}$ gleich der Anzahl $\mathfrak{B}$ der Indices $\mathfrak{b}$*, so ist die Functionaldeterminante der $s_\mathfrak{b}$ nach den Variablen $p_\mathfrak{a}$ gleich Null zu setzen, d. h. es muss eine Gleichung bestehen zwischen den $s_\mathfrak{a}$, deren Coefficienten unabhängig sind von den in den

Gleichungen (6^{d}.) noch vorkommenden $p_{\mathfrak{a}}$, wohl aber von dem σ abhängen können. Schreiben wir diese:

$$F = \sigma, \qquad (6^{f}.)$$

worin F eine Function allein der $s_{\mathfrak{b}}$, eventuell auch der in den Werthen der $s_{\mathfrak{b}}$ nicht vorkommenden p ist. Diese Gleichung muss identisch werden, wenn statt der $s_{\mathfrak{b}}$ ihre Werthe ausgedrückt durch die $p_{\mathfrak{a}}$ und σ gesetzt werden. Daher ergiebt die Differentiation derselben nach den $p_{\mathfrak{a}}$ und σ

$$\sum_{\mathfrak{b}} \left[\frac{\partial F}{\partial s_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} \right] = 0, \qquad (6^{g}.)$$

$$\sum_{\mathfrak{b}} \left[\frac{\partial F}{\partial s_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial \sigma} \right] = 1. \qquad (6^{h}.)$$

Vergleichen wir diese mit den Gleichungen (6^{d}.) und (6^{e}.), so ergiebt sich:

$$q_{\mathfrak{b}} = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial s_{\mathfrak{b}}}. \qquad (6^{i}.)$$

Wird F als Function der $s_{\mathfrak{b}}$ willkürlich gewählt, so ergeben die
127 Gleichungen (6^{i}.), da die $q_{\mathfrak{b}}$ als Functionen der $p_{\mathfrak{a}}$ und $s_{\mathfrak{b}}$ ausgedrückt werden können, wie oben bemerkt, zunächst $\mathfrak{B}$ Gleichungen zur Bestimmung der $s_{\mathfrak{b}}$ durch $p_{\mathfrak{a}}$ und λ, welche wenn sie unabhängig von einander sind, die Wirkung der festen Verbindung vollständig definiren. Endlich bestimmt die Gleichung (6^{f}.) das σ als Function der $s_{\mathfrak{b}}$, beziehlich der $p_{\mathfrak{a}}$ und des λ, oder auch das λ als Function der $p_{\mathfrak{a}}$ und des σ.

Aber auch für $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ gilt dieselbe Form der Lösung. Zunächst ist es leicht, sich davon zu überzeugen, dass in beiden Fällen die Gleichungen (6^{f}.) und (6^{i}.) wirklich Lösungen für das System der Gleichungen (6^{d}.) und (6^{e}.) sind, und, wenn unabhängig von einander, mit Hülfe der Gleichungen, welche die $q_{\mathfrak{b}}$ als Functionen der $s_{\mathfrak{b}}$ geben, nämlich

$$\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}} = - s_{\mathfrak{b}}, \qquad (6^{k}.)$$

Werthe der $s_{\mathfrak{b}}$ ergeben, die allen Bedingungen der Aufgabe genügen.

Aber man kann auch nachweisen, dass diese Form der

Lösung den nöthigen Grad von Allgemeinheit hat,[1]) namentlich auch in dem Falle, wo $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, und die Anzahl der Gleichungen (6^d.) also kleiner ist, als die Anzahl der Grössen $s_\mathfrak{b}$, welche bestimmt werden sollen. Ersetzt man nämlich in den Gleichungen (6^d.) die $q_\mathfrak{b}$ durch ihre Werthe, die mittels der Gleichungen (6^k.) in den $s_\mathfrak{b}$ und $p_\mathfrak{a}$ ausgedrückt sind, so enthalten die Gleichungen (6^d.) nur noch die Grössen $s_\mathfrak{b}$ und $p_\mathfrak{a}$. Diese Gleichungen erlauben, dass man für bestimmte Werthe der $p_\mathfrak{a}$ beliebige Werthe der $s_\mathfrak{b}$ nimmt, ferner beliebige Werthe ihrer sämmtlichen ersten Differentialquotienten bis auf die eines der s, welches wir mit s_1 bezeichnen wollen. Dann aber sind durch die Gleichungen (6^d.) die Differentialquotienten des s_1 nach den $p_\mathfrak{a}$ vollständig bestimmt, nicht aber $\partial s_1 / \partial \sigma$. So lange also das σ constant gehalten wird, ist durch jene Differentialgleichungen durchaus freigelassen, wie die übrigen $s_\mathfrak{b}$ mit steigenden $p_\mathfrak{a}$ wachsen sollen, mit Ausnahme des s_1. Wie das s_1 aber wachsen muss, ist dann vollständig gegeben. Genau dieselbe Freiheit beziehlich Gebundenheit der genannten Functionen wird dargestellt durch die Integralgleichung

$$F = \sigma, \qquad (6^f.)$$

wenn das F eine beliebig zu wählende Function der sämmt- 128
lichen $s_\mathfrak{b}$ ist, und es ist also die gegebene Lösung in jedem Falle ausreichend allgemein.

Die angegebene Lösung des Problems genügt demnach wenn die Gleichungen (6^i.) nicht abhängig von einander werden, den Forderungen der Aufgabe; den genannten Ausnahmefall behalte ich späterer Behandlung vor. Es sind dadurch die sämmtlichen Grössen $q_\mathfrak{b}$, $s_\mathfrak{b}$, λ darstellbar als Functionen der $p_\mathfrak{a}$ und des σ, ebenso auch die ursprünglich in dem ungefesselten Zustande des Systems als Functionen entweder der $p_\mathfrak{a}$ und $q_\mathfrak{b}$, beziehlich der $p_\mathfrak{a}$ und $s_\mathfrak{b}$ gegebenen Werthe der $P_\mathfrak{a}$ und des U, sowie des H.

---

[1]) Dieses Problem ist vollständiger mit Berücksichtigung der Fälle, wo die Gleichungen (6^i.) nicht unabhängig von einander sind, von Hrn. L. Kronecker behandelt in Borchardt-Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 97. S. 141 bis 145.

Aenderung der Variablen.

Im ungefesselten System können wir, wie schon im § 1 nach Gibbs bemerkt ist, die Gleichung der Constanz der Energie schreiben:

$$dU = \sum_{\mathfrak{b}} [q_{\mathfrak{b}} \,.\, ds_{\mathfrak{b}}] - \Sigma [P_{\mathfrak{a}} \,.\, dp_{\mathfrak{a}}]$$

und das U wie die $q_{\mathfrak{b}}$ und $P_{\mathfrak{a}}$ als Functionen der $p_{\mathfrak{a}}$ und $s_{\mathfrak{b}}$ darstellen. Daraus ergeben sich die Beziehungen:

$$\frac{\partial U}{\partial p_{\mathfrak{a}}} = - P_{\mathfrak{a}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial s_{\mathfrak{b}}} = q_{\mathfrak{b}}.$$

Wenn nach erfolgter Fesselung des Systems die $s_{\mathfrak{b}}$ in U durch ihre Werthe in $p_{\mathfrak{a}}$ und σ ersetzt worden sind, wollen wir die Function U mit $\mathfrak{U}$ bezeichnen. Dann ist

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} = \frac{\partial U}{\partial p_{\mathfrak{a}}} + \sum_{\mathfrak{b}} \left[\frac{\partial U}{\partial s_{\mathfrak{b}}} \,.\, \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} \right],$$

$$\sum_{\mathfrak{b}} \left[\frac{\partial U}{\partial s_{\mathfrak{b}}} \,.\, \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} \right] = \sum_{\mathfrak{b}} \left[q_{\mathfrak{b}} \,.\, \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} \right] = 0$$

nach (6^d.), folglich

$$P_{\mathfrak{a}} = - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial p_{\mathfrak{a}}}. \tag{6^l.}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \sigma} = \sum_{\mathfrak{b}} \left[\frac{\partial U}{\partial s_{\mathfrak{b}}} \,.\, \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial \sigma} \right] = \sum_{\mathfrak{b}} \left[q_{\mathfrak{b}} \,.\, \frac{\partial s_{\mathfrak{b}}}{\partial \sigma} \right];$$

also nach (6^e.)

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \sigma} = \lambda. \tag{6^m.}$$

Daraus ergiebt sich also für das gefesselte System die Form

$$dU = \lambda \,.\, d\sigma - \sum_{\mathfrak{a}} [P_{\mathfrak{a}} \,.\, dp_{\mathfrak{a}}],$$

129 beziehlich, wenn wir

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{U} - \lambda \,.\, \sigma \tag{6^n.}$$

setzen und die $p_{\mathfrak{a}}$ als unabhängige Variable beibehalten, statt des σ aber λ einführen;

$$d\mathfrak{H} = -\sigma . d\lambda - \sum_{\mathfrak{a}} [P_{\mathfrak{a}} . dp_{\mathfrak{a}}].$$

Also

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} = -P_{\mathfrak{a}},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \lambda} = -\sigma,$$

übereinstimmend mit den in § 3 gegebenen Formen für das einfache monocyklische System. Nur findet sich unter den verschiedenen Functionen von σ nicht nothwendig eine vor, die die ausgezeichnete Beziehung wie das s der Gleichung (5^a.) zur lebendigen Kraft hätte, und deren zugeordnetes λ gleich der lebendigen Kraft wäre. Unter welchen Bedingungen dies eintritt, soll im nächsten Paragraphen untersucht werden.

§ 5.

Bedingungen, unter denen die lebendige Kraft integrirender Nenner ist.

Wir haben in § 3 gefunden, dass für die einfachen monocyklischen Systeme die lebendige Kraft immer einer der integrirenden Nenner ist. Es fragt sich, ob und unter welchen Bedingungen dies auch für die Systeme mit festen Verbindungen der bewegten Theile der Fall ist, die wir in § 4 besprochen haben. Diese Frage ist auch für die Analogie mit der Wärmetheorie wichtig, da in dieser die Temperatur, die den integrirenden Nenner bildet, nach der kinetischen Gastheorie in der That der lebendigen Kraft der inneren Bewegung proportional ist, und die von den Hrn. Boltzmann[1]) und Clausius[2]) aufgestellte Hypothese, wonach dies auch in allen andern Körpern der Fall sei, mindestens einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Die lebendige Kraft L des Systems, sei es gefesselt oder ungefesselt, ist nach (4^d.) gegeben durch die Gleichung

$$2L = \sum_{\mathfrak{b}} [q_{\mathfrak{b}} . s_{\mathfrak{b}}]. \tag{7.}$$

---

[1]) Wiener Sitzungsber. 1866, Bd. LIII, Abth. II, S. 195 bis 220.

[2]) Pogg. Annalen, 1871; Bd. 142, S. 433 bis 461, § 14 und 15 der Abhandlung.

Da statt des Werthes σ der im vorigen Paragraphen gefundenen
130 Entropie auch jede Function von σ eintreten kann, so wollen wir die zu $2L$ als eventuell integrirendem Nenner gehörige Entropie mit $\log \sigma$ bezeichnen. Also

$$dQ = 2L \,.\, \frac{d\sigma}{\sigma}\,, \qquad (7^{a}.)$$

$$= \lambda \,.\, d\sigma\,,$$

daher ist in diesem Falle mit Berücksichtigung von (6^{c})

$$2L = \lambda \,.\, \sigma. \qquad (7^{b}.)$$

Wenn wir in Gleichung (7.) die der festen Verbindung entsprechenden Werthe der $q_{\mathfrak{b}}$ aus $(6^{i}.)$ setzen, erhalten wir

$$2L = \lambda \,.\, \Sigma \left[s_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial F}{\partial s_{\mathfrak{b}}} \right] \qquad (7^{c}.)$$

und $(7^{b}.)$ kann wegen der Gleichung $(6^{f}.)$

$$F = \sigma$$

geschrieben werden

$$2L = \lambda \,.\, F. \qquad (7^{d}.)$$

Die Bedingung dafür, dass die lebendige Kraft integrirender Nenner sei, ist demnach die, dass

$$F = \sum_{\mathfrak{b}} \left[s_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial F}{\partial s_{\mathfrak{b}}} \right], \qquad (7^{e}.)$$

d. h. dass die Function F, die den Werth der Entropie des gefesselten Systems giebt, *eine homogene Function ersten Grades* der Bewegungsmomente $s_{\mathfrak{b}}$ des ungefesselten Systems sei. Nach den oben in (7.) und $(7^{a}.)$ gemachten Voraussetzungen stehen in dem gefesselten System die Grössen λ und σ zu L und dQ genau in demselben Verhältniss, wie in dem einfachen monocyklischen Systeme des § 3 die Grössen q und σ. Wir können also passend λ als *die resultirende Geschwindigkeit der inneren Bewegung* und σ als *das dazu gehörige resultirende Bewegungsmoment* bezeichnen. Beide sind durch die gegebenen Ableitungen bis auf einen constanten Factor bestimmt; denn alle Gleichungen dieses Paragraphen bleiben unverändert, wenn wir $(n\sigma)$ statt σ und gleichzeitig λ / n statt λ setzen. Da ein

solcher constanter Factor eine beliebige Art physikalischer Benennung erhalten kann, so wird dadurch auch die dem σ zu gebende Einheit willkürlich bestimmbar; ist sie bestimmt, so wird die des λ dadurch mitbestimmt, da das Product $\lambda . \sigma$ eine lebendige Kraft, d. h. ein Arbeitsquantum bezeichnet. Es wird am zweckmässigsten im Sinne der vorgeschlagenen Bezeichnung
beider Grössen sein, λ als eine Geschwindigkeit, d. h. den 131
Differentialquotienten einer Raumgrösse nach der Zeit, und σ als ein Bewegungsmoment (Masse mal Geschwindigkeit, combinirt mit passenden Raumgrössen) aufzufassen. Da die Function F eine homogene Function ersten Grades und

$$\frac{1}{\sigma} \cdot F = 1 \qquad (7^{f}.)$$

ist, so wird sich F als Function von den Grössen $(1 / \sigma) . s_{\mathfrak{b}}$ darstellen lassen, welche nach dem vorher Gesagten reine Raumgrössen sind, und die constanten Coefficienten, welche in der Function F enthalten sind, werden also auch nur reine Raumgrössen zu sein brauchen.

Was die Grössen $q_{\mathfrak{b}}$ betrifft, so sind dieselben vermittels der Gleichungen:

$$s_{\mathfrak{b}} = - \frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}}, \qquad (3^{a}.)$$

beziehlich nach Elimination einiger $q_{\mathfrak{c}}$:

$$s_{\mathfrak{b}} = - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_{\mathfrak{b}}}, \qquad (4^{e}.)$$

auszudrücken als Functionen der $s_{\mathfrak{b}}$. Im ersteren Falle sind die $s_{\mathfrak{b}}$ lineare homogene Functionen der $q_{\mathfrak{b}}$, im zweiten Falle sind sie im Allgemeinen nicht linear und nicht homogen. Schreibt man die Gleichungen $(6^{f}.)$ und $(6^{i}.)$

$$\frac{q_{\mathfrak{b}}}{\sigma} = \frac{\lambda}{\sigma} \cdot \frac{\partial F}{\partial s_{\mathfrak{b}}}, \qquad (7^{g}.)$$

$$\frac{1}{\sigma} \cdot F = 1, \qquad (7^{h}.)$$

so sind bei vollständiger Bewahrung der $p_{\mathfrak{a}}$ die Grössen $(1 / \sigma) . q_{\mathfrak{b}}$ lineare Functionen der $s_{\mathfrak{b}} / \sigma$ mit Coefficienten, die von

den Parametern $p_\mathfrak{a}$ abhängen. Dann kommen also als Unbekannte in dem System der $(\mathfrak{B}+1)$ Gleichungen (7g) und (7h) nur die $(\mathfrak{B}+1)$ Grössen $(1/\sigma).s_\mathfrak{b}$ und $(1/\sigma).\lambda$ vor, welche durch Auflösung dieser Gleichungen als Functionen der Parameter $p_\mathfrak{a}$ zu finden sind. Daraus ergiebt sich, dass, *wenn das vollständige System der Parameter $p_\mathfrak{a}$ constant erhalten wird, die sämmtlichen Bewegungsmomente $s_\mathfrak{b}$, und demgemäss auch die sämmtlichen Geschwindigkeiten $q_\mathfrak{b}$ des nach den Voraussetzungen dieses Paragraphen gefesselten Systems proportional dem Werthe von σ, so wie dem der resultirenden Geschwindigkeit λ wachsen müssen.*

Dies ist im Allgemeinen nicht mehr der Fall, wenn eine
132 Anzahl der Parameter $p_\mathfrak{c}$ eliminirt ist, weil dann die gestellte Bedingung, Constanthaltung sämmtlicher Parameter, nicht mehr erfüllt werden kann, da dazu nöthige Kräfte $P_\mathfrak{c}$ fehlen. In der That sind dann die $q_\mathfrak{b}$ nicht mehr lineare Functionen der $s_\mathfrak{b}$, und die Grösse σ bleibt in den Gleichungen erhalten, wenn man die Grössen $s_\mathfrak{b}$ auf die Form $(1/\sigma)\cdot s_\mathfrak{b}$ zu bringen sucht.

Die Darstellungsweise der Mechanik eines solchen Systems ist also nicht bloss in dem Sinne, wie es am Schluss des vorigen Paragraphen für das allgemeinere gefesselte System nachgewiesen wurde, vollkommen analog der des einfachen monocyklischen Systems zu geben, sondern es kommt hinzu, dass auch die lebendige Kraft in denselben Beziehungen zu den Parametern λ und σ steht, wie im einfachen System zu den q und s. Es ist also auch

$$H + {}^1/_2 \cdot \lambda \cdot \sigma = \Phi$$

die potentielle Energie des Systems.

Aber in einer Beziehung ist eine wesentliche Verallgemeinerung eingetreten. Das q des einfachen monocyklischen Systems ist der Differentialquotient nach der Zeit von einer Raumgrösse, welche die augenblickliche Lage der in stationärer Bewegung begriffenen Theile bestimmt, und das nach der Zeit genommene Integral von q ergiebt also die Differenz zwischen Anfangs- und Endwerth dieser Raumgrösse unabhängig von den inzwischen durchlaufenen Zuständen des Systems. Im vorliegenden verallgemeinerten System ist dies nicht mehr der Fall, und eine Raumgrösse, deren Differentialquotient nach der Zeit die Grösse λ wäre, besteht nicht mehr.

Es lässt sich schliesslich die besondere Art der festen Verbindungen zwischen den bewegten Theilen des Systems, welche in diesem Paragraphen angenommen ist, noch näher charakterisiren. Es ist schon vorher auseinandergesetzt worden, dass die die Verbindung charakterisirende Gleichung:

$$\frac{F}{\sigma} = 1$$

hier voraussetzt, dass das F eine homogene Function ersten Grades von den Grössen s_b sei, und dass eben deshalb die constanten Coefficienten dieser Gleichung nur Raumgrössen zu sein brauchen, ohne Massen und Zeitgrössen zu enthalten. Die ganze Art der Verbindung ist aber, wie die obige Entwickelung gezeigt hat, von der Function F und also auch von ihren Constanten abhängig. Nur diese treten in die Werthe der s_b und q_b als bestimmend für die Verbindungsweise ein.

Anders wäre es in dem allgemeineren Falle des § 4, wenn 133
F keine homogene Function ersten Grades der Grössen s_b ist. In diesem Falle könnten die Differentiale der Zeit aus der Grösse $(1 / \sigma) \cdot F$, welche der Einzahl gleich werden soll, nur verschwinden, wenn Zeitgrössen auch in den nach absolutem Maass gemessenen Constanten vorkommen. Die Zeit selbst kann nicht eintreten, da die Gleichung von der Zeit unabhängig sein soll, wohl aber Differentialquotienten nach der Zeit wie Geschwindigkeiten und Kräfte. Diese aber müssten thatsächlich in dem Systeme bestehen, um mechanisch wirksam sein zu können. Constante Geschwindigkeiten würden nur von aussen her constant erhalten werden können, und würden also mit der vorausgesetzten Unabhängigkeit des Systems und seinem monocyklischen Charakter collidiren. Wohl aber könnten Kräfte, welche ja dt^2 im Nenner haben, als Constanten eintretend, die Zeit wegheben. Solche Kräfte können keine äusseren Kräfte sein, weil diese im vollständigen System alle als veränderlich vorausgesetzt werden müssen. Dagegen könnten Constanten, welche die Wirksamkeit innerer Kräfte bestimmen, wie die Constante a^2 in der Gleichung der elastischen Kraft

$$X = - a^2 . x$$

möglicherweise eintreten; wenigstens wäre, so weit ich sehe, von mathematischer Seite nichts dagegen einzuwenden. Die bisher erfundenen mechanischen Hülfsmittel zu dauernder Bewegungsübertragung, wie unendliche Schnüre, Zahnräder, Frictionsrollen geben immer nur Verhältnisse der Geschwindigkeiten, die von der Grösse der Geschwindigkeit unabhängig sind, wohl aber von der Stellung der Theile abhängig sein können; letzteres z. B. bei Frictionsrollen, die den Winkel ihrer Axen oder auch die Linie, an der sie laufen, ändern können. Beispiele der letzteren Art kommen z. B. in den Integrirmaschinen vor. Ich schlage deshalb vor, die Verbindungen der genannten Art, welche die Gleichung $F = \sigma$ nach den s_b und σ homogen machen, und demgemäss die lebendige Kraft als integrirenden Factor bestehen lassen, als *rein kinematische Verbindungen* zu unterscheiden. So lange nur solche eingeführt werden, bleibt die lebendige Kraft einer der integrirenden Nenner des gefesselten Systems.[1])

Beispiele der allgemeineren Form der Verbindung, in
134 welcher bei unveränderter Lage aller bewegten Theile das Verhältniss zwischen den verschiedenen Geschwindigkeiten von deren Grösse abhängig wäre, weiss ich nicht zu finden. Auch die kinetische Gastheorie giebt Beziehungen zwischen den gleichzeitig bestehenden Bewegungen verschiedener Theile des Systems, welche sich unter das Gesetz der rein kinematischen Verbindungen fügen.

§ 6.

Koppelung je zweier Systeme.

Wenn zwei ursprünglich von einander unabhängige monocyklische Systeme durch passende Regulirung der äusseren Kräfte P_a in einen Zustand versetzt werden, der den Bedingungen einer bestimmten Art fester Verbindung nach den Forderungen des § 4 entspricht, so kann man eine solche feste Verbindung zwischen ihnen eintreten lassen, ohne dadurch übrigens die vorhandene Bewegung zu stören, und sie von da

[1]) Eine weitere Verallgemeinerung dieser Sätze, die ich später fand, folgt unten in § 7.

ab bei eintretenden neuen Veränderungen der Kräfte P_a unter Einhaltung dieser festen Verbindung sich weiter bewegen lassen. Ich will diesen Zustand zeitweiliger fester Verbindung als *Koppelung* der Systeme bezeichnen. Ein analoger Vorgang kommt bei der Wärmebewegung vor, indem zwei Körper gleicher Temperatur ohne Veränderung ihrer inneren Bewegung in leitende Berührung gesetzt werden können, so dass sie bei neuen hinreichend langsamen Veränderungen gleiche Temperatur behalten.

Dabei würde es vorkommen können, dass die beiden Systeme in der Lage, die ihnen behufs der Koppelung gegeben ist, auch noch mit Druck- oder Fernkräften auf einander wirkten. Wir wollen zunächst voraussetzen, dass Kräfte dieser Art, wo sie vorkommen, vollkommen bekannt seien und den willkürlich veränderlichen Kräften P_a zugerechnet werden. Die Koppelung, welche wir als solche bezeichnen, würde also nur Arbeitsgrössen dQ vom einen auf das andere System zu übertragen haben. Wir können eine solche als *reine Bewegungskoppelung* bezeichnen. Unter dieser Voraussetzung können wir die Koppelung der Systeme als eine der festen Verbindungen betrachten, deren Gesetze wir in den letzten beiden Paragraphen erörtert haben. Die beiden Körper ohne die Koppelung sind ein dicyklisches System, welches durch die Koppelung in ein monocyklisches verwandelt wird.

Wir treffen hier wieder auf ganz analoge Verhältnisse in der Wärmelehre. Werden zwei gleich temperirte Körper, die nach aussen keine Wärme verlieren können, in wärmeleitenden Contact gesetzt, so behalten sie von da ab, 135
wenigstens bei genügend langsam eintretenden Veränderungen, gleiche Temperatur, indem die Verbindung Austausch ihrer inneren Bewegung bewirkt. Daneben können sie auch durch Druck und Anziehungskräfte auf einander wirken, aber diese halten sich unter sich und mit den übrigen äusseren Kräften im Gleichgewicht, ungestört durch den gleichzeitigen Austausch der Temperatur. Auch ist keine der Kräfte P_a, mit welcher jeder Körper nach aussen wirkt, durch den Umstand verändert, dass der Eintritt jeder Aenderung seines Volumens oder molecularen Gefüges jetzt andere Wärmevorräthe aus dem

andern Körper eintreten oder zu ihm austreten lässt, als dies ohne die Verbindung der Fall sein würde. Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied in dem Verhalten der actuellen und potentiellen Energie. Falls eine Zustandsänderung eines der Körper den Uebertritt potentieller Energie aus dem andern Körper veranlasste, würden die Kräfte nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten verändert sein. Die Wärme bewahrt in dieser Beziehung durchaus den Charakter actueller Energie, wie er in unseren Sätzen der §§ 4 und 5 entwickelt ist.

Von Interesse ist hier namentlich der Fall, wo zwischen zwei Systemen, welche gleiche Werthe eines ihrer integrirenden Nenner haben, eine mechanische Verbindung so hergestellt wird, dass, während diese Verbindung besteht, die Gleichheit der genannten Nenner erhalten bleiben muss. Um eine solche Art der Verbindung kurz zu bezeichnen, will ich sie *isomore Koppelung* (*'ἴσον μόριον,* gleicher Nenner) nennen. Der Contact zweier gleichtemperirter Körper ist ein Fall dieser Art, da die Temperatur integrirender Nenner der beiden Körper ist. Andre Beispiele wären zwei Kreisel, deren Axen so verbunden werden, dass sie gleiche Umlaufsgeschwindigkeit einhalten müssen. Ist gleiche Rotation schon beim Eingehen der Verbindung vorhanden, so lässt sich die Koppelung ohne Störung der vorhandenen Bewegungen herstellen. Ihre Axen könnten Centrifugalregulatoren verschiedener Art tragen, deren Stellung von der Axe aus durch Kräfte P_a regulirt würde, wodurch mittelbar auch die Umlaufsgeschwindigkeit auf beliebige Höhe zu bringen wäre.

Auch zwei Ströme in ringförmigen Röhren können ohne Störung beider in einen Ring vereinigt werden, wenn beide gleiche Strömung durch jeden Querschnitt haben. Streckung des Canals vermindert die Strömung, Verkürzung erhöht sie. Dadurch kann man je zweien gleichen Werth geben.

136 Dann gelten genau dieselben Betrachtungen, welche für die Wärmebewegung aus den Gleichungen (1.) folgen, und an die ich in § 1 kurz erinnert habe. Wir erhalten dadurch genau dieselben Gesetze für die Möglichkeit, auf reversible Weise Arbeit der Kräfte P_a auf Kosten der inneren Bewegung

der Systeme zu gewinnen. Die Grundvoraussetzung hierfür ist also die, dass wir kein anderes Mittel haben, direct auf die innere Bewegung der gegebenen monocyklischen Systeme zu wirken, als durch isomore Koppelung mit anderen Systemen, und dass für jedes einzelne der koppelbaren Systeme ein einziger bestimmter integrirender Nenner besteht, welcher die ungestörte Koppelung mit dem gleich grossen Nenner eines andern Systems zulässt, wie dies in den oben angeführten Beispielen von Centrifugalregulatoren oder Ringströmen der Fall sein würde.

Dass wir die Wärmebewegung der Atome nicht directer angreifen und verwandeln können, als es der Fall ist, hängt doch auch nur davon ab, dass wir unsere Einwirkungen nicht auf bestimmte, in bestimmter Richtung vorgehende Atome isoliren können, sondern nothwendig immer alle eines bestimmten Raumbezirks gleichmässig treffen müssen. Es beruht nur auf der Beschränkung der uns zu Gebot stehenden Methoden, und nicht im Wesen der Bewegung. Eben deshalb dürfen wir ähnliche Beschränkungen unseres Eingreifens auch für die hier besprochenen analogen Fälle voraussetzen, ohne die Natur des Problems zu verändern.

Wenn wir, wie am Ende des vorigen Paragraphen, rein kinematische Verbindung beider Systeme voraussetzen, so dass die lebendige Kraft des gekoppelten Systems zu einem der integrirenden Nenner dieses Systems wird, so folgt in Bezug auf die möglichen Arten der Koppelung weiter noch Folgendes: Eh seien $\eta_1 = \eta$ und $\eta_2 = \eta$ die beiden integrirenden Nenner beider Systeme, welche durch die Koppelung gleich gemacht werden, σ_1 und σ_2 seien die dazu gehörigen Entropien, so ist

$$\left.\begin{aligned} dQ_1 &= \eta \,.\, d\sigma_1, \\ dQ_2 &= \eta \,.\, d\sigma_2, \\ dQ &= dQ_1 + dQ_2 = \eta \,.\, d\,(\sigma_1 + \sigma_2). \end{aligned}\right\} \quad (8.)$$

Es ist also η auch ein integrirender Nenner des gekoppelten Systems. Unter diesen Umständen sind die lebendigen Kräfte, da sie auch integrirende Nenner der betreffenden Systeme sind, von der Form:

137
$$L_1 = \eta \,.\, \Phi_{\sigma_1},$$
$$L_2 = \eta \,.\, \Psi_{\sigma_2},$$
$$L_1 + L_2 = \eta \,.\, X_{(\sigma_1 + \sigma_2)};$$

also
$$X_{(\sigma_1 + \sigma_2)} = \Phi_{\sigma_1} + \Psi_{\sigma_2}. \qquad (8^a.)$$

Diese letzte Gleichung nach einander nach σ_1 und σ_2 differentiirt, giebt:
$$X'' = 0.$$

Also ist X eine lineare Function von $(\sigma_1 + \sigma_2)$, und von der Form
$$\left.\begin{aligned} X &= a + b + c\,(\sigma_1 + \sigma_2), \\ \Phi &= a + c\,.\,\sigma_1, \\ \Psi &= b + c\,.\,\sigma_2. \end{aligned}\right\} \qquad (8^b.)$$

Bezeichnen wir nun mit s_1 und s_2 die resultirenden Bewegungsmomente beider Systeme, wie sie in dem ursprünglichen Probleme vorkommen, so ist
$$dQ_1 = 2L_1 \cdot \frac{ds_1}{s_1} = \eta \,.\, d\sigma_1,$$
$$dQ_2 = 2L_2 \cdot \frac{ds_2}{s_2} = \eta \,.\, d\sigma_2.$$

Also
$$\left.\begin{aligned} 2\,\frac{ds_1}{s_1} &= \frac{d\sigma_1}{\Phi_{\sigma_1}} = \frac{d\sigma_1}{a + c\,.\,\sigma_1}, \\ 2\,\frac{ds_2}{s_2} &= \frac{d\sigma_2}{\Psi_{\sigma_2}} = \frac{d\sigma_2}{b + c\,.\,\sigma_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (8^c.)$$

Dies giebt integrirt, da σ_1 eine Function nur von s_1, σ_2 nur von s_2 ist:
$$\left.\begin{aligned} \log(s_1^{2c}) &= \log(a + c\,.\,\sigma_1) + \log(\alpha^{2c}), \\ \log(s_2^{2c}) &= \log(b + c\,.\,\sigma_2) + \log(\beta^{2c}), \end{aligned}\right\} \qquad (8^d.)$$

wo α und β Integrationsconstanten bezeichnen. Oder
$$\left.\begin{aligned} \Psi_{\sigma_1} &= a + c\,.\,\sigma_1 = \left(\frac{s_1}{\alpha}\right)^{2c}, \\ \Psi_{\sigma_2} &= b + c\,.\,\sigma_2 = \left(\frac{s_2}{\beta}\right)^{2c}, \end{aligned}\right\} \qquad (8^e.)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= L_1 \cdot \left(\frac{\alpha}{s_1}\right)^{2c}, \\ \eta_2 &= L_2 \cdot \left(\frac{\beta}{s_2}\right)^{2c}. \end{aligned}\right\} \quad (8^f.)$$

Daraus folgt, dass rein kinematische Koppelung isomor nur
ausgeführt werden kann, indem solche integrirende Nenner
gleich gesetzt werden, die das Product aus der lebendigen
Kraft, einer beliebigen Constanten und einer Potenz des resul- 138
tirenden Bewegungsmomentes sind, welche Potenz auf beiden
Seiten denselben Exponenten hat.

In den obigen Beispielen, Koppelung der Rotationsaxen von Kreiseln, und der ringförmigen Ströme ist

$$q = \frac{2L}{s}.$$

In der kinetischen Gastheorie ist ϑ dem L selbst proportional.

§ 7.

Gleichgewicht der inneren Bewegung für drei monocyklische Systeme.

Wir haben schliesslich noch das Analogon zu suchen für diejenige charakteristische Eigenschaft der Wärmebewegung, welche es möglich macht, von der Temperatur eines Körpers als einer Grösse zu reden, und die sich in dem Satze zusammenfasst: *Wenn jeder einzelne von zwei Körpern mit demselben dritten im Wärmegleichgewicht ist, sind sie mit einander im Wärmegleichgewicht.*

Die entsprechende Bedingung für drei monocyklische Systeme kann so formulirt werden: Es wird verlangt, dass die Koppelungsgleichung zwischen 2. und 3. erfüllt sei, so oft sie zwischen 1. und 2. einerseits, so wie zwischen 1. und 3. andrerseits erfüllt ist.

Daraus folgt, wie analytisch unschwer nachzuweisen ist, dass die Koppelungs-Gleichungen sich auf die Form bringen lassen müssen:

$$\varphi_1 = \psi_2 = \chi_3, \quad (9.)$$

wo φ_1 eine Function der Parameter des erstens Systems ist, ψ_2 eine solche des zweiten, χ_3 des dritten. Es würden diese drei Grössen also das Analogon der Temperatur für die monocyklischen Systeme darstellen.

Von den früher angeführten Beispielen fallen unter die hier aufgestellte Bedingung die Kreisel mit gleicher Rotationsgeschwindigkeit ihrer zu koppelnden Axen, und die Ströme in ringförmigen Canälen, deren Strömung durch den Querschnitt übereinstimmend sein muss.

Unter diesen Umständen müssen die allgemeinen Koppelungs-Gleichungen (6^i.) von der Form (9.) sein, d. h. die beiden gleichwerthigen Ausdrücke

$$\frac{q_1}{\frac{\partial F}{\partial s_1}} = \frac{q_2}{\frac{\partial F}{\partial s_2}} \tag{9^a.}$$

139 können s_1 und s_2 gleichzeitig auf beiden Seiten nur in einem gemeinsamen Factor enthalten, der wegzuheben ist, und zwar muss dieser Factor in den Differentialquotienten von F stecken, da q_1 nur Parameter des ersten und q_2 nur solche des zweiten Körpers enthält. Also muss sein:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s_1} &= \varphi_{s_1} \cdot \chi\,, \\ \frac{\partial F}{\partial s_2} &= \psi_{s_2} \cdot \chi\,, \end{aligned}\right\} \tag{10.}$$

worin χ Function von s_1 und s_2 ist. Daraus folgt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_1 \,.\, \partial s_2} = \varphi \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s_2} = \psi \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s_1}\,.$$

Vergleichung der letzten Gleichung mit (10.) zeigt, dass

$$\frac{\partial F}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s_2} - \frac{\partial F}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s_1} = 0, \tag{10^a.}$$

d. h. dass χ eine Function nur von F ist. Schreiben wir:

$$\frac{1}{\chi} = \frac{dX}{dF}\,,$$

$$\varphi = \frac{d\Phi}{ds_1},$$
$$\psi = \frac{d\Psi}{ds_2},$$

so ergeben die Gleichungen (10.) das Integral:

$$X = \Phi_{s_1} + \Psi_{s_1} + C. \qquad (10^b.)$$

Da der Werth von F gleich dem der Entropie σ des vereinigten Systems sein muss, so kann nun X als Function von σ angesehen werden.

Andererseits wird die Koppelungs-Gleichung (9^a.) nun

$$\frac{q_1}{\varphi_{s_1}} = \frac{q_2}{\psi_{s_2}}. \qquad (10^c.)$$

Wenn, wie wir vorausgesetzt haben, q_1 ein integrirender Nenner für das erste, q_2 für das zweite System ist, so ist auch jedes Product von einem jeden q mit einer beliebigen Function der zugehörigen Entropie integrirender Nenner des betreffenden Systems. Die in obiger Gleichung (10^c.) gleichgesetzten Grössen sind also die integrirenden Nenner, die zu den Entropiewerthen Φ_{s_1} und Ψ_{s_1} gehören, die Koppelung ist eine isomore, und die Verwandlungsfähigkeit der inneren Bewegung ist, wie in § 5 erörtert wurde, entsprechenden Beschränkungen unterworfen, wie die der Wärme nach Carnots Gesetz.

Es zeigt sich also ganz allgemein, dass, wenn monocykli- 140
sche Systeme nur solche Verbindungen unter einander zulassen, für welche die genannten zwei Eigenthümlichkeiten der Wärmebewegung gültig sind, dann auch die dritte durch das Carnot'sche Gesetz ausgesprochene wesentliche Eigenthümlichkeit der Wärme für sie gilt, nämlich die beschränkte Umwandlungsfähigkeit. Die genannten beiden Charaktere der Koppelung sind:

1. Die äusseren Kräfte jedes einzelnen Systems hängen nur von dem augenblicklichen Zustand dieses Systems ab und nicht von der eintretenden oder aufhörenden Verbindung mit anderen Systemen. Die Koppelung ist also eine reine Bewegungskoppelung und erzeugt ein neues monocyklisches System.

2. Sobald die Bedingungen des Austausches der inneren Bewegung zwischen zweien oder mehreren Systemen eintreten, hängt das Gleichgewicht der inneren Bewegungen zwischen ihnen davon ab, dass eine bestimmte Function der Parameter eines jeden einzelnen denselben Werth habe, wie die entsprechenden Functionen der andern.

Diese bestimmte Function, welche die der Temperatur in der Wärmelehre zufallende Rolle spielt, muss dann nothwendig ein integrirender Nenner des Systems sein, woraus die beschränkte Verwandlungsfähigkeit der inneren Arbeit folgt. Andererseits ist hervorzuheben, dass, wenn jede Koppelung isomor ist, und der zweiten der eben angeführten Bedingungen entspricht, auch die erste Bedingung erfüllt sein muss.

CXVII.

Studien zur Statik monocyklischer Systeme.

(Fortsetzung.)

Aus den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
27. März 1884. S. 311 bis 318.

§ 7.

Reine Bewegungskoppelung.

Mechanische Verbindungen zweier monocyklischer Systeme 311
sind, wie schon bemerkt, in sehr mannigfacher Weise ausführbar, und ihr Resultat wird im Allgemeinen durch eine Gleichung zwischen den Parametern der beiden verbundenen Systeme analytisch dargestellt werden können, welche wir die *Koppelungs-Gleichung* nennen wollen. Nehmen wir an, als Parameter seien gebraucht langsam veränderliche Raumabmessungen p_a und die der Entropie entsprechenden Grössen s_1 und s_2, welche letzteren die Intensität der Bewegung bestimmen, so wird jede Gleichung zwischen diesen Parametern beider Systeme einen bestimmten Werth des s_2 vorschreiben, wenn sämmtliche p_a und das s_1 gegeben sind. Beide Systeme sind also dann zu einem monocyklischen System verbunden, welches der in § 4 erwähnten allgemeineren Form entspricht.

Wenn wir die genannten Parameter benutzen, wird die Gleichung der Energie für jedes einzelne System [§ 1, Gleichung (1.)] die Form erhalten:

$$dU + \sum_a [P_a \cdot dp_a] = q \cdot ds \qquad (8.)$$

worin U, P_a und q als Functionen der p_a und des s anzusehen sind. Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} P_a &= -\frac{\partial U}{\partial p_a} \\ q &= \frac{\partial U}{\partial s}, \end{aligned}\right\} \quad (8^a.)$$

wie dies schon S. 164[1]) nach Hrn. Gibbs bemerkt ist.

Wir wollen die beiden Systeme durch die Indices 1 und 2 unterscheiden, und ein für allemal annehmen, dass durch die Art der Verbindung keine Energie verloren gehe, aber
312 auch keine andere aufgewendet werde, als die etwa bei der Herstellung der Koppelung gegen die Kräfte P_a zu leisten ist. Dann wird nothwendig während des Bestehens der Koppelung die gesammte Energie $\mathfrak{U}$ des gekoppelten Systems gleich der Summe der Energiewerthe der einzelnen Systeme, diese genommen in ihrem gegenwärtigen Zustande, sein müssen

$$U_1 + U_2 = \mathfrak{U} \quad (9.)$$

Die Grösse $\mathfrak{U}$ wird nun wiederum dargestellt werden können als Function der sämmtlichen Coordinaten p_a und der Entropie $\mathfrak{S}$ des verbundenen Systems. Dann ist die Gleichung (9.) eine Gleichung zwischen den Grössen p_a, s_1, s_2 und $\mathfrak{S}$. Da nun die Koppelungs-Gleichung eine Gleichung zwischen diesen selben Grössen mit Ausschluss von $\mathfrak{S}$ ist, so werden wir die genannten beiden Gleichungen benutzen können, um eine jede der Grössen s_1 und s_2 als Function der p_a und des $\mathfrak{S}$ darzustellen.

Nun wollen wir untersuchen, unter welchen Bedingungen die allgemeinen monocyklischen Systeme den wichtigen Charakter der Wärmebewegung haben, der sich darin zeigt, dass die mechanischen Kräfte P_a eines warmen Körpers durchaus nicht dadurch geändert werden, dass er in die Möglichkeit des Wärmeaustausches mit einem anderen Körper von gleicher Temperatur gesetzt wird, obgleich bei eintretenden Formänderungen, welche Arbeit der Kräfte P_a hervorrufen, jetzt andere Temperaturänderungen in dem betreffenden Körper eintreten, als wenn er isolirt ist. Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied gegen das Princip des Gleichgewichts solcher Kräfte, die von der Bewegung unabhängig sind. Würde durch die

[1]) Seite 125 des vorliegenden Bandes.

Verbindung eine Mittheilung potentieller Energie von Seiten des zweiten Körpers bei irgend einer Formänderung des ersten Körpers bedingt, so würde auch das Kraftmoment, welches dieser Formänderung entspricht, sich ändern, wie dies ganz allgemein im Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ausgesprochen ist.

Wir fragen also, welcher Art muss die Koppelung sein, damit durch dieselbe die Kräfte P_a nicht geändert werden? Wir fahren fort U_1 als Function seiner p_a und des s_1, U_2 als solche der p_b und des s_2 zu betrachten, s_1 und s_2 selbst aber, so wie $\mathfrak{U}$ als abhängig von den sämmtlichen p_a, p_b und dem $\mathfrak{S}$.

Dann ist im gekoppelten System nach (8ª.) und (9.):

$$P_a = -\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial p_a} = -\frac{\partial U_1}{\partial p_a} - \frac{\partial U_1}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial p_a} - \frac{\partial U_2}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial s_2}{\partial p_b},$$

$$P_b = -\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial p_b} = -\frac{\partial U_2}{\partial p_b} - \frac{\partial U_1}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial p_b} - \frac{\partial U_2}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial s_2}{\partial p_b}.$$

Damit nun diese Werthe mit denen der Gleichung (8ª.) 313
zusammenfallen, muss für jedes p_a oder p_b sein

$$\frac{\partial U_1}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial p} + \frac{\partial U_2}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial s_2}{\partial p} = 0 \qquad (9^a.)$$

Daraus folgt, dass die Functionaldeterminanten der s_1 und s_2 für jede Combination von je zwei p_a oder p_b gleich Null sein müssen. Das heisst, es muss eine Gleichung zwischen dem s_1 und s_2 geben, deren Coefficienten von den p_a und p_b unabhängig sein müssen, der Regel nach aber von $\mathfrak{S}$ abhängen werden. Diese Gleichung kann ich bringen auf die Form:

$$\mathfrak{S} = F_{s_1, s_2} \qquad (9^b.)$$

Die Function F ist nur von dem s_1 und s_2 abhängig; alle sonst darin vorkommenden Grössen müssen Constanten sein.

Aus Gleichung (9ᵇ.) folgt weiter, wenn wir nach den p_a, die wir nicht weiter von den p_b zu unterscheiden brauchen, differentiiren

$$\frac{\partial F}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial p_a} + \frac{\partial F}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial s_2}{\partial p_a} = 0 \qquad (9^c.)$$

$$\frac{\partial F}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial \mathfrak{S}} + \frac{\partial F}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial s_2}{\partial \mathfrak{S}} = 1 \qquad (9^d.)$$

Vergleichen wir die Reihe der Gleichungen $(9^{e}.)$ mit $(9^{a}.)$, so folgt

$$\frac{\partial U}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial F}{\partial s_2}-\frac{\partial U}{\partial s_2}\cdot\frac{\partial F}{\partial s_1}=0$$

oder

$$q_1\cdot\frac{\partial F}{\partial s_2}-q_2\cdot\frac{\partial F}{\partial s_1}=0 \qquad (9^{e}.)$$

Diese Gleichung muss die Koppelungs-Gleichung als Theiler enthalten, wenn sie nicht mit ihr identisch ist; denn wenn F als Function von s_1 und s_2 bestimmt worden ist, so giebt diese Gleichung eine Beziehung zwischen den sämmtlichen Parametern p_a, s_1 und s_2, welche während der Koppelung erfüllt sein muss.

Setzen wir entsprechend der zweiten Gleichung $(8^{a}.)$

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \mathfrak{S}}=\mathfrak{q}, \qquad (9^{f}.)$$

oder

$$\frac{\partial U_1}{\partial s_1}\cdot\frac{\partial s_1}{\partial \mathfrak{S}}+\frac{\partial U_2}{\partial s_2}\cdot\frac{\partial s_2}{\partial \mathfrak{S}}=\mathfrak{q}, \qquad (9^{g}.)$$

so ergiebt Vergleichung mit $(9^{d}.)$ und $(9^{e}.)$, dass

314

$$\mathfrak{q}\cdot\frac{\partial F}{\partial s_1}=q_1,$$
$$\mathfrak{q}\cdot\frac{\partial F}{\partial s_2}=q_2,$$

wodurch die Verhältnisse dieser Grössen vollständig bestimmt sind.

Beispiele solcher Koppelungen sind schon in den früheren Paragraphen angeführt. Namentlich gehören dahin alle isomoren Koppelungen des § 5, deren Gleichung $(9^{b}.)$ die Form erhält:

$$\mathfrak{S}=s_1+s_2 \qquad (9^{h}.)$$

(s. auch S. 161)[1]. Ebenso gehören dahin die Koppelungen, welche in § 6 behandelt sind, in denen die lebendige Kraft vor und nach der Koppelung integrirender Nenner ist. Für

---

[1]) Seite 122 des vorliegenden Bandes.

sie besteht eine Gleichung mit constanten Coefficienten zwischen den Grössen

$$\frac{s_1}{\mathfrak{S}} \text{ und } \frac{s_2}{\mathfrak{S}}.$$

Andrerseits sind Beispiele vom Gegentheil denkbar. So könnte eine elastisch gespannte Schnur ohne Ende, welche auf einer nicht cylindrischen Rolle liefe, auch die Stellung der Rolle beeinflussen und also eine den P_α entsprechende Kraft ausüben. Wir würden eine solche also nicht als eine reine Koppelung der inneren Bewegung bezeichnen dürfen.

§ 8.

Gleichgewicht der inneren Bewegung für drei monocyklische Systeme.

Wir haben schliesslich noch das Analogon zu suchen für diejenige charakteristische Eigenschaft der Wärmebewegung, welche es möglich macht von der Temperatur eines Körpers als einer Grösse zu reden, und die sich in dem Satze zusammenfasst: *Wenn jeder einzelne von zwei Körpern mit demselben dritten im Wärmegleichgewicht ist, sind sie mit einander in Wärmegleichgewicht.*

Die entsprechende Bedingung für drei monocyklische Systeme kann so formulirt werden: Es wird verlangt, dass die Koppelungsgleichung zwischen 2 und 3 erfüllt sei, so oft sie zwischen 1 und 2 einerseits, so wie zwischen 1 und 3 andererseits erfüllt ist.

Daraus folgt, wie analytisch unschwer nachzuweisen ist, dass die Koppelungs-Gleichungen sich auf die Form bringen lassen müssen:

$$\varphi_1 = \psi_2 = \chi_3 \qquad (10.)$$

wo φ_1 eine Function der Parameter des ersten Systems ist, 351
ψ_2 eine solche des zweiten, χ_3 des dritten. Es würden diese drei Grössen also das Analogon der Temperatur für die monocyklischen Systeme darstellen.

Von den früher angeführten Beispielen fallen unter die hier aufgestellte Bedingung die Kreisel mit gleicher Rotationsgeschwindigkeit ihrer zu koppelnden Axen, und die Ströme in

ringförmigen Canälen, deren Strömung durch den Querschnitt übereinstimmend sein muss.

Wenn endlich die in den beiden letzten Paragraphen besprochenen Eigenthümlichkeiten gleichzeitig stattfinden sollen, so muss die Koppelungs-Gleichung (9^e.) von der Form (10) sein, d. h. die beiden gleichwerthigen Ausdrücke

$$\frac{q_1}{\dfrac{\partial F}{\partial s_1}} = \frac{q_2}{\dfrac{\partial F}{\partial s_2}} \tag{9^e.}$$

können s_1 und s_2 gleichzeitig auf beiden Seiten nur in einem gemeinsamen Factor enthalten, der wegzuheben ist, und zwar muss dieser Factor in den Differentialquotien von F stecken, da q_1 nur Parameter des ersten und q_2 nur solche des zweiten Körpers enthält. Also muss sein:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s_1} &= \varphi_{s_1} \cdot \chi, \\ \frac{\partial F}{\partial s_2} &= \psi_{s_2} \cdot \chi, \end{aligned}\right\} \tag{11.}$$

worin χ Function von s_1 und s_2 ist. Daraus folgt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_1 \cdot \partial s_2} = \varphi \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s_2} = \psi \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s_1}.$$

Vergleichung der letzten Gleichung mit (11.) zeigt, dass

$$\frac{\partial F}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s_2} - \frac{\partial F}{\partial s_2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial s_1} = 0 \tag{11^a.}$$

d. h. dass χ eine Function nur von F ist. Schreiben wir:

$$\frac{1}{\chi} = \frac{dX}{dF},$$

$$\varphi = \frac{d\Phi}{ds_1},$$

$$\psi = \frac{d\Psi}{ds_2},$$

so ergeben die Gleichungen (11.) das Integral:

$$X = \Phi_{s_1} + \Psi_{s_2} + C \tag{11^b.}$$

Da der Werth von F gleich dem der Entropie $\mathfrak{S}$ des 316
vereinigten Systems sein muss, so kann nun X als Function von $\mathfrak{S}$ angesehen werden.

Da endlich jede Function der Entropie auch wieder als Entropie benutzt werden kann, so ist diese Form der Gleichung bei passender Wahl der Entropie zurückführbar auf die oben erwähnte einfachste Form:

$$\mathfrak{S} = s_1 + s_2 .$$

Andererseits wird die Koppelungs-Gleichung (9ᵉ.) nun

$$\frac{q_1}{\varphi_{s_1}} = \frac{q_2}{\psi_{s_2}} \qquad (11^e.)$$

Wenn, wie wir vorausgesetzt haben, q_1 ein integrirender Nenner für das erste, q_2 für das zweite System ist, so ist auch jedes Product von einem jeden q mit einer beliebigen Function der zugehörigen Entropie integrirender Nenner des betreffenden Systems. Die in obiger Gleichung (11^e.) gleichgesetzten Grössen sind also die integrirenden Nenner, die zu den Entropiewerthen Φ_{s_1} und Ψ_{s_2} gehören, die Koppelung ist eine isomore, und die Verwandlungsfähigkeit der inneren Bewegung ist, wie in § 5 erörtert wurde, entsprechenden Beschränkungen unterworfen, wie die der Wärme nach Carnot's Gesetz.

Es zeigt sich also ganz allgenein, dass, wenn monocyklische Systeme nur solche Verbindungen unter einander zulassen, für welche die genannten zwei Eigenthümlichkeiten der Wärmebewegung gültig sind, dann auch die dritte durch das Carnot'sche Gesetz ausgesprochene wesentliche Eigenthümlichkeit der Wärme für sie gilt: die beschränkte Umwandlungsfähigkeit. Die genannten beiden Charaktere der Koppelung sind:

1. Die äusseren Kräfte jedes einzelnen Systems hängen nur von dem augenblicklichen Zustand dieses Systems ab, unabhängig von der eintretenden oder aufhörenden Verbindung mit anderen Systemen.

2. Sobald die Bedingungen des Austausches der inneren Bewegung zwischen zweien oder mehreren Systemen eintreten, hängt das Gleichgewicht der inneren Bewegung zwischen ihnen

davon ab, dass eine bestimmte Funktion der Parameter eines jeden einzelnen denselben Werth habe, wie die entsprechenden Functionen der anderen.

Diese bestimmte Function, welche die der Temperatur in der Wärmelehre zufallende Rolle spielt, muss dann nothwendig ein integrirender Nenner des Systems sein, woraus die beschränkte Verwandlungsfähigkeit der inneren Arbeit folgt. Andererseits ist hervorzuheben, dass wenn jede Koppelung isomor ist, und der zweiten der eben angeführten Bedingungen entspricht, auch die erste Bedingung erfüllt sein muss.

§ 9.

Analogie für Wärmevorgänge bei Aenderungen im molecularen Bau.

317 Zwei monocyklische Systeme können bei ihrer Verbindung nun auch dadurch Veränderungen erleiden, dass die für die Verbindung nöthige Annäherung oder Lagenänderung Kräfte wachruft, die zwischen einzelnen Theilen beider Systeme wirksam sind. Wenn diese Kräfte bekannt sind, und mit eingerechnet werden unter die Kräfte P_a, die in unseren Theoremen vorkommen, so wird an der Anwendbarkeit unserer Sätze dadurch nichts geändert. Scheinbare Ausnahmen aber, z. B. gegen den Schlusssatz unseres § 8 können eintreten, wenn wir die Existenz solcher Kräfte nicht kennen, und die durch sie bedingten Lagenveränderungen der bewegten Theile nicht zu beurtheilen wissen. In einem solchen Falle würden wir einen Fehler begehen, wenn wir voraussetzen wollten, dass, weil alle uns bekannten Componenten der Kräfte P_a unverändert geblieben sind, auch die Coordinaten p_a durch die Koppelung nicht verändert seien.

Soll dabei der gleiche integrirende Nenner beider Systeme nach der Koppelung denselben Werth behalten, ebenso wie die bekannten Bestandtheile der Kräfte P, so wird im Allgemeinen innere Bewegung abgegeben oder eingenommen werden müssen, der Formel entsprechend

$$dQ = q \cdot ds.$$

Wenn q constant bleiben soll, ist, wie oben gezeigt, s eine

Function der p_a und ändert sich mit diesen. Wenn also die unbekannten Kräfte eine solche Aenderung bewirken, wird das Quantum der inneren Bewegung sich ändern müssen. Das aufgenommene Quantum innerer Bewegung wird aber wieder abgegeben werden müssen, wenn der alte unverbundene Zustand beider Systeme unter den früheren Bedingungen wiederhergestellt werden soll.

Auch kann dabei unter den von uns festgehaltenen Voraussetzungen, wenn keine Aenderung des übereinstimmenden Nenners q zugelassen wird, keine Energie der inneren Bewegung in Arbeit der Kräfte P verwandelt oder aus solcher entnommen werden.

In der Wärmelehre würden wir dieses Ein- und Austreten innerer Bewegung bei constant bleibender Temperatur als „Latentwerden freier Wärme“ oder „Freiwerden latenter Wärme“ bezeichnen können, wenn wir uns eine, wie mir scheint, nützliche Verallgemeinerung dieses Begriffs erlauben 318 wollen. Man hat damit bisher nur die Wärmeänderungen bei Aenderungen der Aggregatzustände bezeichnet, welche reversible Processe im Sinne der Thermodynamik sind. Aber es scheint mir kein Grund vorhanden, warum man nicht die bei allerlei anderen Aenderungen des molecularen Baus, auch bei Dichtigkeitsänderungen der Gase, Auflösung von Salzen und chemischen Processen auftretenden Wärmeänderungen ebenso bezeichne, vorausgesetzt dass dieselben reversibel und bei constant gehaltener Temperatur durchgeführt werden. Dann wäre bei constant gehaltener Temperatur ϑ entsprechend der Gleichung

$$dQ = \vartheta \cdot ds$$

die Grösse s, die Entropie, multiplicirt mit dem constant bleibenden ϑ, als das Quantum der latenten Wärme des Körpersystems zu bezeichnen. Dies ist gerade der Theil der Energie, der bei isothermen Aenderungen des molecularen Baus die Energieform der Wärme behalten muss, den ich deshalb als gebundene Energie bezeichnet, und dessen Scheidung von der frei verwandelbaren Energie der molecularen Kräfte ich in meinen thermodynamischen Arbeiten auf bestimmtere Grundsätze zu bringen gesucht habe. Dass die bei Aenderungen

des Aggregatzustandes frei oder latent werdende Wärme keinen Einfluss auf die chemischen Verwandtschaften habe, ist ja von den Beobachtern, die sich mit Thermochemie beschäftigen, namentlich von Hrn. M. Berthelot längst richtig erkannt und hervorgehoben worden. Was aber das Analogon dieses Latentwerdens der Wärme in anderen Fällen von Aenderungen des Molecularbaus ist, lässt sich meines Erachtens ohne genaue Untersuchung der entsprechenden Arbeit bei reversiblen Processen nicht streng scheiden.

CXVIII.

Studien zur Statik monocyklischer Systeme.

(Zweite Fortsetzung.)

Aus den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
10. Juli 1884. S. 755 bis 759.

Kritisches.

In Bezug auf die kritischen Bemerkungen, welche Hr. 755
R. Clausius der Königlichen Akademie unter dem 19. Juni d. J. mitgetheilt, freue ich mich, zunächst constatiren zu können, dass, soweit ich sehe, nicht die geringste Differenz zwischen mir und meinem Kritiker betreffs der Richtigkeit der von mir aufgestellten Sätze besteht, wenn man in dieselben nichts hineinträgt, als was ich durch dieselben auszusagen beabsichtigte, und wie ich meine, auch wirklich ausgesagt habe. Dass Hr. Clausius eine solche Differenz zu entdecken glaubte, kann ich mir nur durch die Verschiedenheit des Sinnes erklären, in dem der terminus: „stationäre Bewegung" von ihm selbst und von anderen mathematischen Physikern gebraucht wird.

In der an die Spitze meines ersten Aufsatzes gestellten Worterklärung des von mir gewählten Namens der monocyklischen Systeme habe ich den genannten Ausdruck in dem Sinne gebraucht, wie es früher allein üblich war, wo man in der mathematischen Physik als stationär nur eine Bewegung bezeichnete, bei welcher an demselben Orte dauernd dieselbe Geschwindigkeit gleichartiger bewegter Theile sich findet. In diesem Sinne stationär ist die Bewegung eines rotirenden

Kreisels oder der Strom reibungsloser Flüssigkeit in einem ringförmigen Canale. Hr. Clausius hat diesen zur bestimmten Bezeichnung eines wichtigen und sehr nothwendigen Begriffs viel gebrauchten Namen angefangen in einer erweiterten Bedeutung zu gebrauchen, statt einen neuen zu wählen, was im Interesse strenger wissenschaftlicher Sprache vorzuziehen gewesen wäre. Er nennt Bewegungen stationär, bei welchen der Mittelwerth der Geschwindigkeiten, Amplituden u. s. w. genommen für längere Zeiten constant bleibt. Also alle regelmässig periodischen Bewegungen, alle solche, die man als Superpositionen vieler periodischer Bewegungen von verschiedenen rationalen oder irrationalen Perioden betrachten könnte, auch u. a. die Bewegungen des Planetensystems mit seinen Störungen, sind ihm stationär; und in diesem Sinne scheint er meine Definition gelesen und verstanden zu haben.

756 Es ist oft unmöglich, im Anfange eines Aufsatzes, der eine neue Gruppe von Vorgängen zusammenfassen soll, eine kurze Worterklärung zur vorläufigen Orientirung des Lesers in den bisherigen wissenschaftlichen terminis so zu fassen, dass sie genau dem entspricht, was gemeint ist, und was nachher strenger in der mathematischen Formulirung ausgesprochen wird. In solchen Fällen ziehe ich es vor, die Worterklärung lieber etwas zu eng zu ziehen, als zu weit, da es für den Leser eine weniger unangenehme Enttäuschung ist, wenn er schliesslich etwas mehr erfährt, als ihm versprochen ist, denn umgekehrt. Und so ist auch diese meine an die Spitze gestellte Definition, wenn darin das Wort „stationär" in dem alten strengen Sinne genommen wird, etwas zu eng der Definition gegenüber, welche nachher in mathematischer Form gegeben wird; sie wäre aber allerdings zu weit, wenn das genannte Wort in dem Hrn. Clausius eigenthümlichen Sinne gemeint wäre, und dann wären in der That seine Einwände gegen die nachher in der mathematischen Formulirung des Problems vorgenommenen Einschränkungen theilweis gerechtfertigt.

Die Bestimmungen über die Art der Bewegungen, auf die sich meine Sätze beziehen, sind in mathematischer Formulirung gegeben, zunächst in Bezug auf ein allgemeineres mechanisches System, welches ich seitdem als *polycyklisches*

bezeichnet habe, auf S. 166 und 167[1]) meiner ersten Abhandlung unter Nr. 1 und 2. Da ein vollkommen drehrunder Kreisel sich mechanisch nicht anders verhält, als ein Körper mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten, der um die Axe des ungleichen Moments rotirt, und die Bewegung des letztern nicht im strengen alten Sinne stationär ist, so habe ich die von mir gemeinten Bewegungen, auf die sich meine Sätze beziehen sollen, dadurch definirt, dass potentielle und actuelle Energie des Systems unabhängig sein sollen von einer Anzahl von Coordinaten $p_{\mathfrak{b}}$, welche zur vollständigen Bestimmung der Lage der Theile des Systems nothwendig wären, aber nur mit ihrem Differentialquotienten nach der Zeit

$$\frac{\partial p_{\mathfrak{b}}}{\partial t} = q_{\mathfrak{b}}$$

in die Werthe der genannten Theile der Energie eintreten. Dies wird bei den streng stationären Bewewegungen offenbar immer der Fall sein; aber nicht immer werden Bewegungen, auf die die zuletzt gegebene Bestimmung passt, streng stationär sein. So würde z. B. die Bewegung eines Körpers mit zwei gleichen Trägheitsmomenten, der unter dem Einfluss der Schwere rotirt und Präcessionsbewegung ausführt, miteingeschlossen sein unter die polycyklischen, aber nicht unter die 757
streng stationären Bewegungen. Meine mathematische Formulirung der Aufgabe ist also noch etwas weiter, als die Formulirung in Worten, die im Anfang meiner Arbeit gegeben ist. Dagegen wird eine Bewegung, wie die, welche Hr. Clausius auf S. 667 wählt, um die Unrichtigkeit meiner Gleichungen nachzuweisen, ausgeschlossen. Denn bei dieser wäre die lebendige Kraft jedes Punktes jedesmal Null, so oft er die Umkehrpunkte seiner Bahn erreicht hätte, dazwischen aber endlich. Ein solches Beispiel, was unter die von mir gegebenen Definitionen nicht passt, beweist natürlich nichts gegen die Richtigkeit meiner Sätze.

Ferner definire ich l. c. unter Nr. 2, was ich unter der Beschränkung auf die *Statik* des Systems verstehe. Aenderungen im Zustand des Systems sollen nicht ausgeschlossen

[1]) Seite 128 und 129 des vorliegenden Bandes.

sein, aber sie sollen so langsam vorgehen, dass das System sich niemals merklich aus den Zuständen entfernt, in denen es dauernd beharren könnte. Da man es durch Regulirung der äusseren Kräfte vollkommen in der Hand hat, diese Veränderungen mit beliebiger Langsamkeit vor sich gehen zu lassen, so sind dies vollkommen zulässige Annahmen, die die Art der zu behandelnden Probleme abgrenzen. Auch liegen genau dieselben Annahmen den sämmtlichen Sätzen, welche Hr. Clausius über die reversiblen Umwandlungen der Wärme aufgestellt hat, als stillschweigende Voraussetzungen zu Grunde, wie ich in (§. 1) meiner ersten Arbeit schon bemerkt habe.

Das Ziel endlich meines Aufsatzes ist gewesen, nachzuweisen, dass eine Classe von mechanisch vollkommen verständlichen Bewegungen besteht, bei der ähnliche Beschränkungen der Umwandlung von Arbeitsäquivalenten vorkommen, wie sie der zweite Hauptsatz für die Wärmebewegung ausspricht. Die Wärmebewegung tritt uns zunächst doch als eine Bewegung unbekannter Art entgegen, über die wir uns bisher meist nur sehr unbestimmte Vorstellungen machen können, abgesehen von dem einen in der kinetischen Gastheorie behandelten Falle. Es erscheint mir als ein vollkommen rationeller Weg, bei solcher Lage der Dinge nachzusehen, unter welchen allgemeinsten Bedingungen die bekannten allgemeinsten physikalischen Eigenthümlichkeiten der Wärmebewegung bei andern wohlbekannten Classen von Bewegungen vorkommen können. In diesem Sinne habe ich die Analogien, die sich zwischen dem Verhalten der Wärmebewegung und den von mit untersuchten monocyklischen Bewegungen finden, allerdings überall hervorgehoben, aber doch von Anfang an auch ausgesprochen (S. 159)[1]), dass die Wärmebewegung nicht im strengsten Sinne monocyklisch sei. Ich habe demzufolge auch nirgends den Anspruch erhoben, „eine Erklärung“ des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie gegeben zu haben.

756 Für den mir vorgesetzten Zweck fiel der Hauptnachdruck bei der Auswahl der heranzuziehenden Beispiele natürlich auf ihre vollständige mechanische Verständlichkeit.

---

[1]) Auf Seite 119 und 120 des vorliegenden Bandes abgedruckt.

Der Nachweis, dass Carnot's Gesetz zutreffen muss bei den für die Wärme vorausgesetzten Atombewegungen, ist, so weit ich sehe, *vollständig* bisher erst gegeben bei der kinetischen Gastheorie für Gase mit einatomigen Molekeln. Bei mehratomigen Molekeln muss die Annahme zu Hülfe genommen werden, dass die lebendige Kraft der inneren Molekularbewegung proportional sei, und eine ganz ähnliche Hypothese führt Hr. Clausius für viel allgemeinere Fälle auch in Nr. 14 der von ihm citirten Arbeit von 1870 ein, der er den Titel gegeben hat: „Ueber die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Principien.“ Er selbst erkennt die erwähnte Hypothese als solche an, indem er sie als „eine naheliegende Voraussetzung“ bezeichnet.

Es wird dabei vorausgesetzt, dass die mittleren lebendigen Kräfte sämmtlicher stationär (im weiteren Sinne) bewegten Massenpunkte immer einander proportional wachsen, auch bei allen Aenderungen der Umlaufszeit oder der übrigen Parameter ihrer Bewegung.

Weiter wird dann unter Nr. 15 desselben Aufsatzes der Factor T, welcher im Werthe des Differentials der inneren Arbeit vorkommt, und dem, was ich den integrirenden Nenner genannt habe, entspricht, als Temperatur interpretirt. Nimmt man Rücksicht auf die physikalische Bedeutung der Temperatur, so kann man sagen, es ist dies eine Ausdehnung der vorher für einen Körper gemachten Hypothese, auf verschiedene in Temperaturgleichgewicht befindliche Körper. Der übrigens sehr interessante und für eine künftige Vollendung der Wärmetheorie wichtige Satz, den Hr. Clausius in jener Arbeit wirklich erwiesen hat, ist, dass für eine gewisse Klasse von Bewegungen die mittlere lebendige Kraft integrirender Nenner für die Zunahme der inneren Arbeit sei. Die Gruppe der Bewegungen, für welche er das vollständig beweist, ist nach einer Seite hin allgemeiner, als die von mir behandelte, denn sie ist nur als stationär im weiteren Sinne angesehen. In anderen Beziehungen ist sie enger, da vorausgesetzt ist, *erstens* dass die mittleren Perioden aller einzelnen Bewegungen aus unbekannt bleibenden Gründen gleich gross sind und bei eintreten-

den Aenderungen immer gleich gross bleiben; *zweitens* dass die Kräfte, die auf jedes einzelne Molekel wirken, nur von der Art sind, wie sie von ruhenden anderen Körpern ausgehen können. Diesen beiden letzteren Einschränkungen unterliegen meine Sätze nicht.

Ich bitte um Verzeihung, dass ich diese Thatsachen constatire, da der erste Absatz S. 664 in dem Aufsatz meines
759 Kritikers einem nicht genau orientirten Leser leicht den Eindruck machen könnte, als wäre mein Aufsatz nur eine abgeschwächte Wiederholung dessen, was Hr. Clausius schon vor vierzehn Jahren besser und vollständiger geleistet hätte.

CXIX.

Principien der Statik monocyklischer Systeme.

Zweiter Aufsatz.

Aus Borchardt-Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik
Bd. 97. S. 317 bis 336. 1884.

---

§ 8. 317

Ein allgemeiner Charakter der physischen Verbindungen bewegter Körper.

In § 5 habe ich die Bedingungen besprochen, unter denen in einem zusammengesetzten monocyklischen Systeme die lebendige Kraft ein integrirender Nenner ist. Es zeigte sich, dass dies für alle bisher bekannten Fälle mechanischer Koppelung je zweier cyklischer Bewegungen der Fall ist. Aber die dort herbeigezogenen Betrachtungen über die allgemeinen charakteristischen Verhältnisse von Verbindungen bewegter Körper genügten nicht, die Möglichkeit anderer Arten von Verbindungen allgemein auszuschliessen, bei denen die oben genannte Folgerung nicht zutreffen würde.

Ausserdem ist der Beweis jenes Satzes dort auf die von mir in § 4 gegebene Integrationsform der zur Bestimmung der Entropie des gefesselten Systems dienenden Differentialgleichungen gestützt. Diese Integrationsform ist allerdings im Allgemeinen ausreichend, nämlich wenn die aus ihr hergeleiteten Gleichungen zur Bestimmung der s_b alle von einander unabhängig sind. Aber in speciellen Fällen können dieselben auch von einander abhängig werden. Dann genügt jene allgemeine

Form nicht mehr, sondern man muss dann zu der von Hrn. L. Kronecker entwickelten allgemeineren Form der Integration übergehen.[1]

Ich will in diesem Paragraphen zunächst ein bisher nicht benutztes allgemeines Princip, betreffend den Charakter aller durch ponderable Naturkörper zwischen bewegten Körpern herstellbaren Verbindungen anwenden, welches die volle Verallgemeinerung des oben erwähnten Satzes erlaubt, und gleichzeitig einen Beweis desselben ermöglicht, der die Integration der Differentialgleichungen für die Art der Fesselung nicht voraussetzt.

318 Es liegt hier ein einigermaassen neuer Fall vor, insofern es sich um Herstellung fester Verhältnisse zwischen Geschwindigkeiten handelt, während bei den älteren Untersuchungen mechanischer Probleme, wo feste Verbindungen angenommen wurden, man darunter nur die Unveränderlichkeit bestimmter räumlicher Abmessungen verstand. Einzelne Beispiele solcher Verbindungen von Geschwindigkeiten, wie die Wirkungen von Zahnrädern, unendlichen Schnüren und Frictionsrollen, die wie Zahnräder mit sehr feinen Zähnen wirken, schliessen sich noch nahe genug an die festen Verbindungen der letzteren Klasse an, da jedes Paar in einander greifender Zähne zweier Räder nur als feste Körper auf einander wirken.

In § 4, S. 124[2], habe ich nur zwei Eigenschaften solcher Verbindungen für die Gewinnung der Gleichungen des Problems verwendet, dieselben, welche auch in der bisherigen Mechanik fester Körper verwendet worden sind, nämlich 1) dass die Verbindungen gar keinen Einfluss haben, so lange die Bewegung schon an und für sich so vor sich geht, wie es ihnen entspricht; 2) dass sie keine Arbeit erzeugen oder vernichten. Die Frage nach den Fällen, wo die lebendige Kraft integrirender Factor des durch die Verbindungen entstehenden zusammengesetzteren monocyklischen Systems wird, führte uns dann auf die Abgrenzung derjenigen Fälle, die ich in § 5, S. 133,[3] als die *rein kinematischen Verbindungen* bezeichnet habe.

---

1) S. Crelles Journal für Mathematik, Bd. 97, S. 141—145. 1884.

2) Seite 142 des vorliegenden Bandes.

3) Seite 153 des vorliegenden Bandes.

Diese letztgenannte Unterscheidung kann auf noch allgemeinere Betrachtungen zurückgeführt werden.

Wirklich herstellen können wir nämlich solche Verbindungen immer nur mit Hülfe von Naturkörpern geeigneter Art, und wenn auch unter Umständen von deren Masse und Energie in der mathematischen Fassung des Problems nicht weiter die Rede zu sein braucht: so kann schliesslich auf diesem Wege doch nichts geschehen, was den allgemeinsten Gesetzen der Statik und Dynamik ponderabler Körper widerspräche.

In diesem Sinne sind also z. B. die Verbindungen, welche räumliche Abmessungen fest machen, als elastische Körper zu behandeln, die bestimmten Formänderungen einen sehr grossen Widerstand entgegensetzen. Dies wird hier weiter auszuführen nicht nöthig sein.

Für die Verbindungen von Geschwindigkeiten, um die es sich jetzt handelt, ist Folgendes zu erwägen. Gehen wir zurück auf die von Lagrange für das vollständige System aufgestellten Bewegungsgleichungen. Wir haben in § 2 die potentielle Energie des Systems mit Φ bezeichnet, mit L die lebendige 319
Kraft. Φ ist dann eine Function der Coordinaten p_a allein, L eine homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten

$$q_a = \frac{\partial p_a}{\partial t}, \tag{11.}$$

deren Coefficienten Functionen der p_a sind. Die Bewegungsgleichungen sind

$$P_a = -\frac{\partial \Phi}{\partial p_a} + \frac{\partial L}{\partial p_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_a}\right). \tag{11^a.}$$

Darin ist $P_a \,.\, dp_a$ der Werth der Arbeit, den das System bei der Aenderung dp_a nach aussen hin abgiebt, und $(-P_a)$ ist die äussere Kraft, welche nöthig ist, um die Bewegung ungestört fortgehen zu lassen, wenn die p_a als Functionen der Zeit gegeben sind. Diese äusseren Kräfte habe ich in den gegebenen Sätzen über die vollständigen monocyklischen Systeme als vollkommen willkürlich bestimmbar angesehen.

Wenn nun die $p_\mathfrak{a}$ als Functionen der Zeit irgend einer möglichen Bewegungsweise des Systems entsprechend bestimmt worden sind, so können wir unter entsprechender Abänderung der Kräfte $P_\mathfrak{a}$ dieselbe Bewegung auch durchweg langsamer oder schneller vor sich gehen lassen. Setzen wir

$$t = n \, . \, \mathfrak{t}$$

und bezeichnen wir die Werthe der P, p, q und des L, nachdem das t durch $n \, . \, \mathfrak{t}$ ersetzt ist, mit den entsprechenden deutschen Buchstaben $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{L}$, so bleibt der Theil der Kräfte P, der von Φ abhängt, ganz ungeändert, während

$$q_\mathfrak{a} = \frac{\partial p_\mathfrak{a}}{\partial t} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial \mathfrak{p}_\mathfrak{a}}{\partial \mathfrak{t}} = \frac{1}{n} \cdot \mathfrak{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial p_\mathfrak{a}} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial p_\mathfrak{a}},$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}}\right] = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{d}{d\mathfrak{t}}\left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{q}_\mathfrak{a}}\right].$$

Es werden also alle Componenten der Kräfte, welche von L abgeleitet sind, sowohl diejenigen, welche in die $P_\mathfrak{a}$, als auch diejenigen, welche in die $P_\mathfrak{b}$ hineinfallen, gleichmässig auf das n^2-fache gesteigert, wenn wir die Zeit aller Vorgänge auf $1/n$ ihrer früheren Dauer reduciren.

Wenn nun die betreffende Bewegung eine polycyklische ist, wenn sich also während derselben *erstens* ein Theil der Coordinaten, die wir mit $p_\mathfrak{b}$ bezeichnet haben, immer nur so
320 verändert, dass weder Φ noch die Coefficienten in L dadurch geändert werden, so wird diese Bedingung auch erfüllt werden, wenn statt des t die kürzere Zeit $\mathfrak{t}$ eintritt, und es wird somit hierdurch die Erfüllung dieser ersten Bedingung der polycyklischen Bewegung nicht beeinträchtigt.

Die *zweite* Bedingung, durch die wir unsere Probleme als statische charakterisirten, war, dass die Differentialquotienten $\partial p_\mathfrak{a} / \partial t$ und $\partial q_\mathfrak{b} / \partial t$ verschwindend kleine Werthe haben sollten. Da

$$\frac{\partial p_\mathfrak{a}}{\partial t} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial \mathfrak{p}_\mathfrak{a}}{\partial \mathfrak{t}},$$

$$\frac{\partial q_\mathfrak{b}}{\partial t} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{q}_\mathfrak{b}}{\partial \mathfrak{t}},$$

so wird auch diese Bedingung nicht verletzt, so lange n endliche Werthe hat.

Unser polycyklisches System bleibt also polycyklisch, auch wenn sämmtliche Geschwindigkeiten in gleichem Maasse gesteigert oder vermindert werden. Nur die Kräfte $P_\mathfrak{a}$, welche übrigens im vollständigen System als willkürlich bestimmbar von uns betrachtet worden sind, müssen entsprechend geändert werden, ebenso wie die $P_\mathfrak{b}$ in $dQ_\mathfrak{b}$.

Daraus folgt weiter, dass, wenn wir irgend welche physisch ausführbaren Verbindungen zwischen den verschiedenen cyklischen Bewegungen des Systems einführen, die Lagrange's allgemeinen Gleichungen der Dynamik entsprechen, dadurch die Werthe der $q_\mathfrak{b}$ alle von dem Werthe einer dieser Grössen abhängig machen, und das System in ein monocyklisches verwandeln: doch immer die durch Einführung des $\mathfrak{t}$ als Zeit, statt des t ausgedrückte Verlangsamung oder Beschleunigung der Bewegung möglich sein muss, unter entsprechender Aenderung der Kräfte $P_\mathfrak{a}$ und mit unveränderten Werthen der Parameter $p_\mathfrak{a}$. *Keine mit physischen Körpern herstellbare Art der Fesselung cyklischer Bewegungen kann also vermeiden, jede beliebige proportionale Steigerung aller Geschwindigkeiten zuzulassen, wobei die Verhältnisse dieser Geschwindigkeiten zu einander unverändert bleiben, so lange alle Coordinaten* $p_\mathfrak{a}$ *ihren Werth constant halten.* Diese letzteren Verhältnisse also können in dem, wie auch immer, gefesselten monocyklischen System sich nur mit Aenderung der $p_\mathfrak{a}$ ändern, also nur Functionen der Coordinaten sein.

Wenn die Lage aller mitbewegten Theile vollständig bekannt ist, und ihre Coordinaten in den Werthen der Energie vorkommen, so ist dies alles selbstverständlich. Nun können aber gelegentlich unter den mitbewegten Stücken solche von verschwindender Masse vorkommen, die eben deshalb keinen 321
endlichen Antheil zur lebendigen Kraft geben, auch von äussern Kräften nicht angegriffen werden, und doch die Bewegungen der schwereren Theile von einander abhängig machen, wie es unendliche Schnüre, Frictionsrollen, u. s. w. thun. Deren besondere Lage und Bewegung kann dann vernachlässigt werden, obgleich die durch sie vermittelte Verbindung der schwereren bewegten Theile bestehen bleibt, und nur diese letztere in der

mathematischen Fassung des Problems zu berücksichtigen ist. Und da auch unbekannte complicirte Mechanismen dieser Art sich einschalten könnten, so ist es wichtig, den allgemeinsten Charakter ihrer Wirksamkeit definiren zu können.

Die Bedingungen für eine jede Fesselung, durch welche ein polycyklisches System in ein monocyklisches verwandelt werden kann, sind auf S. 125 dieses Bandes[1]) entwickelt. Behalten wir die dort gegebene allgemeinste Form bei, so sollen die $s_\mathfrak{b}$, λ und σ so als Functionen der unabhängigen Veränderlichen $p_\mathfrak{a}$ und x bestimmt werden, dass

$$\left.\begin{aligned} dQ &= \sum_\mathfrak{b} [dQ_\mathfrak{b}], \\ dQ = \lambda \,.\, d\sigma &= \sum_\mathfrak{b} [q_\mathfrak{b} \,.\, ds_\mathfrak{b}] \end{aligned}\right\} \quad (12.)$$

wird. Die $q_\mathfrak{b}$ sind als Functionen der $s_\mathfrak{b}$ und $p_\mathfrak{a}$ gegeben, und sind in dem Falle des vollständigen Systems, auf den wir uns hier beschränken, homogene lineare Functionen der $s_\mathfrak{b}$; das x muss, wie das zuletzt eingeführte n, die Geschwindigkeit der Bewegungen bestimmen.

Zunächst ist zu bemerken, dass unter den in diesem Paragraphen gemachten Voraussetzungen Aenderungen der Coordinaten allein, welche die Entropie σ nicht verändern, dies auch nicht thun dürfen, wenn dieselben Aenderungen bei n-fach gesteigerten Geschwindigkeiten eintreten. Denn, wie vorher gezeigt, sind in jedem Zeitmoment die Grössen

$$dQ_\mathfrak{b} = q_\mathfrak{b} \cdot ds_\mathfrak{b}$$

dann einfach die n^2-fachen Werthe der früheren, ihre Summe $dQ = \lambda \,.\, d\sigma$ also Null, wenn sie vorher Null war.

Unter der aufgestellten Bedingung, wonach nämlich die Coordinaten und Geschwindigkeiten sich so ändern sollen, dass der zur Zeit bestehende Werth von σ ungeändert bleibt, werden bei monocyklisch gefesseltem System die $q_\mathfrak{b}$ und also auch die $s_\mathfrak{b}$ bestimmte Functionen der Coordinaten $p_\mathfrak{a}$ sein müssen. Wenn wir die sämmtlichen Geschwindigkeiten q und also auch

[1]) S. 144 des vorliegenden Bandes.

die sämmtlichen Grössen s auf das n-fache steigern, erhalten 322
wir eine zweite Gruppe von zusammengehörigen Werthen der q, s und p, welche einem anderen constant bleibenden Werthe der Entropie σ entsprechen. Da nun für die Entropie auch immer eine beliebige Function der Entropie gesetzt werden kann, so können wir die einzelnen geänderten Werthe der Entropie in dem vorliegenden Falle auch durch die verschiedenen Werthe des n charakterisiren, oder das n dem σ proportional setzen.

Bei Steigerung der Geschwindigkeiten allein, ohne Aenderung der Coordinaten, wird keinerlei Arbeit von Kräften

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial p_{\mathfrak{a}}} + \frac{\partial L}{\partial p_{\mathfrak{a}}} = 0$$

verrichtet. Also entspricht hierbei die Arbeit dQ nur der eingetretenen Steigerung der lebendigen Kraft.

Setzen wir also

$$q_{\mathfrak{b}} = n \, . \, \mathfrak{q}_{\mathfrak{b}} \quad \text{und} \quad s_{\mathfrak{b}} = n \, . \, \mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}, \tag{12^a.}$$

wobei die $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{s}$ unabhängig von n werden, aber abhängig von den Coordinaten $p_{\mathfrak{a}}$ bleiben: so wird einmal

$$dQ = \frac{\partial L}{\partial n} \cdot dn = n \, . \, dn \, . \sum_{\mathfrak{b}} [\mathfrak{q}_{\mathfrak{b}} \, . \, \mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}] \tag{12^b.}$$

und andererseits

$$\left. \begin{aligned} dQ &= \sum_{\mathfrak{b}} [q_{\mathfrak{b}} \, . ds_{\mathfrak{b}}] \\ &= n^2 \sum_{\mathfrak{b}} [\mathfrak{q}_{\mathfrak{b}} \, . \, d\mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}] + n.dn.\sum_{\mathfrak{b}} [\mathfrak{q}_{\mathfrak{b}} \, . \, \mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}]. \end{aligned} \right\} \tag{12^c.}$$

Aus der Vergleichung beider Werthe von dQ folgt:

$$\sum_{\mathfrak{b}} [\mathfrak{q}_{\mathfrak{b}} \, . \, d\mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}] = 0. \tag{12^d.}$$

Da die $d\mathfrak{s}$ nur von Aenderungen der Coordinaten $p_{\mathfrak{a}}$ abhängen, welche als ganz unabhängig von einander vorausgesetzt werden dürfen, so ergeben sich aus dieser letzten Gleichung die partiellen Differentialgleichungen:

$$\sum_{\mathfrak{b}} \left[\mathfrak{q}_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} \right] = 0 \tag{12^e.}$$

in Bezug auf alle $p_{\mathfrak{a}}$, die in den Werthen der $\mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}$ vorkommen.

Dies sind die Gleichungen, welche zur Bestimmung der $\mathfrak{s}$ ebenso, wie die Gleichungen (6^d.) des § 4 benutzt werden können. Zunächst ist hier zu bemerken, dass die Gleichung (12^b.) geschrieben werden kann:

$$\left.\begin{aligned} dQ &= 2L \cdot \frac{dn}{n}, \\ &= 2L \cdot d \log n, \end{aligned}\right\} \quad (12^f.)$$

323 woraus folgt, *dass die lebendige Kraft der Bewegung nothwendig einer der integrirenden Nenner des durch die Verbindung erzeugten monocyklischen Systems sein muss.*

Dieser Satz ergiebt sich also hier für die vollständigen monocyklischen Systeme mit nur physischen Verbindungen und unbeschränkten Kräften P_a als allgemeingültig und ohne Beschränkung nach der Anzahl der p_a.

Benennung der q und s.

Wir haben schon in § 5 die Analogie mit den Verhältnissen der einfachen monocyklischen Systeme hervorgehoben. Bei diesen ist nach § 3 Gleichung (5^a.)

$$\left.\begin{aligned} 2L &= q \,.\, s, \\ dQ &= q \,.\, ds = 2L \,.\, d\,(\log s). \end{aligned}\right\} \quad (5^a.)$$

Wenn wir versuchen, statt s eine Function von s als Entropie einzuführen, so finden wir, dass nur das Product von s mit einer Constanten c die Form der beiden obigen Ausdrücke unverändert lässt:

$$2L = \left(\frac{q}{c}\right) \cdot c.\, s,$$

$$dQ = \left(\frac{q}{c}\right) \cdot d\,(c.\, s).$$

Ebenso können wir in (12^f.) setzen:

$$s = c.n,$$

$$q = \frac{2L}{c.\, n},$$

und erhalten dadurch die ganz analogen Ausdrücke, wie für ein einfaches monocyklisches System. Die beiden so bestimmten

Grössen q und s wachsen umgekehrt proportional der Zeit, welche bei gleichen Werthen sämmtlicher p_a und ungleicher Geschwindigkeit gebraucht wird, um die gleiche Lagenveränderung auszuführen. Man wird den Factor c meist zweckmässig so bestimmen können, dass q frei von der Masse wird, dann wird s der Masse proportional werden müssen. Es wird also q alsdann eine Raumgrösse dividirt durch eine Zeit, die man als *resultirende Geschwindigkeit* bezeichnen kann, während s gleichzeitig die Bedeutung des entsprechenden resultirenden *Bewegungsmomentes* erhält. Mit einem willkürlichen Zahlenfactor werden beide aber immer behaftet bleiben.

Nach den gewonnenen Ergebnissen werden sich also diese beiden Begriffe auf jeden Fall auch zusammengesetzter monocyklischer Bewegungen anwenden lassen, und es wird dadurch
die Unbestimmtheit, welche der provisorischen Uebertragung 324
des Begriffs der Entropie auf die monocyklischen Systeme anhaftete, so weit möglich, beseitigt.

Uebrigens können die Raumgrössen, welche der Grösse $q.t$ entsprechen, von sehr verschiedenen Dimensionen sein Für rotirende Kreisel ist q die Rotationsgeschwindigkeit, also $q.t$ ein Bogen oder Winkel, d. h. eine reine Zahl. Für circulare Wasserströme ist es ein Volumen.

Wenn $q.t$ die Dimension L^k hat, so hat $s.t$ die Dimension $M.L^{2-k}$ und

$$\frac{s}{q} = [M.L^{2-2k}]. \qquad (12^g.)$$

Dies macht es oft möglich, den Werth des k zu finden.

Für die Wärmebewegung der Masse m eines Gases ist nach der am Schlusse von § 3 gewählten Bezeichnung:

$$\begin{aligned} L &= \mathfrak{J}.m.\gamma.\vartheta, \\ dQ &= 2L.d\mathfrak{S}, \\ &= m.\mathfrak{J}.\left(\gamma.d\vartheta + (c-\gamma).\vartheta.\frac{dv}{v}\right), \end{aligned}$$

woraus, wie bekannt, folgt:

$$\mathfrak{S} = \log s = \log [C.\sqrt{\vartheta}.v^{\frac{c-\gamma}{2\gamma}}],$$

$$q = \frac{2L}{s} = \mathfrak{J} \cdot \frac{m\gamma}{C} \cdot \sqrt{\vartheta} \cdot v^{\frac{\gamma - c}{2\gamma}}.$$

Um q von der Masse frei zu machen, wird man die Integrationsconstante C setzen können

$$C = \frac{m}{b}$$

und erhält

$$q = \mathfrak{J} \cdot b \cdot \gamma \cdot \sqrt{\vartheta} \cdot v^{\frac{\gamma - c}{2\gamma}},$$

$$s = \frac{m}{b} \cdot \sqrt{\vartheta} \cdot v^{\frac{c - \gamma}{2\gamma}}.$$

Für einatomige Gase ist

$$c = \tfrac{5}{3} \cdot \gamma,$$

also

$$q = \mathfrak{J} \cdot b \cdot \gamma \cdot \sqrt{\vartheta} \cdot v^{-\frac{1}{3}},$$

$$s = \frac{m}{b} \cdot \sqrt{\vartheta} \cdot v^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{s}{q} = \frac{m}{\mathfrak{J} \cdot b^2 \cdot \gamma} \cdot v^{\frac{2}{3}}.$$

325 Daraus folgt, da $v^{\frac{2}{3}}$ das Quadrat einer Länge zur Dimension hat, und der Werth von s/q sonst nur Constanten enthält, dass unser k in $(12^{g}.)$ auch für die einatomigen Gasmolekeln gleich Null ist, wie bei den Rotationsgeschwindigkeiten. Dann enthält die Grösse $\sqrt{\vartheta}$ von veränderlichen Grössen nur das Product einer Rotationsgeschwindigkeit mit einer Länge, d. h. eine Weggeschwindigkeit. In der That wird bei gleichbleibender Beschaffenheit des Gases $\sqrt{\vartheta}$ durch eine solche gemessen. Für Vergleichung verschiedener Gase wird allerdings ϑ durch die lebendige Kraft des Molekels mq^2, nicht q^2, bestimmt.

Bei zweiatomigen Molekeln treten wegen der hinzukommenden intramolecularen Bewegung Abweichungen von diesen Bestimmungen ein.

Dass die Koppelung hier Gleichheit der lebendigen Kraft und nicht Gleichheit der resultirenden Geschwindigkeit fordert, ist schon am Schluss von § 6 bemerkt worden.

Die einfache Bedeutung, welche der die Entropie in den Gleichungen (12^a.) und (12^f.) vertretenden Grösse n zukommt, und übrigens unter einschränkenden Annahmen schon von den Hrn. Boltzmann und Clausius in den Seite 129[1]) citirten Äufsätzen bemerkt und hervorgehoben war, wird in den unvollständigen monocyklischen Systemen, wo Coordinaten p_t mittels der Gleichungen $P_t = 0$ eliminirt sind (s. § 2 Gleichungen (4.) bis (4^d.)) verdeckt, weil in ihnen Zustände verschiedener Geschwindigkeit mit gleich bleibenden Coordinaten der Regel nach nicht mehr vorkommen können. Die sich hier anschliessenden Fälle aus der Wärmelehre beziehen sich fast immer gerade auf solche unvollständige Systeme, in denen nur noch sehr wenige willkürlich veränderliche Coordinaten geblieben sind.

Uebrigens sind die Bewegungen der *unvollständigen Systeme* doch immer nur als besondere Fälle der Bewegungen der vollständigen zu betrachten, eingeschränkt dadurch, dass gewisse Kräfte P_t, welche in den vollständigen als willkürlich veränderlich betrachtet werden, dauernd den bestimmten Werth Null erhalten. Unvollständig ist in den als solche bezeichneten Systemen also nur die Veränderlichkeit der Kräfte. Daraus ergiebt sich unmittelbar, dass alle Sätze, welche für die vollständigen Systeme mit ganz willkürlich veränderlichen Kräften P gelten, auch für die unvollständigen gelten müssen, dass also auch in diesen bei rein physischen Verbindungen die lebendige Kraft nothwendig einer der integrirenden Factoren ist.

§ 9. 326

Die Integration der Fesselungsgleichungen für ein physisch verbundenes System.

Die Aufgabe, die analytischen Ausdrücke solcher Verbindungen zu finden, die ein polycyklisches System monocyklisch zu machen geeignet sind, ist in § 4 behandelt worden. Wenn wir uns, wie in § 8 auf physisch mögliche Verbindungen beschränken, treten die Gleichungen (12^e.) ein, welche ein

---

[1]) Seite 149 des vorliegenden Bandes.

etwas einfacheres System darstellen, als die Gleichungen (6^d.) und (6^e.) des § 4, und von vornherein schon die von Hrn. L. Kronecker (Crelles Journal f. Mathem., S. 141, Bd. 97, Gleichung (I.)) gewählte Normalform haben. Denn die darin vorkommenden $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ sind Functionen der Coordinaten allein, und entsprechen solchen Werthen der Bewegungsmomente, wie sie bei constant bleibender Entropie, deren Werth also als eine Constante C zu bezeichnen ist, eintreten können.

Die Voraussetzung physischer Verbindungen bei vollständiger Bewahrung aller Coordinaten $p_\mathfrak{a}$ bedingt:

1. dass alle Gleichungen zwischen den $\mathfrak{s}$ und dem C, so weit sie nur durch die Verbindungen des Systems bedingt sind, nicht geändert werden, wenn alle diese Grössen mit demselben Factor n multiplicirt werden. Alle diese Gleichungen müssen also homogen nach den $\mathfrak{s}$ und dem C sein.

2. Die Geschwindigkeiten sind darzustellen in der Form:

$$\mathfrak{q}_\mathfrak{b} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}}.$$

Hierin ist $\mathfrak{L}$ eine homogene ganze Function zweiten Grades der $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$, deren Coefficienten im Allgemeinen Functionen der $p_\mathfrak{a}$ sind. Die Anzahl der letztern kann bis zu $^1/_2\, \mathfrak{B}.(\mathfrak{B}+1)$ steigen, wenn $\mathfrak{B}$ wie früher, die Anzahl der vorkommenden $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ bezeichnet. Das System der Differentialgleichungen ist also:

$$0 = \sum_\mathfrak{b} \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}}{\partial p_\mathfrak{a}} \right]. \tag{14.}$$

Wenn wir die früher von mir gegebene Form der Integration dem hier vorliegenden Falle anpassen, so erhält man eine Lösung, wenn man eine Function F von sämmtlichen Grössen $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$, die aber für den hier vorliegenden Fall homogen ersten Grades sein muss, eventuell gebrochen oder irrational sein kann, willkürlich wählt und dann setzt:

$$\left.\begin{aligned} F &= C, \\ \mathfrak{q} &= \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}}. \end{aligned}\right\} \quad (14^a.)$$

327 Dies sind $(\mathfrak{B}+1)$ Gleichungen mit den $(\mathfrak{B}+1)$ Unbekannten $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ und λ, welche also im Allgemeinen ausreichen, die

Unbekannten zu bestimmen, vorausgesetzt, dass die Gleichungen (14^a.) alle von einander unabhängig sind.

Die Grösse λ kann man herausschaffen, wenn man durch Multiplication jeder der Gleichungen (14^a.) mit dem zugehörigen $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ die Summe bildet:

$$\sum_\mathfrak{b} [\mathfrak{q}_\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{s}_\mathfrak{b}] = 2\mathfrak{L} = \lambda \,.\, F,$$

also

$$\lambda = \frac{2\mathfrak{L}}{F}.$$

Danach wird die Reihe der Gleichungen (14^a.) die Form erhalten:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} - \frac{2\mathfrak{L}}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} = 0, \qquad (14^b.)$$

oder, wenn man mit F^2 dividirt:

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} \left[\frac{\mathfrak{L}}{F^2} \right] = 0. \qquad (14^c.)$$

Die Werthe der $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ müssen also so gewählt werden, dass *das Verhältniss* $\mathfrak{L} \,/\, F^2$ *ein Grenzwerth wird.* Oder: *Wenn die Grössen* $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ *so variirt werden, dass* $\delta F = 0$, *muss auch* $\delta \mathfrak{L} = 0$ *sein.* Die Gleichungen (14^b.) und (14^c.) ergeben aber nur Verhältnisse der $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$. Erst die Gleichung $F = C$ bestimmt den Werth jedes einzelnen durch den Werth von C, welches letztere schliesslich als ein willkürlich zu wählender Factor in den Werthen der $s_\mathfrak{b}$ stehen bleibt.

Im Allgemeinen genügen diese Bedingungen zur Bestimmung der $\mathfrak{s}$, beziehlich ihrer Verhältnisse zu einander. Die Fälle, wo dieselben ungenügend sind, werden ausgefüllt durch die Form der Integration, welche Hr. L. Kronecker entwickelt hat. In der hier gebrauchten Bezeichnung entsprechen

$$\text{seinem } x, \quad \frac{y_\mathfrak{b}}{y_\varrho}, \quad \varphi_\mathfrak{b}$$

$$\text{unsere } p, \quad \frac{\mathfrak{s}_\mathfrak{b}}{C}, \quad \frac{\mathfrak{q}_\mathfrak{b}}{C},$$

und der die beliebige Function P enthaltende Ausdruck

$$y_\varrho \cdot \psi_\varrho = y_\varrho \cdot P \cdot \varphi_\varrho = \frac{1}{\lambda} \cdot$$

Das ϱ bezeichnet hierin einen bestimmten von den Indices $\mathfrak{b}$. Seine Functionen f_r, welche gewisse y_r als Functionen der
328 andern y_ϱ darstellen, müssen im Falle rein physischer Verbindungen, der hier vorausgesetzt wird, homogene Functionen erster Ordnung sein, wie oben bemerkt. Unter diesen Umständen verschwindet y_ϱ ganz aus der Function, und statt der übrigen y treten nur die entsprechenden $\mathfrak{s}$ ein. Die so entstehende Function $\lambda \cdot \Phi$ ist homogen zweiten Grades nach den $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ und C, wie die oben von uns gebrauchte entsprechende Function $\lambda\,(F - C)$. Der wesentliche Unterschied liegt nur darin, dass das Φ noch einige der p enthalten kann, die ich mit $p_\mathfrak{r}$ bezeichnen will, und dass zu den Gleichungen, welche den obigen (14.) und (14^a.) entsprechen, nämlich:

$$\Phi = 0, \tag{15.}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \mathfrak{q}_\mathfrak{b}, \tag{15^a.}$$

noch neue hinzukommen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{r}} = 0. \tag{15^b.}$$

Da die Anzahl der Gleichungen (15.) und (15^a.) schon ebenso gross ist, als die der Unbekannten λ und $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$, so sind in diesem System nothwendig $\mathfrak{N}$ Gleichungen Folge der andern.

Der von Hrn. Kronecker gegebene Beweis zeigt, dass, wenn überhaupt die Differentialgleichungen erfüllt werden können, indem man die $\mathfrak{s}$ irgend welchen Functionen der $p_\mathfrak{a}$ gleich setzt, eine Function Φ mit den in den Gleichungen (15.), (15^a.) und (15^b.) definirten Eigenschaften existiren muss.

Nun ist zunächst zu bemerken, dass, so lange in den Gleichungen (15^b.) noch irgend welche $p_\mathfrak{r}$ vorkommen (mit $p_\mathfrak{t}$ zu bezeichnen), die mittels dieser Gleichungen als Functionen der übrigen und der $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ dargestellt werden können, diese sich

aus der Function Φ eliminiren lassen, ohne die Gültigkeit der Gleichungen (15.), (15[a].) und (15[b].) zu stören.

Bezeichnen wir nämlich den Werth von Φ nach der Elimination der $p_\mathfrak{t}$ mit $\mathfrak{F}$, so ist wegen der Gleichungen (15[b].):

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} + \sum_\mathfrak{t} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{t}} \cdot \frac{\partial p_\mathfrak{t}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} \right] = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p_\mathfrak{r}} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{r}} + \sum_\mathfrak{t} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{t}} \cdot \frac{\partial p_\mathfrak{t}}{\partial p_\mathfrak{r}} \right] = 0$$

und identisch:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p_\mathfrak{t}} = 0.$$

Wir werden also die Elimination der $p_\mathfrak{r}$ aus Φ fortsetzen 323
können, bis die Gleichungen (15[b].) selbst, oder wenigstens ihre gleich Null zu setzenden Factoren gar keine $p_\mathfrak{r}$ mehr enthalten, sondern Gleichungen nur noch zwischen den $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ sind. Dies würde z. B. geschehen, wenn die Function Φ jedes $p_\mathfrak{r}$ nur in einer Function

$$\varphi_\mathfrak{r} = \psi_\mathfrak{r} + p_\mathfrak{r} \cdot \chi_\mathfrak{r}$$

enthielte. Dann wäre die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial p_\mathfrak{r}} = \frac{\partial F}{\partial \varphi_\mathfrak{r}} \cdot \chi_\mathfrak{r}$$

erfüllt durch die Annahme

$$\chi_\mathfrak{r} = 0, \qquad (15^c.)$$

falls diese den überflüssigen Gleichungen entspricht. Die Gleichungen (15[c].), welche keine $p_\mathfrak{r}$ mehr enthalten, werden dadurch zu erfüllen sein, dass man eine gewisse Anzahl der Grössen $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$, die ich durch die Bezeichnung $\mathfrak{s}_\mathfrak{h}$ unterscheiden will, durch die übrigen $\mathfrak{s}_\mathfrak{g}$ ausdrückt. Ich bezeichne diesen in $\mathfrak{s}_\mathfrak{g}$ ausgedrückten Werth des $\mathfrak{s}_\mathfrak{h}$ als $f_\mathfrak{h}$, also

$$\mathfrak{s}_\mathfrak{h} = f_\mathfrak{h}. \qquad (15^d.)$$

Diese Ausdrücke kann man anwenden, um die $\mathfrak{s}_\mathfrak{h}$ aus Φ zu eliminiren; den dadurch gewonnenen Werth von Φ bezeichne ich mit $h - C$. Also

$$\Phi = h - C = 0. \qquad (15^e.)$$

Die Grössen $\chi_\mathfrak{r}$ werden dabei alle gleich Null; folglich enthält das h keine $p_\mathfrak{r}$ mehr, sondern ist eine Function nur der $\mathfrak{s}_\mathfrak{g}$. Die Gleichungen ($15^e$.), welche dadurch identisch werden, differentiirt, ergeben

$$0 = \frac{\partial \chi_\mathfrak{r}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{g}} + \sum_\mathfrak{h} \left[\frac{\partial \chi_\mathfrak{r}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{h}} \cdot \frac{\partial f_\mathfrak{h}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{g}}\right]. \qquad (15^f)$$

Ferner hat man

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_\mathfrak{g} &= \lambda \,.\, \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{g}} \\ &= \lambda \,.\, \frac{\partial h}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{g}} - \lambda \,.\, \sum_\mathfrak{h} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{h}} \cdot \frac{\partial f_\mathfrak{h}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{g}}\right], \\ \mathfrak{q}_\mathfrak{h} &= \lambda \,.\, \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{h}}. \end{aligned}$$

Also:

330 $$\mathfrak{q}_\mathfrak{g} + \sum_\mathfrak{h} \left[\mathfrak{q}_\mathfrak{h} \cdot \frac{\partial f_\mathfrak{h}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{g}}\right] = \lambda \cdot \frac{\partial h}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{g}}. \qquad (15^g.)$$ [1]

Die Gleichungen (15^g.) in Verbindung mit (15^d.) und (15^e.) sind an Zahl wiederum genügend, um die Unbekannten $\mathfrak{s}_\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}_\mathfrak{h}$ und λ zu bestimmen, wenn keine der genannten Gleichungen von den andern abhängig ist. Die in (15^d.), (15^e.) und (15^g.) gegebenen Werthe der $\mathfrak{q}_\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{q}_\mathfrak{h}$ erfüllen übrigens das System der Differentialgleichungen

$$\sum \left[\mathfrak{q}_\mathfrak{h} \cdot \frac{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{h}}{\partial p_\mathfrak{a}}\right] = 0,$$

wie leicht zu sehen ist, ohne dass die Functionen h und $f_\mathfrak{h}$ noch weiteren neuen Bedingungen unterworfen werden. Diese können also willkürlich gewählte Functionen sein.

Das System der Gleichungen (15^e.), von dem wir ausgingen, enthält mehr Gleichungen als Unbekannte. Die überschüssigen Gleichungen müssen aber erfüllt werden wenigstens durch eines oder einige der Werthsysteme der $\mathfrak{s}$, welche aus der genügenden Zahl von Gleichungen hergeleitet sind.

[1]) Diese Gleichung ist analog der von Hrn. L. Kronecker unter (IV.) S. 142 (Borchardt-Crelle's Journal für Mathematik, Bd. 97) aufgestellten, hat aber eine etwas andere Abgrenzung der Indices $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$.

Wir haben schliesslich noch die Fälle zu besprechen, wo die gewonnenen Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten nicht ausreichen.

Die Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}} = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}} \tag{16.}$$

werden von einander nicht unabhängig sein, wenn eine Anzahl $\mathfrak{s}$, die wir mit $\mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}$ bezeichnen wollen, in $\mathfrak{L}$, wie in F nur in einer kleineren Anzahl von Functionen der $\mathfrak{s}$ vorkommen, die wir mit $h_{\mathfrak{t}}$ bezeichnen wollen. Da $\mathfrak{L}$ eine ganze homogene Function zweiten Grades der $\mathfrak{s}$ ist, werden auch die $h_{\mathfrak{t}}$ nur ganze homogene Functionen ersten oder zweiten Grades sein können, und da F frei von dem p sein soll, wird dies auch für die $h_{\mathfrak{t}}$ zutreffen müssen. Dann würde in Bezug auf die $\mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}$ die obige Gleichung lauten

$$\sum_{\mathfrak{t}} \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial h_{\mathfrak{t}}} \cdot \frac{\partial h_{\mathfrak{t}}}{\partial \mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}} \right] = \lambda \cdot \sum_{\mathfrak{t}} \left[\frac{\partial F}{\partial h_{\mathfrak{t}}} \cdot \frac{\partial h_{\mathfrak{t}}}{\partial \mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}} \right]. \tag{16^a.}$$

Und diese Gleichungen wären erfüllt, wenn

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial h_{\mathfrak{t}}} = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial h_{\mathfrak{t}}}, \tag{16^b.}$$

welches letztere nach der gemachten Annahme weniger Gleichungen sind, als die unter (16^a.) angegebenen.

Wenn der Werth von $\mathfrak{L}$ explicite durch die $p_{\mathfrak{a}}$ und $\mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}$ gegeben ist, wird sich schon vor Bildung der Function F erkennen lassen, ob eine solche Möglichkeit vorhanden ist. Dabei 331
ist zu bemerken, dass, wenn zwei Grössen $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ nur in einer linearen Verbindung mit constanten Coefficienten im Werthe von $\mathfrak{L}$ vorkommen, dies zur Folge hat, dass das Verhältniss von $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ direct durch den Werth von $\mathfrak{L}$ gegeben ist, und also überhaupt nicht mehr durch die Wahl von F geändert werden kann. In diesem Falle wird $\mathfrak{L}$, als Summe von Quadraten dargestellt, weniger Quadrate liefern, als Grössen $\mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}$ darin vorkommen. Wenn die Grössen h dagegen Ausdrücke zweiten Grades mit constanten Coefficienten sind, wird sich dies ebenfalls erkennen lassen, und eine Function F, welche

eines oder mehrere derselben h enthält, wird keine vollkommen bestimmten Werthe der $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ mehr liefern können, sondern nur Werthe der $h_\mathfrak{t}$ und der nicht in ihnen enthaltenen $\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$. Die $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ sind dann nur so weit bestimmt, als sie sich verändern können, ohne die $h_\mathfrak{t}$ zu ändern.

Eine vollständige Bestimmung der $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ wird dann nur durch Anwendung einer Form von F eintreten können, in der diese Function statt der h andre ihnen an Werth gleiche, aber noch Coordinaten $p_\mathfrak{r}$ enthaltende Functionen η einschliesst, und zwar muss die Anzahl der η und $p_\mathfrak{r}$ zusammengenommen mindestens der Zahl der in den η enthaltenen $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ gleich sein. Dann gesellen sich zu den früheren Gleichungen noch die, welche dem

$$\frac{\partial F}{\partial p_\mathfrak{r}} = 0$$

entsprechen. Falls F Grössen $p_\mathfrak{r}$ nur in den h enthält, sind diese Bedingungen erfüllt, wenn

$$\frac{\partial \eta_\mathfrak{t}}{\partial p_\mathfrak{r}} = 0 \tag{16^c.}$$

für alle in den $\eta_\mathfrak{t}$ vorkommenden $p_\mathfrak{r}$. Soll diese Lösung aber in Bezug auf die Werthe der $\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$ und $h_\mathfrak{t}$ mit der früheren übereinstimmen, so muss sich ergeben

$$\eta_\mathfrak{t} = h_\mathfrak{t}, \tag{16^d.}$$

wenn die Werthe der p aus den Gleichungen (16^c.) in die Werthe der η eingesetzt werden. Dann müssen die η ganz besondere Formen haben. Setzt man z. B.

$$\eta = \frac{ps_1 + s_2}{\sqrt{Ap^2 + 2Bp + C}}, \tag{17.}$$

so ergiebt die Bedingung

$$0 = \frac{\partial \eta}{\partial p}:$$

$$s_1 (Ap^2 + 2\,Bp + C) = (ps_1 + s_2)(Ap + B)$$

332 oder

$$p = \frac{s_2\,B - s_1\,C}{s_1\,B - s_2\,A}, \tag{17^a.}$$

und setzt man diesen Werth von p in den Werth von η, so erhält man als Werth von h

$$h = \frac{\sqrt{C.s_1^2 - 2B.s_1.s_2 + A.s_2^2}}{\sqrt{AC - B^2}} \qquad (17^b.)$$

Die Grösse h^2 ist also in der That eine Function, welche als ein Theil von $\mathfrak{L}$ eintreten kann. Der Werth von h könnte linear werden nur, wenn $AC = B^2$, und dann wird er unendlich, da, wie oben erörtert, lineare Functionen dieser Art nicht möglich sind.

Es ergiebt sich hier weiter

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{s}_1} : \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{s}_2} = (Cs_1 - Bs_2) : (As_2 - Bs_1)$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{s}_1} : \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{s}_2} = p : 1.$$

Beide Verhältnisse sind aber gleich gemäss dem oben gegebenen Werthe von p.

Wenn weiter keine $\mathfrak{s}$ vorkommen und $B = 0$, entspricht dieses Beispiel dem Falle, wo zwei rotirende Axen mit constanten Trägheitsmomenten A und C durch Frictionsrollen auf einander wirken, aber eine veränderliche Neigung gegen einander haben. Die Neigung der Axen bestimmt dann das Verhältniss der Geschwindigkeiten p, aber die lebendige Kraft wird nur durch die Drehungsgeschwindigkeiten der Axen, nicht durch deren Winkel bestimmt.

Die Existenz solcher Functionen könnte sich aber noch mehr verstecken, wenn in dem eben gegebenen Beispiel dem Werthe der lebendigen Kraft noch das Quadrat des Ausdrucks, der Null werden muss:

$$0 = P[p(s_1 B - s_2 A) + s_1 C - s_2 B]^2 \qquad (17^c.)$$

multiplicirt mit P einer beliebigen Function der Coordinaten hinzugefügt würde. Dieser würde bei der vorausgesetzten Art der Fesselung aus allen Gleichungen, die zur Bestimmung der

$\mathfrak{s}_\mathfrak{g}$ gebraucht werden, verschwinden, weil die hinzukommenden Glieder immer einen Null werdenden Factor haben.

Bestehen mehrere lineare homogene Functionen $\eta_\mathfrak{t}$, so würde eine jede homogene Function zweiten Grades aus den-
333 selben gebildet dem Werthe der lebendigen Kraft hinzugefügt werden können, ohne die Werthe der $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ zu verändern. Aber während in dem Falle der Gleichungen (17.) bis (17^b.) das in F eintretende p eine beliebige Function der $p_\mathfrak{a}$ sein könnte, wird es in dem letzterwähnten Falle nur die Werthe haben können, die in den η vorkommen. Auch würde in diesem letzten Falle in der Regel die Elimination des p aus dem F wieder möglich werden, ohne eine Unbestimmtheit herbeizuführen, so lange der Coefficient P des Zusatzes (17^c.) zur lebendigen Kraft von Null verschieden wäre.

Denkt man sich den Coefficienten P als veränderlich, so sieht man, dass der unbestimmt bleibende Fall ein Grenzfall ist, der dem Durchgang des Werthes von P durch Null entspricht.

Derselbe unbestimmt bleibende Fall ist noch dadurch merkwürdig, dass er ein dicyklisches oder polycyklisches System darstellt, in dem, wie in einem monocyklischen die auf Steigerung der inneren Bewegung gerichtete Arbeit in der Form

$$dQ = n \,.\, \lambda \,.\, d(n \,.\, F)$$

dargestellt werden kann.

Bisher hatten wir vorausgesetzt, dass das L solche Functionen enthielte, wie sie auch in der Normalform des F ohne Einmischung von p vorkommen könnten. Erst die zuletzt besprochenen Zusätze führten Functionen der $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$, die auch p enthalten, in das L ein.

Wir können aber auch den andern Fall haben, dass die Functionen η, welche p enthalten, sowohl im F wie im L vorkommen. Unter diesen sind diejenigen von besonderem Interesse, welche auf die Integrationsform der Gleichungen (15^d.) bis (15^g.) führen, bei welcher der Werth des resultirenden Moments durch eine beschränkte Anzahl der Variablen

$\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ dargestellt werden kann. Es tritt dies ein, wenn eines oder einige der η_t die Form haben

$$\eta_t = \varphi_t + p_t \cdot \chi_t \,,$$

woraus folgt, wie oben in $(15^c.)$

$$\frac{\partial \eta_t}{\partial p_t} = \chi_t = 0.$$

Da es hier nur darauf ankommt, an einem Beispiel zu zeigen, wie ein solcher Fall behandelt werden kann, so setze ich voraus, dass nur ein $\eta = \varphi + p \cdot \chi$ vorhanden sei, welches 334
linear nur zwei $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ enthält, die beide sonst weder in L noch in F vorkommen. Dann sind die $(\mathfrak{B}-2)$ Gleichungen zu erfüllen:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{a}} = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{a}}\,, \tag{18.}$$

ferner

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} = \lambda . \frac{\partial F}{\partial \eta}\,, \tag{18^a.}$$

$$\chi = 0, \tag{18^b.}$$

$$F = C. \tag{18^c.}$$

Diese Anzahl der Gleichungen ist gerade ausreichend.

Wenn wir nun statt F eine andere Function setzen:

$$\mathfrak{F} = (1 + \varepsilon . p)\, F, \tag{19.}$$

welche in F übergeht, wenn ε gleich Null wird, so ändern sich die obigen Gleichungen (18.), $(18^a.)$ und $(18^c.)$ in die folgenden:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{a}} = \lambda . (1 + \varepsilon . p) \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{a}}\,, \tag{19^a.}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} = \lambda . (1 + \varepsilon . p) \frac{\partial F}{\partial \eta}\,, \tag{19^b.}$$

$$F = \frac{C}{1 + \varepsilon . p}\,. \tag{19^c.}$$

Die neuen Werthe der $\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$ werden also dieselben Functionen der p und des λ wie die alten, nur multiplicirt mit dem Factor

$(1 + \varepsilon \cdot p)$, und wenn wir sie in den Werth von F einsetzen, so wird dieser, da F homogen ersten Grades sein muss, eine Function der p multiplicirt mit $\lambda\ (1 + \varepsilon \cdot p)$. Der Werth des hier vorkommenden λ, durch C ausgedrückt, wird also durch $(1 + \varepsilon . p)^2$, der Werth des $\mathfrak{s}_a$ und des η aber, in C ausgedrückt, durch $(1 + \varepsilon . p)$ dividirt sein. Wenn ε verschwindet, gehen alle diese Werthe in die früheren zurück.

Dagegen geht nun die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0$$

über in

$$\varepsilon . F + (1 + \varepsilon . p) . \chi . \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0, \qquad (19^d.)$$

woraus folgt, dass χ nicht mehr strenge gleich Null, wohl aber mit ε zugleich sehr klein wird. Aus dieser Gleichung kann man nun aber den Werth von p bestimmen, und diesen Werth
335 kann man anwenden, um p aus dem Werthe von $\mathfrak{F}$ zu eliminiren. Da der so gefundene Werth von p nicht bloss die Function η, welche in F und $\partial F / \partial \eta$ steckt, enthält, sondern auch χ, welches die beiden in η enthaltenen $\mathfrak{s}_\mathfrak{b}$ ebenfalls enthält, so gehen diese auch in den Werth von $\mathfrak{F}$ über, während p aus diesem verschwindet, und es werden nun statt der einen Gleichung $(19^b.)$ zwei verschiedene Gleichungen eintreten:

$$\mathfrak{q}_\mathfrak{b} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} = \lambda \cdot \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} + \lambda \cdot \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}}$$

für zwei Indices $\mathfrak{b}$. Vorausgesetzt, dass η keine Function von χ ist, folgt aus diesen beiden:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} - \lambda \cdot \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \eta} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \chi} = 0.$$

Daraus folgt, dass die Function $\mathfrak{F}$, welche nach der Elimination des p nur noch die $\mathfrak{s}$ enthält, die Lösung vollständig bestimmt,

welche Lösung für den Grenzfall $\varepsilon = 0$ dieselben Werthe, wie die Gleichungen (18.) bis (18^{c}.) ergiebt.[1])

Ich möchte schliesslich noch darauf aufmerksam machen, dass man in der ganzen Behandlung dieser Aufgabe die Rolle der Grössen

$$U \quad s_{\mathfrak{b}} \quad \sigma \quad q_{\mathfrak{b}} \quad \lambda$$

mit den Grössen

$$-H \quad q_{\mathfrak{b}} \quad \lambda \quad s_{\mathfrak{b}} \quad \sigma$$

vertauschen kann und dieselben Systeme von Gleichungen erhält.

Drückt man die lebendige Kraft durch die $p_{\mathfrak{a}}$ und $q_{\mathfrak{b}}$ aus, und verlangt, dass im gefesselten System die $q_{\mathfrak{b}}$ solche Functionen der $p_{\mathfrak{a}}$ und des λ werden sollen, dass die Werthe der Kräfte $P_{\mathfrak{a}}$ dabei unverändert bleiben: so führt dies, wie oben, auf die Gleichungen

$$\Sigma \left[\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{\partial q_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} \right] = 0 \qquad (20.)$$

oder 336

$$\sum_{\mathfrak{b}} \left[s_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial q_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}} \right] = 0. \qquad (20.)$$

Wird ferner:

$$dQ = \sum_{\mathfrak{b}} [q_{\mathfrak{b}} \cdot ds_{\mathfrak{b}}] = \lambda \cdot d\sigma,$$

$$2L = \sum_{\mathfrak{b}} [q_{\mathfrak{b}} \cdot s_{\mathfrak{b}}] = \lambda \cdot \sigma,$$

so folgt

$$\sigma \,.\, d\lambda = \sum_{\mathfrak{b}} [s_{\mathfrak{b}} \,.\, dq_{\mathfrak{b}}],$$

also mit Berücksichtigung der Gleichungen (20.)

$$\sigma = \sum_{\mathfrak{b}} \left[s_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial q_{\mathfrak{b}}}{\partial \lambda} \right]. \qquad (20^{a}.)$$

---

[1]) Eine ähnliche Behandlungsweise kann man auch in den andern Fällen, wo die η die p in beliebiger Weise enthalten, einschlagen, indem man dem F Factoren $(1 + \varepsilon \,.\, p)$ giebt, vorausgesetzt, dass die Werthe der p dabei auch von den Grössen $\partial\eta \,/\, \partial p$ abhängig werden, und dadurch genügend viel andere Functionen der $\mathfrak{s}_{\mathfrak{b}}$ in das $\mathfrak{F}$ hineinkommen neben den η, welche allein in L enthalten sind.

Die Gleichungen (20.) und (20^a.) führen wieder auf das allgemeine Integral:

$$\lambda = F_q\,, \tag{20^b.}$$

und

$$s_{\mathfrak{b}} = \sigma \cdot \frac{\partial F}{\partial q_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial L}{\partial q_{\mathfrak{b}}}\,. \tag{20^c.}$$

Hierin bezeichnet F eine homogene Function ersten Grades der $q_{\mathfrak{b}}$ allein. Das System der Gleichungen (20^c.) wird im Allgemeinen, wenn nicht L und F gleiche Functionen mehrerer $q_{\mathfrak{b}}$ enthalten, die $q_{\mathfrak{b}}$ als Functionen der $p_{\mathfrak{a}}$ bestimmen lassen. Die Ausnahmen sind ganz ebenso zu behandeln wie in der früheren Methode, welche eine willkürliche Function der s benutzt.

Berlin, November, 1884.

CXX.

Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung.

(Aus Borchardt-Crelle, Journal für Mathematik, Bd. 100, S. 137 bis 166 und S. 213 bis 222. 1886.)

Wenn ich in diesem Aufsatze vom Princip der kleinsten 137
Wirkung spreche, so möchte ich darunter nicht allein die ursprüngliche 1744 von P. L M. de Maupertuis[1]) veröffentlichte Form desselben verstanden wissen, die übrigens erst viel später, wohl durch Lagrange, präcise Bestimmung der Variationsbedingungen und vollständigen Beweis empfangen hat; sondern ich will unter diesem Namen, als dem ältesten und bekanntesten, die verschiedenen transformirten Formen desselben Satzes mitbegreifen, welche später durch Sir W. Rowan Hamilton[2]) daraus entwickelt sind. Dieser hat die zwei Differentialgleichungen aufgestellt, welche später C. G. J. Jacobi in eine zusammenzuziehen lehrte, in denen die gemeinsame Quelle dieser Transformationen und noch vieler möglichen anderen liegt, während dadurch die physikalischen Voraussetzungen, von denen die Rechnung ausgeht, gar nicht verändert werden.

---

[1]) Histoire de l'Acad. des Sciences de Paris. 1744. Avril 15. — Histoire de l'Acad. Royale de Berlin. 1746. p. 267.

[2]) Philosoph. Transact. 1834. T. II, p. 247—308; 1835. T. I, p. 95—144.

Die genannten Forscher haben das Princip der kleinsten Wirkung zunächst nur auf die Mechanik wägbarer Körper angewendet und die Bewegungen eines Systems entweder ganz frei beweglicher oder durch feste Verbindungen an einander geketteter Massenpunkte dadurch dargestellt. Die physikalischen Voraussetzungen, von denen sie ausgingen, waren also wesentlich gegeben durch Newtons Bewegungsgesetze und die Art, wie man der Erfahrung entsprechend die Wirkung fester Verbindungen von Massenpunkten mechanisch zu definiren pflegte. Weiter zeigte sich aber, sobald man erst gelernt hatte Maupertuis' Integral richtig zu behandeln, dass die Gültig-
138 keit des Gesetzes von der Constanz der Energie vorausgesetzt werden müsse[1]). Dies musste anfangs als eine erhebliche Beschränkung für den Gültigkeitsbereich des Princips der kleinsten Wirkung erscheinen, bis die neueren physikalischen Untersuchungen feststellten, dass auch das Gesetz von der Constanz der Energie allgemeingültig ist, und jene scheinbare Einschränkung also in der That nichts einschränkt. Nur muss man für den untersuchten Vorgang vollständig alle Formen kennen, in denen Aequivalente von Energie auftreten, um sie mit in Rechnung zu ziehen. Andererseits konnte es fraglich erscheinen, ob mitspielende andere physikalische Vorgänge, welche nicht einfach auf Bewegungen wägbarer Massen und auf Newton's Bewegungsgesetze zurückzuführen sind, in denen sich aber doch Energiequanta bethätigen, auch unter das Princip der kleinsten Wirkung begriffen werden dürfen.

Als die für die hier beabsichtigten Untersuchungen bequemste Form des Princips der kleinsten Wirkung werde ich eine von Hamiltons Formen wählen, welche zulässt, dass auf das betreffende mechanische System, dessen innere Kräfte nur conservative sind, noch äussere von der Zeit abhängige Kräfte einwirken, deren Arbeit besonders berechnet wird. Wenn wir mit F die potentielle Energie des Systems, mit L die lebendige

[1] Maupertuis selbst hat dies nicht gesehen; er hält sein Princip für allgemeiner als das der Erhaltung der lebendigen Kräfte. Histoire de l'Acad. de Berlin. 1746. p. 285. — C. G. J. Jacobi erörtert diesen Punkt im Anfang der Vorlesung VI über Dynamik.

Kraft desselben bezeichnen, so ist die Function (Hamilton's Principalfunction), deren Zeitintegral bei der normalen Bewegung zwischen den Endlagen ein Grenzwerth wird:

$$H = F - L,$$

während die Energie des Systems

$$E = F + L$$

ist. Hierin ist F nur von den Coordinaten abhängig, während L eine homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten ist.

Jene Function H ist dieselbe, durch deren Differentialquotienten Lagrange die nach aussen gewendeten Kräfte des bewegten Systems ausgedrückt hat. Da diese Function in allen hierher gehörigen Problemen eine wichtige Rolle spielt, möchte ich für sie eben wegen dieser Beziehung zu den Kräften den Namen des *kinetischen Potentials* vorschlagen. Es ist schon eine ganze Reihe entsprechender Namen für verschiedene specielle Capitel der Physik vorgeschlagen worden. 139
So gehört hierher Hrn. F. E. Neumann's Potential zweier elektrischer Ströme, Hrn. R. Clausius[1]) *elektrodynamisches Potential*; Hr. J. W. Gibbs[2]) nennt in der Thermodynamik dieselbe Funktion, die ich freie Energie genannt hatte, *Kräftefunction für constante Temperatur*, Hr. P. Duhem[3]) dagegen dieselbe das *thermodynamische Potential*. Es sind also Vorgänge genug für die Wahl des neuen Namens vorhanden.

Das Princip der kleinsten Wirkung kann dann so ausgesprochen werden: *Der für gleiche Zeitelemente berechnete negative Mittelwerth des kinetischen Potentials ist auf dem wirklichen Wege des Systems ein Minimum (beziehlich für längere Strecken ein Grenzwerth) im Vergleich mit allen anderen benachbarten Wegen, die in gleicher Zeit aus der Anfangslage in die Endlage führen.* Für die Ruhe geht das kinetische Potential über in den Werth der potentiellen Energie (beziehlich des Potentials im bisherigen

---

1) Borchardt-Crelle, Journ. f. Math. Bd. 82, S. 85. Auch in Wiedemann's Annalen Bd. I, S. 36.

2) Transact. Connecticut Academy III, p. 108—248; 343—524. Sillimans Journal 1878. XVI. p. 441—458.

3) Le Potentiel Thermodynamique. Paris 1886.

Sinne). Für diese brauchen wir nicht den Mittelwerth zu nehmen, da die während der Bewegung verschiedenen Werthe hier einander alle gleich werden. Für die Ruhe sagt unser Gesetz dann also einfach aus, dass *die potentielle Energie für das Gleichgewicht ein Minimum sein müsse*[1]).

Jacobi hat gezeigt, dass die Function H auch explicite die Zeit enthalten könne, ohne die Bildung der Variation und die daraus folgende Differentialgleichung unmöglich zu machen. Ich habe dies benutzt, um zu H noch eine Summe $\sum_{a} [P_a \cdot p_a]$ hinzuzufügen, in welcher p_a die Coordinaten sind, und P_a die in Richtung der Coordinate p_a wirkende Kraft bedeutet, letztere in dem unten näher zu erörternden Sinne genommen. Die P_a werden als gegebene Functionen der Zeit, aber unabhängig von den Coordinaten betrachtet. In dieser Form liefert der Minimalsatz bei der Variation Lagrange's Gleichungen für die Kräfte P_a, und damit ist dann auch die ganze Reihe specieller Untersuchungen, die sich auf die Bewegungsgleichungen von Lagrange gründen, unter das etwas modificirte Princip der kleinsten Wirkung aufgenommen. Wo es nöthig
40 ist dieses modificirte Princip von dem ursprünglichen zu unterscheiden, will ich es den *Minimalsatz des negativen kinetischen Potentials* nennen. Die von Lagrange gegebene Form der Bewegungsgleichungen ist namentlich dadurch von Wichtigkeit, dass wir sie auch auf Fälle anwenden können, wo allerlei noch nicht rationell aufzulösende Vorgänge, Reibung, galvanischer Widerstand u. s. w. mitwirken, und wo zwischen diesen und den durch Lagrange's Formel zusammengefassten conservativen Kräften des bewegten Systems Gleichgewicht bestehen muss.

Von anderen Arbeitsäquivalenten kommen nun neben der potentiellen und actuellen Energie wägbarer Massen, namentlich noch die thermischen, elektrodynamischen und elektromagnetischen in Betracht. Die Wärmebewegung ist bisher

---

[1]) Zu bemerken ist, dass schon Euler auf diesem Wege das Princip der kleinsten Wirkung zu begründen suchte, aber er nahm den Mittelwerth von F, nicht von $(F-L)$. Histoire de l'Acad. Royale de Berlin. 1751. p. 175.

allerdings nur als ein besonders verwickelter Fall der Bewegung ausschliesslich wägbarer Atome betrachtet worden. Da aber von warmen Körpern gleichzeitig Aetherwellen ausstrahlen, so wird diese Beschränkung, die unter einfacheren Voraussetzungen in der That Carnot's Gesetz abzuleiten gestattet, wie die Hrn. Clausius[1]) und Boltzmann[2]) gezeigt haben, doch nur als eine zunächst ausreichende Hypothese zu betrachten sein; die Mitwirkung anderer Kräfte, z. B. elektrodynamischer, kann nicht mit Sicherheit ausgeschlossen werden.

Dass dagegen thatsächlich die bekannten Gesetze der reversiblen Wärmevorgänge in der Form von Lagranges Bewegungsgleichungen, also auch des Minimalsatzes des kinetischen Potentials ausgedrückt werden können, habe ich in meinen Aufsätzen über *die Statik der monocyklischen Bewegungen*[3]) nachgewiesen. Dabei zeigt sich aber, dass die Temperatur, welche die Intensität der thermischen Bewegung misst, in viel verwickelterer Form in die zu integrirende Function eintritt, als es die Geschwindigkeiten thun, wenn man den Werth der lebendigen Kraft ponderabler Systeme bildet. Ich habe in den citirten Aufsätzen gezeigt, dass dergleichen Formen unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen auch für Systeme wägbarer Massen durch Elimination gewisser Coordinaten entstehen können, und dass also in dem Auftreten solcher verwickelterer Formen kein Widerspruch gegen die Anwendung von Lagrange's Bewegungsgleichungen liegt. Wohl aber wird es nothwendig, wenn man die allgemeinen Eigenschaften der Systeme, die durch das Princip der kleinsten Wirkung regiert werden, kennen lernen will, die ältere engere Annahme 141
fallen zu lassen, wonach die Geschwindigkeiten nur in dem Werthe der lebendigen Kraft und zwar in Form einer homogenen Function zweiten Grades vorkommen, und zu untersuchen, wie sich die Sache verhält, wenn H eine Function der Coordinaten und Geschwindigkeiten von beliebiger Form ist.

---

[1]) Poggendorff Annalen. 1871. Bd. 142. S. 433—461.

[2]) Wiener Sitzungsberichte 1866. Bd. LIII. Abth. II, S. 195 bis 220.

[3]) Borchardt-Crelle, Journ. f. Math. Bd. 97. S. 112 bis 123. Abgedruckt auf S. 120—133 des vorliegenden Bandes.

Dafür, dass auch die *chemischen Kräfte,* wo wir sie zwingen können, nur auf reversible Weise zu arbeiten, dem Carnot'schen Gesetze folgen, haben zwar erst in einer kleinen Zahl von Fällen experimentelle Bestätigungen gewonnen werden können, diese aber fallen um so mehr auf, als sie messbare Beziehungen zwischen Processen von anscheinend ganz verschiedener Natur herausstellen[1]).

Endlich haben die Beobachtungen über die elektromagnetischen und elektrodynamischen Fernwirkungen geschlossener elektrischer Ströme zu Ausdrücken für die ponderomotorischen und elektromotorischen Kräfte geführt, die sich durchaus den von Lagrange für die Mechanik wägbarer Körper gegebenen anschliessen. Der erste, welcher eine solche Formulirung der elektrodynamischen Gesetze gegeben hat, war Hr. F. E. Neumann[2]) senior. Bei ihm treten als Geschwindigkeiten die elektrischen Strömungen auf, d. h. die Menge der Elektricität, die in der Zeiteinheit durch ein von materiellen Theilchen des Leiters umgrenztes Flächenelement hindurchgeht. Später haben dann die Hrn. W. Weber und Clausius andere Formen gegeben, in denen relative oder absolute Geschwindigkeiten elektrischer Quanta im Raume statt der Stromgeschwindigkeiten eintreten. Für geschlossene Ströme stimmen die Folgerungen aus diesen verschiedenen Formulirungen durchaus überein. Für ungeschlossene differiren sie. Soweit in diesem letzteren Gebiete Thatsachen gewonnen sind, zeigt sich, dass das Neumann'sche Gesetz unzureichend ist, wenn man bei seiner Anwendung nur die in den Leitern vorgehenden Elektricitätsbewegungen in Rechnung zieht. Man muss vielmehr auch die von Faraday und Maxwell in Betracht ge-

---

[1]) S. meine drei Aufsätze über die Thermodynamik chemischer Vorgänge. Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1882, 2. Febr., 27. Juli. 1883, 31. Mai. Abgedruckt in der vorliegenden Sammlung, Bd. II, S. 958—992 und Bd. III, S. 92—114. — Eine gute Zusammenstellung des bisher gebrachten Materials in dem oben citirten Buche von P. Duhem.

[2]) S. meine Arbeiten über die Theorie der Elektrodynamik. Borchardt-Crelle, Journ. f. Math. Bd. 72, S. 57; Bd. 75, S. 35; Bd. 78, S. 273. Abgedruckt auf S. 545—628, 647—687 und 702—762 des ersten Bandes dieser Sammlung.

nommenen Bewegungen der Elektricität in Isolatoren, wie sie bei entstehender oder vergehender dielektrischer Polarisation derselben eintreten, berücksichtigen. Unter das so erweiterte 142
Neumann'sche Gesetz fügen sich auch die bisher sicher beobachteten Wirkungen ungeschlossener Ströme.

Aber auch hier besteht eine Abweichung in der Form der Functionen, verglichen mit denen für wägbare Massen. Für die elektrodynamischen Erscheinungen treten die Geschwindigkeiten der Elektricität in einer Function zweiten Grades auf, deren Coëfficienten aber, selbst bezogen auf rechtwinkelige Coordinaten, nicht Constanten werden, wie es die Massen in dem Werthe der lebendigen Kraft ponderabler Systeme sind. Zweitens treten lineare Functionen der Geschwindigkeiten ein, sobald permanente Magnete in Wirkung treten.

Es waren gerade Untersuchungen über die Form des kinetischen Potentials, welches Maxwell's Theorie der Elektrodynamik fordert, die mich auf die vorliegenden vorbereitenden Untersuchungen geführt haben.

Auch die Lehre vom Licht hat sich in allen Hauptsachen unter die Hypothese subsumiren lassen, dass der Aether ein Medium von ähnlichen Eigenschaften sei, wie die festelastischen wägbaren Körper. Die bekannten Schwierigkeiten in der Theorie der Reflexion und Refraction werden noch leichter besiegt durch Maxwell's elektromagnetische Hypothese. Aber man mag der einen oder der andern Meinung folgen, so würde man das Princip der kleinsten Wirkung für die Lichtbewegung als gültig betrachten müssen, wenigstens soweit ihre Erscheinungen durch jene Theorien erklärt werden.

Daraus ergiebt sich schon jetzt, dass der Gültigkeitsbereich des Princips der kleinsten Wirkung weit über die Grenze der Mechanik wägbarer Körper hinausgewachsen ist, und dass Maupertuis' hoch gespannte Hoffnungen von seiner absoluten Allgemeingültigkeit sich ihrer Erfüllung zu nähern scheinen, so dürftig auch die mechanischen Beweise und so widerspruchsvoll die metaphysischen Speculationen waren, welche der Autor selbst für sein neues Princip damals anzuführen wusste.

Es ist schon jetzt als höchst wahrscheinlich zu betrachten,

dass es das allgemeine Gesetz aller reversiblen Naturprocesse sei, und was die irreversiblen betrifft, wie z. B. Erzeugung und Leitung von Wärme, so scheint deren Irreversibilität nicht im Wesen der Sache, sondern nur auf der Beschränktheit unserer Hülfsmittel zu beruhen, die es uns nicht möglich machen ungeordnete Atombewegungen wieder zu ordnen, oder die Bewegung aller in Wärmebewegung begriffenen Atome genau rückwärts gehen zu machen.

Jedenfalls scheint mir die Allgemeingültigkeit des Princips
143 der kleinsten Wirkung so weit gesichert, dass es als heuristisches Princip und als Leitfaden für das Bestreben, die Gesetze neuer Klassen von Erscheinungen zu formuliren, einen hohen Werth in Anspruch nehmen darf.

Es hat ausserdem den Vorzug die sämmtlichen Bedingungen, welche für die untersuchte Klasse von Erscheinungen von Einfluss sind, in den engsten Rahmen einer einzigen Formel zusammenzufassen, und dadurch einen vollständigen Ueberblick über alles Wesentliche zu geben.

Bei dieser Lage der Sache hielt ich es für nützlich für das verallgemeinerte Princip eine Uebersicht des Beweises und der allgemeinen Folgerungen zusammenzustellen, die, wo sie nur bekannte Methoden auf etwas erweiterte Annahmen anzuwenden hatte, ganz kurz gehalten sein konnte. Ich habe mich dabei bestrebt, namentlich diejenigen Folgerungen hervorzuheben, welche beobachtbare Verhältnisse betreffen, und die, zusammengefasst, wiederum im Stande sind, als Kennzeichen für die Gültigkeit des Princips in dem betreffenden Gebiete zu dienen.

In § 1 ist mit möglichster Freiheit für die Natur der Function H der Minimalsatz des kinetischen Potentials entwickelt, und Lagrange's Bewegungsgleichungen daraus hergeleitet. Die Eliminationen sind besprochen, durch welche auch für Systeme wägbarer Körper solche allgemeinere Formen eintreten können.

In § 2 wird die Constanz der Energie aus unserer Form des Princips abgeleitet und der Werth der Energie aus dem Werthe des kinetischen Potentials zu berechnen gelehrt. Er ist:

$$E = H - \sum_{\mathfrak{a}} \left[q_{\mathfrak{a}} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{a}}} \right],$$

wo $q_{\mathfrak{a}}$ die Geschwindigkeiten sind. Dabei zeigt sich, dass nicht umgekehrt in jedem Falle, wo die Constanz der Energie gewahrt ist, auch das Princip der kleinsten Wirkung gelte. Das letztere sagt also mehr aus, als das erstere, und zu finden, was es mehr aussagt, ist unsere Aufgabe. Gleichzeitig werden einige mechanische und physikalische Vorgänge specificirt, um sie als erläuternde Beispiele sowohl für den Inhalt der beiden ersten Paragraphen als auch der folgenden herbeiziehen zu können, und daran die Tragweite des Princips anschaulich zu machen.

§ 3 behandelt dann die entgegengesetzte Aufgabe, nämlich H aus E abzuleiten. Das muss durch Integration der oben stehenden Differentialgleichung geschehen und bringt also willkürliche Integrationsconstanten hinein, welche homogene Functionen ersten Grades der $q_{\mathfrak{a}}$ sein müssen. Dieser Schritt 144
ist insofern von Bedeutung, als es nun möglich sein wird, aus der vollständigen Kenntniss der Abhängigkeit der Energie von den Coordinaten und Geschwindigkeiten das kinetische Potential und somit die ganzen Bewegungsgesetze des Systems zu finden, vorausgesetzt, dass das Princip der kleinsten Wirkung gültig ist. Die nach $q_{\mathfrak{a}}$ linearen Glieder, welche „verborgenen Bewegungen“ entsprechen, werden sich wohl meist ohne Schwierigkeit finden lassen.

§ 4 behandelt die Wechselbeziehungen zwischen den Kräften, die das System gleichzeitig nach verschiedenen Richtungen hin ausübt, und seinen Beschleunigungen und Geschwindigkeiten. Diese umfassen eine Reihe der interessantesten Verknüpfungen physikalischer Erscheinungen, wie z. B. die zwischen Ampère's elektromagnetischen und elektrodynamischen Gesetzen einerseits und dem Inductionsgesetz andererseits; eine Reihe thermodynamischer Gesetze, z. B. das Verhältniss zwischen der Steigerung des Drucks einer eingeschlossenen Masse durch Temperaturerhöhung zu der Temperaturerhöhung durch Compression; das entsprechende Verhalten bei thermoelektrischen und elektrochemischen Processen. Auch lässt sich schliesslich wiederum nachweisen, dass das Princip

der kleinsten Wirkung jedesmal gültig ist, wenn die in § 4 aufgezählten Wechselbeziehungen der Kräfte bestehen. Dieser Beweis ist aber auf eine spätere Mittheilung verschoben.

In § 5 werden Hamilton's Theoreme für die allgemeine Form kurz recapitulirt, und in § 6 werden die daraus herfliessenden Reciprocitätsgesetze für die durch kleine Anstösse nach Ablauf einer bestimmten Zeit erfolgenden Aenderungen der rechtläufigen und rückläufigen Bewegung gegeben. Es fallen darunter reciproke Verhältnisse, die ich selbst für Schall und Licht in früheren Arbeiten, aber nur für ruhende Systeme, nachgewiesen hatte.

In § 7 endlich werden die Bewegungsmomente statt der Geschwindigkeiten eingeführt, was eine andere Form des Variationsproblems und neben den schon bekannten geänderten Darstellungen der Werthe der Kräfte auch ein anderes Reciprocitätsgesetz der hin- und rückläufigen Bewegung ergiebt.

§ 1.

Formulirung des Princips.

Ich nehme an, das der augenblickliche Zustand des betrachteten Körpersystems durch eine genügende Anzahl von
145 einander unabhängiger Coordinaten p_a vollständig gegeben sei; die Geschwindigkeiten ihrer Aenderung bezeichne ich mit:

$$q_a = \frac{dp_a}{dt}. \tag{1.}$$

Ich bezeichne ferner mit P_a die Kraft, mit welcher das bewegte Körpersystem auf Aenderung der Coordinate p_a hinwirkt, so dass $(-P_a)$ die äussere Kraft ist, welche auf das System einwirken muss in Richtung der Coordinate p_a, damit die vorausgesetzte Bewegung des Systems in der angenommenen Weise vor sich gehen kann.

Diese von Lagrange eingeführten Kräfte P_a sind im Allgemeinen Aggregate von Kraftcomponenten, die selbst auf verschiedene Theile des Systems einwirken können, und dadurch ihrer Grösse und Zusammensetzung nach definirt sind, dass $(P_a \cdot dp_a)$ die Arbeit ist, welche die Kraft P_a nach aussen hin

leistet, wenn die Aenderung der Coordinate p_a in $(p_a + dp_a)$ eintritt, während P_a keine Arbeit leistet, wenn p_a unverändert bleibt, während beliebige Veränderungen der übrigen Coordinaten p_b eintreten.

Wir setzen im Folgenden voraus, dass die Grössen P_a als Functionen der Zeit, aber unabhängig von den Coordinaten, während der Periode $t = t_0$ bis $t = t_1$ gegeben seien. H sei eine Function der Coordinaten und Geschwindigkeiten, von der wir zunächst nur verlangen, dass sie in allen Lagen des während der genannten Zeitperiode durchlaufenen Weges endliche erste und zweite Differentialquotienten nach den p_a und q_a habe. Wir bilden nunmehr das Integral:

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \{H + \sum_a [P_a \cdot p_a]\}, \tag{1^a.}$$

in welchem die p_a so variirt werden sollen, dass ihre Variationen δp_a für $t = t_0$ und $t = t_1$ gleich Null, in den Zwischenzeiten aber beliebige differentiirbare Functionen der Zeit seien. Dann folgt nach bekannten Methoden der Variationsrechnung, dass

$$\delta \Phi = 0 \tag{1^b.}$$

wird, wenn während der Dauer der Bewegung:

$$0 = P_a + \frac{\partial H}{\partial p_a} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial q_a}\right]. \tag{1^c.}$$

Dies sind bekanntlich die Bewegungsgleichungen des Systems in der von Lagrange gegebenen Form.

Elimination von Coordinaten. In den ursprünglichen Anwendungen des Princips auf die Bewegungen eines freien Systems materieller Punkte war, wie ich schon in der Einleitung bemerkte, H von der Form: 146

$$H = F - L,$$

worin F nur Function der p_a, L eine homogene Function zweiten Grades der q_a sein soll, deren Coëfficienten von den p_a abhängen. Für ein freies System ist die Anzahl der Coordinaten p_a dreimal so gross, als die der vorhandenen Massenpunkte.

Nun kann aber in vielen Fällen eine Verminderung in der Anzahl der Coordinaten eintreten, ohne dass die in den

Gleichungen (1^a.), (1^b.) und (1^c.) gegebenen Formen der Darstellung dadurch geändert würden.

Am meisten behandelt ist unter diesen Fällen bisher derjenige wo die Bewegungsfreiheit des Systems durch sogenannte *feste Verbindungen*, die sich mathematisch als Gleichungen zwischen den Coordinaten ausdrücken lassen, eingeschränkt ist. Die oben angegebene Zusammensetzung der Function H aus F und L und die Beschaffenheit der beiden letzteren Functionen wird dadurch nicht geändert, die Zahl der veränderlichen Coordinaten kann aber erheblich vermindert werden.

Eine andere bemerkenswerthe Verminderung in der Anzahl der Coordinaten tritt ein, wenn einzelne derselben, die wir mit dem Index $\mathfrak{b}$ bezeichnen wollen, nur mit ihrem Differentialquotienten $q_\mathfrak{b}$ in den Werth von H eintreten, und die entsprechenden Kräfte $P_\mathfrak{b}$ dauernd gleich Null sind. Unter diesen Umständen werden die den Werth der $P_\mathfrak{b}$ ausdrückenden Gleichungen (1^c.) reducirt auf:

$$0 = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{b}}\right], \tag{2.}$$

oder:

$$\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{b}} = c_\mathfrak{b}. \tag{2^a.}$$

Diese Gleichungen, welche nach den q_a (beziehlich $q_\mathfrak{b}$) linear sind, kann man benutzen um die $q_\mathfrak{b}$ durch die übrigen Geschwindigkeiten und durch die $p_\mathfrak{a}$ auszudrücken, und sie dann aus dem Werthe von H zu eliminiren. Den durch diese Elimination entstandenen Ausdruck des Werthes von H bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}$. Dann ist

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_\mathfrak{a}} = \frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{a}} + \sum_\mathfrak{b}\left[\frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{b}} \cdot \frac{\partial q_\mathfrak{b}}{\partial p_\mathfrak{a}}\right].$$

Also mit Berücksichtigung von (2^a.):

147 $$\frac{\partial H}{\partial p_\mathfrak{a}} = \frac{\partial}{\partial p_\mathfrak{a}}\left\{\mathfrak{H} - \sum_\mathfrak{b}[c_\mathfrak{b} \cdot q_\mathfrak{b}]\right\}.$$

Setzen wir:

$$\mathfrak{H} - \sum_\mathfrak{b}[c_\mathfrak{b} \cdot q_\mathfrak{b}] = H', \tag{2^b.}$$

so finden wir:

$$\frac{\partial H}{\partial p_a} = \frac{\partial H'}{\partial p_a},$$

und ebenso:

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} = \frac{\partial H'}{\partial q_a},$$

$$P_a = -\frac{\partial H'}{\partial p_a} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H'}{\partial q_a}\right]. \qquad (2^c.)$$

Es tritt also in diesem Falle die Function H', welche von den q_b und p_b frei ist, aber nunmehr Glieder enthält, die nach den q_a linear sind und aus den Werthen der q_b herrühren, für die Bildung der Bewegungsgleichungen (2^c.) ganz an die Stelle der ursprünglichen Function H.

Beispiele hierfür wären Drehungen eines Kreisels um seine Symmetrieaxe, wenn deren Richtung, aber nicht seine Drehungsgeschwindigkeit um diese Axe geändert werden kann. Ferner Bewegung eines Systems bezogen auf ein in Drehung begriffenes rechtwinkeliges Coordinatensystem, z. B. das des Erdkörpers.

Dieser in der Mechanik der wägbaren Körper gegebenen Analogie gemäss, wollen wir einstweilen auch andere Fälle physikalischer Vorgänge in denen die Function H Glieder, die nach den Geschwindigkeiten linear sind, enthält, bezeichnen als *Fälle mit verborgener Bewegung,* wenn auch zur Zeit noch Fälle dazu gehören, wo die Existenz einer solchen verborgenen Bewegung nicht zweifellos nachzuweisen ist, wie bei der Wechselwirkung zwischen Magneten und elektrischen Strömen. Für die Magnete ist sie bekanntlich von Ampère schon angenommen; sie zeigt ihren Einfluss auch bei der elektromagnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichts, wie Sir W. Thomson bemerkt, obgleich dabei keine wahrnehmbaren elektrischen Ströme mitwirken.

Diese Fälle unterscheiden sich von denen, wo H die Geschwindigkeiten nur in Gliedern zweiten Grades enthält, wesentlich dadurch, dass die Bewegung nicht unter gleichen Bedingungen rückläufig vor sich gehen kann, wenn nicht die verborgenen Bewegungen gleichzeitig umgekehrt werden.

Noch verwickeltere Formen der Function H können andere 148

Eliminationen, wenigstens für beschränkte Klassen von Bewegungen, hervorbringen; ich habe solche Fälle in meiner ersten Abhandlung über die monocyklischen Bewegungen[1]) besprochen. Wir können die Bedingungen jener Elimination hier noch etwas allgemeiner fassen. Man nehme an, dass eine Gruppe von Coordinaten $p_{\mathfrak{c}}$ vorkommt, deren entsprechende $q_{\mathfrak{c}}$ im Werthe der lebendigen Kraft nur mit einander multiplicirt, aber nicht mit den ausserhalb dieser Gruppe stehenden $q_{\mathfrak{b}}$ in Producte vereinigt vorkommen, so dass alle

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{c}} \cdot \partial q_{\mathfrak{b}}} = 0;$$

und dass ferner die Kräfte $P_{\mathfrak{c}}$ immer gleich Null bleiben. Unter diesen Umständen sind Bewegungen des Systems möglich, bei denen die $p_{\mathfrak{c}}$ dauernd constant, also die $q_{\mathfrak{c}} = 0$ bleiben. Die Bewegungsgleichungen für diese Klasse von Bewegungen vereinfachen sich dadurch, dass, wenn alle $q_{\mathfrak{c}} = 0$, auch alle

$$\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{c}}} = 0$$

werden. Wir erhalten somit aus (1^{c}.):

$$0 = \frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{c}}}, \tag{3.}$$

$$P_{\mathfrak{b}} = -\frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{b}}} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}}\right]. \tag{3^a.}$$

Wenn nun die Gleichungen (3.), deren Anzahl gleich der der $p_{\mathfrak{c}}$ ist, ausreichen diese Grössen als Functionen der $p_{\mathfrak{b}}$ und $q_{\mathfrak{b}}$ auszudrücken, so kann man mittels der gewonnenen Werthe die $p_{\mathfrak{c}}$ aus H eliminiren, wobei im Allgemeinen H eine verwickeltere Function der $q_{\mathfrak{b}}$ werden wird, welche wir mit $\mathfrak{H}$ bezeichnen wollen. Dann ist nach den Principien der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{b}}} + \sum_{\mathfrak{c}}\left[\frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{c}}} \cdot \frac{\partial p_{\mathfrak{c}}}{\partial p_{\mathfrak{b}}}\right],$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}} + \sum_{\mathfrak{c}}\left[\frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial p_{\mathfrak{c}}}{\partial q_{\mathfrak{b}}}\right];$$

---

[1]) Borchardt-Crelle, Journ. f. Math., Bd. 97, S. 120 bis 122. Abgedruckt auf S. 129—132 des vorliegenden Bandes.

also wegen der Gleichungen (3.) wiederum:

$$\frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_{\mathfrak{b}}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_{\mathfrak{b}}}. \qquad (3^{b}.)$$

Die Bewegungsgleichungen (3^{a}.) reduciren sich also auf:

$$P_{\mathfrak{b}} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_{\mathfrak{b}}} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial q_{\mathfrak{b}}}\right], \qquad (3^{c}.)$$ 149

in denen nur noch die $p_{\mathfrak{b}}$ und $q_{\mathfrak{b}}$ vorkommen, und das $\mathfrak{H}$ im Allgemeinen nicht mehr gleich der Summe einer Function der Coordinaten und einer homogenen Function zweiten Grades nach den Geschwindigkeiten ist.

Wenn aber das ursprüngliche H eine solche war, und also keine verborgenen Bewegungen Einfluss hatten, so sind die Gleichungen (3.) nach den $q_{\mathfrak{b}}$ vom zweiten Grade; die Werthe der $p_{\mathfrak{c}}$ können also unverändert bleiben (auch wenn sie mehrdeutig sein sollten), wenn sämmtliche $q_{\mathfrak{b}}$ ihr Vorzeichen gleichzeitig ändern, woraus folgt, dass auch in diesem Falle die Gesammtbewegung rückläufig vor sich gehen kann.

In der Mechanik der wägbaren Massen würden wir solche Probleme, in denen die Function H die Geschwindigkeiten $q_{\mathfrak{a}}$ in Gliedern vom ersten, oder von höherem als zweitem Grade enthält, als *unvollständige Probleme* bezeichnen können, insofern ein Theil der möglichen Bewegungen ausgeschlossen ist, und ein Theil der zur Lagenbestimmung des Systems nöthigen Coordinaten in der Function H nicht vorkommt, und gewisse Kräfte dauernd gleich Null gesetzt, also nicht mehr beliebig bestimmbar sind.

Functionaldeterminante der Bewegungsmomente. Die in den vorigen Ableitungen vorkommenden Grössen $\partial H / \partial q_{\mathfrak{a}}$ wollen wir der Kürze wegen bezeichnen:

$$s_{\mathfrak{a}} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{a}}} \qquad (3^{d}.)$$

und die $s_{\mathfrak{a}}$ die *Bewegungsmomente* nennen. Bei der Bewegung eines freien Systems, welches auf rechtwinkelige Coordinaten bezogen ist, entsprechen sie dem Product aus Masse und Geschwindigkeit, dessen Differentialquotient nach der Zeit Newton's Maass der entsprechenden Kraftcomponente ist:

$$X = \frac{d}{dt}\left[m \cdot \frac{dx}{dt}\right].$$

In den zusammengesetzteren Fällen ist der Einfluss, den die Trägheit der mitbewegten Massen bei einer bestimmten Art von Bewegung ausübt, nach der Lage der Massen verschieden. So ist z. B. bei einer Rotationsbewegung eines festen Körpers das Bewegungsmoment gleich dem Trägheitsmoment, multiplicirt mit der Winkelgeschwindigkeit. In diesem Sinne nun messen die Grössen $s_\mathfrak{a}$ den Einfluss, den die Trägheit der mitbewegten
150 Massen hat, und ihre Beschleunigung nimmt einen entsprechenden Theil der Bewegungskraft in Anspruch, wie die Gleichungen (1^c.) zeigen.

In der Mechanik wägbarer Körper sind die $s_\mathfrak{a}$ in den ursprünglichen vollständigen Problemen lineare homogene Functionen der $q_\mathfrak{a}$, deren Coëfficienten im Allgemeinen Functionen der $p_\mathfrak{a}$ sind, und man hat also ein System linearer Gleichungen:

$$s_\mathfrak{a} = \Sigma\left[\frac{\partial s_\mathfrak{a}}{\partial q_\mathfrak{b}} \cdot q_\mathfrak{b}\right], \qquad (3^e.)$$

welche nach den $q_\mathfrak{b}$ aufgelöst, diese als lineare homogene Functionen der $s_\mathfrak{a}$ darstellen. Diese Darstellung würde nicht möglich sein, wenn die Determinante der Grössen $\partial s_\mathfrak{a} / \partial q_\mathfrak{b}$, beziehlich der $\partial^2 H / (\partial q_\mathfrak{a} \cdot \partial q_\mathfrak{b})$ identisch gleich Null wäre. Letzterer Fall kann nun aber nicht eintreten, ohne dass die lebendige Kraft für gewisse Bewegungen bei endlichen Geschwindigkeiten Null würde. Es ist nämlich, da L eine wesentlich positive, homogene Function zweiten Grades von den $q_\mathfrak{a}$ ist:

$$2L = \Sigma_\mathfrak{a} [q_\mathfrak{a} \cdot s_\mathfrak{a}].$$

Wenn die genannte Determinante Null wäre, würden sämmtliche $s_\mathfrak{a}$ und demgemäss auch L Null sein können, ohne dass die $q_\mathfrak{a}$ Null zu sein brauchten.

Die Bedingung, dass die Determinante der Gleichungen (3^e.) nicht identisch gleich Null sei, kann auch so ausgesprochen werden: *Zwischen den Grössen $s_\mathfrak{a}$ und $p_\mathfrak{a}$ soll mit Ausschluss der $q_\mathfrak{a}$ keine identische Gleichung bestehen,* und deshalb können die $q_\mathfrak{a}$ immer als Functionen der $s_\mathfrak{a}$ und $p_\mathfrak{a}$ dargestellt werden.

Dieses Verhältniss wird dadurch nicht geändert, dass wie im Falle der verborgenen Bewegungen einzelne $s_\mathfrak{a}$ constant oder auch, wie im Falle der eliminirten $p_\mathfrak{c}$, gleich Null gesetzt werden. Der Werth der verbleibenden $s_\mathfrak{a}$ wird durch jene

Veränderungen nicht geändert. Da auch für die elektrischen Bewegungen und die reversiblen Wärmebewegungen dasselbe gilt, soweit deren physikalische Gesetze bisher ermittelt werden konnten: so liegt bisher keine physikalische Veranlassung vor die Ausnahmsfälle zu berücksichtigen, wo die Determinante der Gleichungen (3^e.) etwa gleich Null werden sollte; und es wird deshalb im Folgenden die Voraussetzung gemacht werden, dass jene Determinante nicht identisch gleich Null werden könne, sondern höchstens für besondere Werthe der p_a.

Wenn diese Bedingung festgehalten wird, lässt sich das Variationsproblem in solcher Weise aussprechen, dass auch die 151
im Anfang dieses Paragraphen abgesondert hingestellten Gleichungen:

$$q_a = \frac{dp_a}{dt} \tag{1.}$$

mit in dasselbe aufgenommen werden.

Es sei, wie oben, H eine Function der p_a und q_a, die P_a Functionen der Zeit allein. Man setze:

$$\Phi_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ H - \sum_a \left[\left(q_a - \frac{dp_a}{dt} \right) \cdot \frac{\partial H}{\partial q_a} + P_a \cdot p_a \right] \right\}, \tag{1^d.}$$

und verlange, dass

$$\delta \Phi_1 = 0 \tag{1^e.}$$

werde für beliebige Variationen der p_a und q_a, welche beide als unabhängige Variable zu behandeln sind. Für die Zeiten t_0 und t_1 sollen die $\delta p_a = 0$ sein, die δq_a bleiben auch dann willkürlich.

Die Variation nach q_b ergiebt:

$$0 = \sum_a \left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_a . \partial q_b} \cdot \left(\frac{dp_a}{dt} - q_a \right) \right], \tag{1^f.}$$

woraus die Gleichungen (1.) sich ergeben, da die Determinante der $\partial^2 H / (\partial q_a . \partial q_b)$ nicht identisch gleich Null sein soll.

Die Variation nach den p_a ist, wie oben, auszuführen und ergiebt dasselbe Resultat.

Wenn man die in (1^d.) vorkommende Function der p_a und q_a bezeichnet:

$$E = H - \sum_a \left[q_a \cdot \frac{\partial H}{\partial q_a} \right],$$

(es ist dies die Energie, wie der nächste Paragraph zeigen wird), so wird:

$$\Phi_1 = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ E - \sum_a \left[s_a \cdot \frac{dp_a}{dt} + P_a \cdot p_a \right] \right\}. \qquad (1^g.)$$

Ich führe diese Form hier an, da wir auf eine analoge Form am Schlusse stossen werden, und beide, wenn man ihnen in physikalischen Untersuchungen begegnet, ehe man sicher weiss, welche Grössen als p_a, q_a und s_a anzusprechen sind, sehr fremdartig aussehen können.

Andererseits sind es gerade diese Formen, welche die vollständigste Fassung des Problems in sich vereinigen.

152 § 2.

Verhältniss zum Princip von der Constanz der Energie.

Wenn man die Bewegungsgleichungen $(1^c.)$ der Reihe nach mit q_a multiplicirt und addirt, erhält man:

$$\begin{aligned} \Sigma[P_a \cdot q_a] &= -\Sigma \left[\frac{\partial H}{\partial p_a} \cdot q_a \right] + \frac{d}{dt} \sum_a \left[q_a \cdot \frac{\partial H}{\partial q_a} \right] \\ &\qquad - \sum_a \left[\frac{\partial H}{\partial q_a} \cdot \frac{dq_a}{dt} \right] \\ &= -\frac{d}{dt} \left\{ H - \Sigma \left[q_a \cdot \frac{\partial H}{\partial q_a} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir, wie vorher:

$$E = H - \Sigma \left[q_a \cdot \frac{\partial H}{\partial q_a} \right], \qquad (1^h.)$$

so können wir schreiben:

$$\Sigma[P_a \cdot q_a] . dt + \frac{dE}{dt} \cdot dt = 0. \qquad (1^i.)$$

Hierin ist die voranstehende Summe die Arbeit, welche die Kräfte P_a im Zeittheilchen dt nach aussen hin abgeben, und es ergiebt sich also, dass die Grösse E fortdauernd in dem Maasse abnimmt oder wächst, als jene Kräfte positive oder

negative Arbeit leisten. Daraus folgt, dass E den Energievorrath des Systems bezeichnet, ausgedrückt durch seine Coordinaten $p_{\mathfrak{a}}$ und Geschwindigkeiten $q_{\mathfrak{a}}$.

Daraus geht hervor, dass das Princip der kleinsten Wirkung, genommen in der Form des § 1, das Princip von der Constanz der Energie immer einschliesst.

Andererseits ist das Princip der kleinsten Wirkung nicht nothwendig gültig in allen denkbaren Fällen, welche dem Gesetze von der Constanz der Energie unterworfen sind. Man kann zu dem Systeme der Gleichungen $(1^c.)$ mannigfaltige Zusätze machen, welche die Ableitung der Gleichung $(1^i.)$ durchaus nicht stören, wohl aber die Zusammenfassung in die Variationsform aufheben. Man addire z. B. zu derjenigen der Gleichungen $(1^c.)$, welche in ihren Gliedern den Index $\mathfrak{a}$ hat, ein Glied $(\varphi \cdot q_{\mathfrak{b}})$ und zu der mit dem Index $\mathfrak{b}$ das Glied $(-\varphi \cdot q_{\mathfrak{a}})$, worin φ irgend eine Function der Coordinaten sei. Wenn wir dann zur Ableitung der Gleichung der Energie die erstgenannte Gleichung mit $q_{\mathfrak{a}}$, die zweite mit $q_{\mathfrak{b}}$ multipliciren, heben sich die Zusatzglieder weg, und die Constanz der Energie wird nicht gestört. Dagegen lässt sich die entsprechende Variation:

$$\varphi\,[q_{\mathfrak{b}} \cdot \delta p_{\mathfrak{a}} - q_{\mathfrak{a}} \cdot \delta p_{\mathfrak{b}}]$$

nur wenn φ allein von den Variabeln $(q_{\mathfrak{a}} \cdot p_{\mathfrak{b}})$ und $(q_{\mathfrak{b}} \cdot p_{\mathfrak{a}})$ 153
abhängt, als vollständige Variation einer Function der $p_{\mathfrak{a}}$ und $q_{\mathfrak{a}}$ unter dem Zeitintegral betrachten.

Wenn die in den Zusatzgliedern angenommene Function φ unabhängig von den Geschwindigkeiten ist, würde die entsprechende Bewegung nicht umkehrbar sein. Wir könnten das φ aber zu einer linearen Function der Geschwindigkeiten machen; dann könnte die ganze Bewegung auch rückläufig vor sich gehen.

Da man in jedes beliebig gewählte Paar von Gleichungen aus dem Systeme $(1^c.)$ solche Glieder einstellen kann, so ist eine grosse Mannigfaltigkeit solcher Fälle denkbar, in denen das Gesetz von der Constanz der Energie gültig ist, aber nicht das der kleinsten Wirkung.

Daraus ergiebt sich also, dass das letztere Princip, wo es gilt, noch einen besonderen Charakter der vorhandenen conser-

vativen Naturkräfte ausspricht, der nicht schon durch ihre Bestimmung als conservative Kräfte gegeben ist. Diesen deutlicher an das Licht zu stellen ist der Zweck der nachfolgenden Untersuchung.

Erläuternde Beispiele.

Da es im Folgenden wiederholt wünschenswerth sein wird Beispiele anzuführen, an denen die Tragweite der gewonnenen Sätze anschaulich wird: so erlaube ich mir gleich hier einige geeignete Fälle so weit nöthig zu charakterisiren, auf die ich mich nicht nur für den Inhalt dieses und des vorigen Paragraphen, sondern auch später kurz beziehen kann:

I. *Beispiel des Kreisels.* Der Kreisel sei ein Rotationskörper in Cardanischer Befestigung; der äussere Ring a mag um ein verticale Axe drehbar sein, den Drehungswinkel von einer bestimmten Verticalebene im Raume an gerechnet nennen wir α; der zweite Ring b drehe sich im ersten in horizontaler Axe, den Winkel zwischen den Ebenen der Ringe a und b bezeichne ich mit β. Die Drehungsaxe des Kreisels liege im Ringe b rechtwinklig zu der Drehungsaxe zwischen a und b. Der Winkel zwischen einem bezeichneten Meridian des Kreisels und der Ebene von b sei γ, das Trägheitsmoment des Kreisels um seine Rotationsaxe sei $\mathfrak{A}$, das um eine seiner Aequatorialaxen sei $\mathfrak{B}$; das der Ringe werde vernachlässigt. Dann ist die lebendige Kraft des Kreisels:

$$\left.\begin{aligned} L &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}.\left[\frac{d\gamma}{dt} + \cos\beta\cdot\frac{d\alpha}{dt}\right]^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\cdot\left[\sin^2\beta\cdot\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right], \\ H &= -L. \end{aligned}\right\} \quad (4.)$$

154 Daraus ergeben sich die Kräfte A, B, C, mit denen die Winkel α, β, γ sich zu vergrössern streben:

$$\left.\begin{aligned} A = -\frac{d}{dt}\Big\{\mathfrak{A}.\cos\beta.\left[\frac{d\gamma}{dt} + \cos\beta.\frac{d\alpha}{dt}\right] \\ + \mathfrak{B}\cdot\sin^2\beta\cdot\frac{d\alpha}{dt}\Big\} \end{aligned}\right\} \quad (4^a.)$$

$$\left.\begin{aligned} B = -\mathfrak{A}.\sin\beta.\left[\frac{d\gamma}{dt}+\cos\beta.\frac{da}{dt}\right]\frac{da}{dt} \\ +\mathfrak{B}.\sin\beta.\cos\beta.\left(\frac{da}{dt}\right)^2-\mathfrak{B}.\frac{d^2\beta}{dt^2}, \end{aligned}\right\} \quad (4^b.)$$

$$C = -\frac{d}{dt}\left\{\mathfrak{A}.\left[\frac{d\gamma}{dt}+\cos\beta.\frac{da}{dt}\right]\right\}. \quad (4^c.)$$

Die Kraft A ist einfach ein Drehungsmoment, welches den Kreis a zu drehen strebt, ebenso B für den Kreis b. C aber strebt den Kreisel relativ zu b zu drehen, muss also seinen Stützpunkt an b haben.

Wenn die Kraft C fehlt, ergiebt sich aus (4^c.):

$$-\mathfrak{A}.\left[\frac{d\gamma}{dt}+\cos\beta.\frac{da}{dt}\right] = c. \quad (4^d.)$$

Hieraus ergiebt sich der Werth von H' nach (2^b.):

$$\left.\begin{aligned} H' = +\tfrac{1}{2}\frac{c^2}{\mathfrak{A}}-\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}.\left[\sin^2\beta.\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right] \\ +c.\cos\beta.\frac{da}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (4^e.)$$

und die Werthe der Kräfte, übereinstimmend aus (4^a), (4^b.) und (4^e.) abgeleitet:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{d}{dt}\left[c.\cos\beta-\mathfrak{B}.\sin^2\beta.\frac{da}{dt}\right], \\ B &= c.\sin\beta.\frac{da}{dt}+\mathfrak{B}.\sin\beta.\cos\beta.\left(\frac{da}{dt}\right)^2-\mathfrak{B}.\frac{d^2\beta}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad (4^f.)$$

Das erste constante Glied im Werthe von H' kann weggelassen werden, da es schliesslich nur in die willkürliche Constante des Werthes von E eintritt; das letzte Glied ist das lineare, welches im Werthe von L fehlt.

II. *Beispiel: Elektrodynamische Wirkung von geschlossenen Stromkreisen nach dem Potentialgesetz*[1]).

---

[1]) Siehe unter Anderen meine Arbeit in Borchardt-Crelle, Journ. f. Math., Bd. 72, S. 70 bis 72. Abgedruckt auf S. 560—564 des ersten Bandes dieser Sammlung.

Wir wollen unter $J_\mathfrak{b}$ die Stromintensität des $\mathfrak{b}^{\text{ten}}$ Stromkreises verstehen und unter $p_\mathfrak{a}$ Coordinaten der ponderablen Massen, deren lebendige Kraft wir vernachlässigen. Die Function H ist von der Form:

$$H = -\tfrac{1}{2} \sum_\mathfrak{b} \sum_\mathfrak{c} [Q_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} . J_\mathfrak{b} . J_\mathfrak{c}], \tag{5.}$$

worin die $Q_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}$ Functionen der $p_\mathfrak{a}$ sind, und jeder von beiden Indices $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sich nach einander auf alle Stromkreise be-
155 zieht. Die inducirten elektromotorischen Kräfte, die ich mit $\mathfrak{E}_\mathfrak{b}$ bezeichnen will, sind:

$$\mathfrak{E}_\mathfrak{b} = -\sum_\mathfrak{c} \left[\frac{d}{dt}(Q_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} . J_\mathfrak{c})\right], \tag{5^a.}$$

$$P_\mathfrak{a} = \tfrac{1}{2} \sum_\mathfrak{b} \sum_\mathfrak{c} \left[\frac{\partial Q_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}}{\partial p_\mathfrak{a}} . J_\mathfrak{b} . J_\mathfrak{c}\right]. \tag{5^b.}$$

Wenn ein permanenter Magnet mitwirkt, dessen Lage durch die Coordinate p_0 gegeben ist, so kommt zu H noch eine Reihe linearer Glieder hinzu, die ich mit h bezeichnen will, von der Form:

$$h = \sum_\mathfrak{b} [R_\mathfrak{b} \cdot J_\mathfrak{b}], \tag{5^c.}$$

wo die $R_\mathfrak{b}$ Functionen der Coordinaten $p_\mathfrak{a}$ und p_0 sind. Die Berechnung der Kräfte geschieht hieraus nach denselben Methoden. Die gesammte elektrodynamische Energie ist:

$$E = H - \sum_\mathfrak{b} \left[J_\mathfrak{b} \cdot \frac{\partial H}{\partial J_\mathfrak{b}}\right] = -H.$$

Die Function h verschwindet daraus, da:

$$h - \sum_\mathfrak{b} \left[J_\mathfrak{b} \cdot \frac{\partial h}{\partial J_\mathfrak{b}}\right] = 0.$$

Dass das hier vorkommende $E = -H$, wie die lebendige Kraft ponderabler Massen, eine nothwendig positive Grösse für geschlossene Ströme ist, habe ich in meinen elektrodynamischen Arbeiten gezeigt[1]). Ausserdem ist E eine homogene Function

---

[1]) Borchardt-Crelle, Journ. f. Math., Bd. 72, S. 86 ff. und S. 125. Abgedruckt auf S. 578 und 623 des ersten Bandes dieser Sammlung.

zweiten Grades der $J_\mathfrak{a}$, und es lassen sich daher dieselben Betrachtungen anwenden, wie sie am Ende von § 1 ausgeführt sind, wonach die Determinante der Grössen $\partial^2 H / (\partial J_\mathfrak{a} \cdot \partial J_\mathfrak{b})$ nicht identisch gleich Null werden kann.

III. *Beispiel. Thermodynamik.* Die Gesetze der reversiblen thermischen Processe können bei Wahl passender Coordinaten dargestellt werden[1]) in der Form:

$$\left.\begin{aligned} P_\mathfrak{a} &= -\frac{\partial}{\partial p_\mathfrak{a}}[\mathfrak{F} - L] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}}\right], \\ \frac{dQ}{dt} &= -\vartheta \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta}\right], \end{aligned}\right\} \quad (6.)$$

$$E = \mathfrak{F} - \vartheta \cdot \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta} + L. \quad (6^a.)$$

Darin ist $\mathfrak{F}$ die von mir als „freie Energie“ bezeichnete 156
Function der Coordinaten $p_\mathfrak{a}$ und der absoluten Temperatur ϑ, L ist die lebendige Kraft der sichtbaren Bewegungen der schweren Massen, also Function der $p_\mathfrak{a}$ und $q_\mathfrak{a}$, nach letztern homogen vom zweiten Grade, unabhängig von ϑ; dQ ist die Wärmemenge, die im Zeitelement dt von aussen in den Körper eindringt, d. h. die Arbeit, welche von aussen her einwirkende und nur Wärmebewegung hervorbringende Kräfte ausgeübt haben.

Dieselbe Form mit geänderten Variablen erhalten wir, indem wir setzen:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta} = -S,$$

dann mit s irgend eine Function von S bezeichnen, und ferner setzen:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta \cdot \frac{\partial S}{\partial s} &= \eta, \\ H &= \mathfrak{F} - \vartheta \cdot \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta} - \eta \,.\, s. \end{aligned}\right\} \quad (6^b.)$$

Drücken wir nun H und s als Functionen der $p_\mathfrak{a}$ und des η

[1]) Borchardt-Crelle, Journ. f. Math., Bd. 97, S. 112 bis 117. Abgedruckt auf S. 120—127 des vorliegenden Bandes dieser Sammlung. Die lebendige Kraft der sichtbaren Bewegungen L ist hinzugefügt, um die hier wünschenswerthe Vollständigkeit zu bewahren.

aus [l. c. Abhdl. I. Gl. (1^d.)][1], so lassen sich die obigen Gleichungen schreiben:

$$\frac{dQ}{dt} = + \vartheta \cdot \frac{dS}{dt} = \eta \cdot \frac{ds}{dt}, \qquad (6^c.)$$

$$P_a = - \frac{\partial}{\partial p_a} [H - L] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial q_a} \right], \qquad (6^d.)$$

$$E = H - \eta \cdot \frac{\partial H}{\partial \eta} + L. \qquad (6^e.)$$

Auch diese Gleichungen haben wie die ersten (6.), (6^a.) ganz die Form (s. l. c. § 3), wie die für die Bewegung monocyklischer Systeme, deren kinetisches Potential $(H - L)$ ist, und für welche η die Geschwindigkeit, s das Bewegungsmoment der monocyklischen Bewegung bezeichnet.

Bezeichnen wir mit $P_{(\eta)}$ die in Richtung der Geschwindigkeit η ausgeübte Kraft, so ist:

$$P_{(\eta)} \cdot \eta \, . \, dt = dQ. \qquad (6^f.)$$

Die Analogie mit den Ausdrücken von Lagrange bleibt hier also gewahrt, in welcher Weise auch die Entropie S von dem Bewegungsmoment s der monocyklischen Bewegung abhängen mag. Die Möglichkeit der Koppelung gleich warmer Körpersysteme zu einem grösseren System und die kinetische Gastheorie führen in diesem Falle dazu anzunehmen, dass:

157 $$\vartheta = s \, . \, q,$$

$$S = - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta} = C \, . \log s$$

sei. Danach wäre für jedes gegebene Körpersystem die Temperatur proportional der lebendigen Kraft der Wärmebewegung zu setzen, wie vor mir auch schon die Hrn. Clausius und Boltzmann wahrscheinlich zu machen gesucht haben[2]). Die späteren Anwendungen unseres Beispiels sind

---

[1]) Abgedruckt auf S. 125 des vorliegenden Bandes.

[2]) Ich habe in einer Mittheilung an die Berliner Akademie (Sitzungsberichte 8. December 1884) diesen Satz bestimmter ausgesprochen, aber dann erkannt, dass ein Schritt im Beweise nicht gesichert werden konnte, sondern noch eine weitere einschränkende Bedingung erfordere, deren physikalische Bedeutung ich noch nicht so zu interpretiren weiss, wie ich hoffe, dass es geschehen kann. Ich muss daher die von Hrn. L. Boltzmann gegen jenen Aufsatz gemachten Einwände (Wiener Sitzungsberichte (2) Abth., XCII. Bd., 8. October 1885) als in dieser Beziehung berechtigt anerkennen.

unabhängig von der Frage nach der Beziehung zwischen den Functionen S und s.

Die Wärmebewegung ist wahrscheinlich als ein besonders weit gehendes Beispiel von Elimination von Coordinaten p_c aufzufassen, H kann deshalb eine verwickelte Function von ϑ oder η sein. Dass aber auch viel zusammengesetztere Bewegungsweisen, die den inneren Molecularbewegungen der warmen Körper schon viel ähnlicher sind, zu den gleichen Gesetzen führen können, haben meine Untersuchungen über die zusammengesetzten monocyklischen Systeme gezeigt.

§ 3.

Das kinetische Potential aus dem Werthe der Energie herzuleiten.

Bei den physikalischen Untersuchungen ist meist leichter und sicherer zu erkennen, welches die Umstände sind, die auf den Energievorrath irgend eines Körpersystems Einfluss haben, und danach den Werth der Function E zu bestimmen, als die gesammten Gesetze der Veränderungen und aus diesen das kinetische Potential zu finden. Wir kommen also nun zur Untersuchung darüber, in wie weit das letztere aus dem Werthe des Energievorraths bestimmt werden könne.

Wir setzen voraus, das die Grösse E als Function der p_a und q_a gefunden sei. Für die Form dieser Function ergiebt sich aus Gleichung (1^h.):

$$E = H - \sum_a \left[q_a \cdot \frac{\partial H}{\partial q_a} \right].$$

Daraus folgt: 158

$$\frac{\partial E}{\partial q_b} = - \sum_a \left[q_a \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial q_a \cdot \partial q_b} \right]. \qquad (7.)$$

Bei der zur Bildung der Bewegungsgleichungen nöthigen Variation der in Gleichung (1^a.) gegebenen Function Φ musste vorausgesetzt werden, dass die ersten und zweiten Differentialquotienten von H längs des von dem Systeme durchlaufenen Weges stets endlich bleiben. Danach folgt aus Gleichung

(7.), dass, wenn sämmtliche $q_a = 0$, auch alle $\partial E / \partial q_a$ gleich Null werden.

Andere Beschränkungen der Function E, die durch die physikalische Bedeutung gegeben sind, mögen hier nur kurz erwähnt werden.

1) Die vorkommenden Coordinaten können sich bei einem freien System nur auf die relative Lage der Massen des Systems beziehen, weil überall im Raume bei gleicher relativer Lage der Massen zu einander der gleiche Bewegungsvorgang muss vorgehen können.

2) Der Werth von E muss für endliche Entfernungen der Massen und endliche Geschwindigkeiten ein endliches Minimum haben; sonst wäre der Arbeitsvorrath des Systems unendlich gross. Also muss für unendlich wachsende q_a der Werth von E eine nothwendig positive Grösse werden. Welche unzulässige Folgerungen aus der gegentheiligen Annahme fliessen, habe ich für die elektrodynamische Theorie von Hrn. W. Weber zu zeigen gesucht[1]).

Aus der Gleichung (1^h.) ergiebt sich zunächst leicht, dass, wenn H als eine Summe von homogenen ganzen Functionen der q_a verschiedenen Grades dargestellt werden kann, dasselbe für E der Fall ist. Bezeichnen wir eine homogene Function n^{ten} Grades der q_a mit P_n und ist:

$$H = \sum_{n} [P_n], \qquad (7^a.)$$

so ist:

$$E = \sum_{n} [(1-n) \cdot P_n], \qquad (7^b.)$$

oder:

$$E = P_0 - P_2 - 2P_3 \text{ etc.}$$

Die Glieder ersten Grades P_1 fallen im Werthe von E
159 weg, P_0 entspricht der potentiellen, von der Bewegung unabhängigen Energie, die wir oben mit F bezeichnet haben, P_2 dem $(-L)$. Höhere Glieder kommen in den Problemen für

[1]) Borchardt-Crelle, Journ. f. Math., Bd. 72, S. 85, § 4 bis § 7; Bd. 75, S. 35—62. Abgedruckt auf S. 578—611 und 647—679 des ersten Bandes dieser Sammlung.

die Mechanik wägbarer Körper nur in den durch Elimination gewisser Coordinaten $p_\mathfrak{c}$ veränderten Fällen vor.

Uebrigens lässt sich die gestellte Aufgabe auch lösen, *wenn E eine ganz willkürliche Function der Geschwindigkeiten ist,* die nur der schon oben gestellten Bedingung genügt, dass alle $\partial E \,/\, \partial q_\mathfrak{a}$ nach Gleichung (7.) sich dem Werthe Null nähern, wenn die $q_\mathfrak{a} = 0$ werden. Es wird für unseren Zweck ausreichen die obengemachte Bestimmung festzuhalten, wonach die Coëfficienten in dem Gleichungssystem (7.) endlich sein sollen, obgleich auch Fälle zulässig wären, wo jene Coëfficienten integrirbar unendlich würden.

Wir wollen zur Lösung unserer Aufgabe statt der $q_\mathfrak{a}$ in den Werthen des E und des H setzen:

$$q_\mathfrak{a} = x \cdot \mathfrak{q}_\mathfrak{a}, \tag{8.}$$

und unter x einen veränderlichen Factor verstehen, bei dessen Aenderung sich zwar die absoluten Werthe der $q_\mathfrak{a}$, nicht aber ihre gegenseitigen Verhältnisse ändern.

Die Functionen H und E bezeichne ich, nachdem diese Substitution gemacht ist, mit H' und E'. Dann ist:

$$\frac{\partial E'}{\partial x} = \sum_\mathfrak{a}\left[\mathfrak{q}_\mathfrak{a} \cdot \frac{\partial E}{\partial q_\mathfrak{a}}\right]. \tag{8^a.}$$

Da nach der bei Gleichung (7.) gemachten Festsetzung alle $\partial E \,/\, \partial q_\mathfrak{a} = 0$, wenn alle $q_\mathfrak{a} = 0$, dies aber eintrifft nach Gleichung (8.), wenn $x = 0$, so ergiebt sich, dass:

$$\frac{\partial E'}{\partial x} = 0, \quad \text{wenn} \quad x = 0, \tag{8^b.}$$

und zwar wird das $\partial E' \,/\, \partial x$ für sehr kleine x dem x selbst nach unseren Annahmen proportional werden müssen, wenn nicht einer höheren Potenz des x. Andererseits haben wir:

$$\frac{\partial H'}{\partial x} = \sum_\mathfrak{a}\left[\mathfrak{q}_\mathfrak{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}}\right],$$

also:

$$x \; \frac{\partial H'}{\partial x} = \sum_\mathfrak{a}\left[q_\mathfrak{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_\mathfrak{a}}\right] = -E' + H', \tag{8^c.}$$

und daher:

$$\frac{\partial E'}{\partial x} = -x \cdot \frac{\partial^2 H'}{\partial x^2}. \qquad (8^d.)$$

160 Wenn für die Differentialgleichung ($8^c.$):

$$E' = H' - x \cdot \frac{\partial H'}{\partial x} \qquad (8^e.)$$

noch eine zweite Lösung existirt, die wir mit H'' bezeichnen wollen, so ist:

$$0 = H' - H'' - x \cdot \frac{\partial}{\partial x}[H' - H''],$$

d. h.

$$\log(H' - H'') = \log x + \log C$$

oder:

$$H' - H'' = x \,.\, C,$$

worin C eine Function der q_a sein kann. Dieselbe kann aber nur homogen ersten Grades sein, wenn $(H' - H'')$ auch als Function der q_a, die von x frei ist, soll dargestellt werden können.

Nun brauchen wir nur noch ein particuläres Integral der Gleichung ($8^c.$) zu finden.

Ein solches erhalten wir, wenn wir zunächst die Gleichung ($8^c.$) für $x = 0$ schreiben:

$$E_0 = H_0,$$

und diese von ($8^c.$) abziehen:

$$(E' - E_0) = (H' - H_0) - x \cdot \frac{\partial}{\partial x}[H' - H_0].$$

Durch x^2 dividirt, giebt dies:

$$-\frac{1}{x^2} \cdot (E' - E_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{H' - H_0}{x}\right].$$

Nach den zu ($8^b.$) gemachten Erörterungen ist die links stehende Grösse auch für $x = 0$ endlich, und wir erhalten also durch Integration zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$:

$$H' - H_0 = -\int_0^1 \frac{E' - E_0}{x^2} \cdot dx + H_1, \qquad (8^f.)$$

worin die Integrationsconstante H_1, wie bemerkt, irgend welche homogene Function ersten Grades der q_a sein kann.

Es ist also E eindeutig mittels der Gleichung (1^h.) aus H abzuleiten, während bei der Herleitung von H aus E die hinzuzufügende Function H_1, die den „verborgenen" Bewegungen entspricht, unbestimmt bleibt. Ob solche Glieder ersten Grades sich einmischen, wird bei speciellen Aufgaben meistens aus den Bedingungen, unter denen die Bewegung rückläufig vorsich gehen kann, zu ermitteln sein.

Wenn man also bei dem betreffenden Probleme weiss, 161
welche physikalischen Grössen im Werthe von E als Coordinaten, und welche als Geschwindigkeiten zu behandeln sind, so kann man der Regel nach die hier gestellte Aufgabe lösen. Aber es kommen auch gegentheilige Fälle vor, wo die Entscheidung über die genannte Frage unsicher erscheint.

§ 4.

Die allgemeinen Eigenthümlichkeiten der Kräfte bewegter Systeme.

Es ist bekannt, dass die nach aussen wirkenden Kräfte *ruhender Systeme*, die dem Gesetz der Constanz der Energie genügen, gewisse gesetzmässige Beziehungen zu einander zeigen, die sich in den Gleichungen:

$$\frac{\partial P_a}{\partial p_b} = \frac{\partial P_b}{\partial p_a}$$

aussprechen, und dass, wenn diese Gleichungen erfüllt sind, sich der Werth der potentiellen Energie finden lässt.

Ebenso lassen sich auch *für bewegte Systeme*, welche dem Minimalsatze der kinetischen Energie unterliegen, ähnliche Beziehungen aufstellen, welche sich unmittelbar aus Lagrange's Ausdrücken für die Kräfte ergeben. Diese sind dabei nicht bloss, wie in den ruhenden Systemen, als Functionen der Coordinaten p_a, sondern auch als solche der Geschwindigkeiten q_a und der Beschleunigungen:

$$q'_a = \frac{dq_a}{dt} \tag{9.}$$

aufzufassen. Gleichung (1^c.):

$$P_{\mathfrak{a}} = -\frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{a}}} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{a}}}\right] \qquad (1^c.)$$

ergiebt unmittelbar:

$$P_{\mathfrak{a}} = -\frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{a}}} + \sum_{\mathfrak{b}}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}} . \partial p_{\mathfrak{b}}} \cdot q_{\mathfrak{b}}\right] + \sum_{\mathfrak{b}}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}} . \partial q_{\mathfrak{b}}} \cdot q'_{\mathfrak{b}}\right].$$

A. Kräfte und Beschleunigungen.

Wie man sieht, sind, in dieser Form dargestellt, die Kräfte lineare Functionen der Beschleunigungen. Der Coëfficient des $q'_{\mathfrak{b}}$ im Werthe der Kraft $P_{\mathfrak{a}}$ kann also geschrieben werden:

$$\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial q'_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}} . \partial q_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial P_{\mathfrak{b}}}{\partial q'_{\mathfrak{a}}}, \qquad (9^a.)$$

d. h. also: *Wenn die Beschleunigung $q'_{\mathfrak{b}}$ die Kraft $P_{\mathfrak{a}}$ um einen*
162 *gewissen Betrag grösser macht, so macht die gleich grosse Beschleunigung $q'_{\mathfrak{a}}$ die Kraft $P_{\mathfrak{b}}$ um den gleichen Betrag grösser.* Ob ein solcher Einfluss in einem gegebenen Falle vorkommt oder nicht, hängt davon ab, ob die Grösse $\partial^2 H / (\partial q_{\mathfrak{a}} . \partial q_{\mathfrak{b}})$ verschieden von Null oder gleich Null ist. Null ist die genannte Grösse zum Beispiel für die Bewegungen eines vollkommen freien Systems wägbarer Massenpunkte, wenn sie auf rechtwinkelige Coordinaten bezogen werden. Jede einzelne Kraftcomponente wirkt beschleunigend nur in Richtung derjenigen Coordinate, auf die sie sich bezieht.

Bei dem Kreisel im Beispiel I des § 2 haben wir:

$$\frac{\partial A}{\partial \beta''} = \frac{\partial B}{\partial \alpha''} = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma''} = \frac{\partial C}{\partial \alpha''} = -\mathfrak{A}.\cos\beta,$$

$$\frac{\partial C}{\partial \beta''} = \frac{\partial B}{\partial \gamma''} = 0,$$

worin α'', β'', γ'' die Beschleunigungen der Winkel α, β, γ bezeichnen.

Im Beispiel II für die elektrodynamischen Wirkungen ist:

$$\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial J'_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial \mathfrak{E}_{\mathfrak{b}}}{\partial q'_{\mathfrak{a}}} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_{\mathfrak{b}}}{\partial J'_{\mathfrak{c}}} = \frac{\partial \mathfrak{E}_{\mathfrak{c}}}{\partial J'_{\mathfrak{b}}}.$$

Die erstere Gleichung sagt aus: Da die ponderomotorische Kraft der Stromkreise nicht von der *Beschleunigung* der Ströme abhängt, so kann auch die inducirte elektromotorische Kraft nicht von der *Beschleunigung* der Stromleiter abhängen (wohl aber in beiden Fällen von den Geschwindigkeiten). Die letztere Gleichung sagt aus, dass, wenn bei der gegebenen Lage und Form der Stromkreise b und c Steigerung der in b wirkenden Kraft $\mathfrak{E}_\mathfrak{b}$ durch elektrodynamische Induction $J_\mathfrak{c}$ ansteigen macht, die gleiche Steigerung der Kraft $\mathfrak{E}_\mathfrak{c}$ dasselbe für $J_\mathfrak{b}$ bewirkt.

Im Beispiel III für die thermodynamischen Wirkungen fallen diese Wechselbeziehungen fort, da die lebendige Kraft L der schweren Massen nicht von der Temperatur abhängt, und also Producte $\vartheta \cdot q_\mathfrak{a}$ im Werthe von $(\mathfrak{F}-L) = H$ nicht vorkommen.

B. Beziehungen zwischen Kräften und Geschwindigkeiten.

Aus den Gleichungen (7.) folgt weiter:

$$\frac{\partial P_\mathfrak{a}}{\partial q_\mathfrak{b}} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_\mathfrak{a} . \partial q_\mathfrak{b}} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_\mathfrak{b} . \partial q_\mathfrak{a}} + \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_\mathfrak{a} . \partial q_\mathfrak{b}}\right].$$

Also: 163

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P_\mathfrak{a}}{\partial q_\mathfrak{b}} + \frac{\partial P_\mathfrak{b}}{\partial q_\mathfrak{a}} &= 2 \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_\mathfrak{a} . \partial q_\mathfrak{b}}\right] \\ &= 2 \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial P_\mathfrak{a}}{\partial q'_\mathfrak{b}}\right] = 2 \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial P_\mathfrak{b}}{\partial q'_\mathfrak{a}}\right].\end{aligned}\right\} \qquad (9^b.)$$

In der sehr grossen Zahl von Fällen, wo:

$$\frac{\partial P_\mathfrak{a}}{\partial q'_\mathfrak{b}} = \frac{\partial P_\mathfrak{b}}{\partial q'_\mathfrak{a}} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_\mathfrak{a} \cdot \partial q_\mathfrak{b}} = \text{Const.}, \qquad (9^c.)$$

folgt daraus:

$$\frac{\partial P_\mathfrak{a}}{\partial q_\mathfrak{b}} = -\frac{\partial P_\mathfrak{b}}{\partial q_\mathfrak{a}}, \qquad (9^d.)$$

d. h. *wenn Steigerung der Geschwindigkeit $q_\mathfrak{b}$ bei gleichbleibender Lage und gleichbleibenden Beschleunigungen die Kraft $P_\mathfrak{b}$ wachsen macht, so wird entsprechende Steigerung von $q_\mathfrak{b}$ die Kraft $P_\mathfrak{a}$ verringern.* In den zu A angeführten Beispielen sind schon die Fälle bemerkt, in denen die Vorbedingung $(9^c.)$ erfüllt ist. Sie zeigen am besten die ausgedehnte Bedeutung dieses Satzes,

aber auch dass man die Erfüllung der Vorbedingung controlliren muss, ehe man statt des allgemein richtigen Satzes $(9^{b}.)$ den einfacheren $(9^{d}.)$ anwendet.

Beispiel I. Wenn eine Kraft, welche den Winkel β vergrössert, d. h. die Axe des Kreisels von der Verticale zu entfernen strebt, grössere Präcessionsbewegung $\partial\alpha/\partial t$ unterhält, so wird eine Kraft, welche die Präcessionsbewegung zu beschleunigen strebt, die Axe der Verticallinie zuführen.

Beispiel II. Elektrodynamisches Inductionsgesetz nach Lenz. Die Bewegung zweier Stromkreise gegen einander, welche durch die ponderomotorischen elektrodynamischen Kräfte unterstützt wird, bringt elektromotorische inducirte Kräfte hervor, die den Strömen entgegenwirken.

Die entsprechende Beziehung gilt für Bewegung eines Magneten gegen einen Stromleiter.

Beispiel III. Thermodynamisch. Wenn Steigerung der Temperatur den Druck eines Körpersystems steigert, wird Compression desselben die Temperatur steigern.

Für diesen Fall können wir die Gleichung $(9^{d}.)$ nach Multiplication beider Seiten mit η, mit Beziehung auf die Bezeichnungen und Erläuterungen von § 2 zu diesem Beispiel, schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial q_\mathfrak{a}}\left[P_{(\eta)}\cdot\eta\right] = -\frac{\partial P_\mathfrak{a}}{\partial\log\eta},$$

164 oder nach $(6^{f}.)$:

$$\frac{\partial}{\partial q_\mathfrak{a}}\left[\frac{dQ}{dt}\right] = +\frac{\partial P_\mathfrak{a}}{\partial\log\eta}. \qquad (9^{e}.)$$

Nun ist nach $(6^{e}.)$:

$$\frac{dQ}{dt} = \eta\cdot\frac{ds}{dt} = \eta\cdot\sum_\mathfrak{a}\left[\frac{\partial s}{\partial p_\mathfrak{a}}\cdot q_\mathfrak{a}\right] + \eta\cdot\frac{\partial s}{\partial\eta}\cdot\frac{d\eta}{dt}.$$

Also ist:

$$\frac{\partial}{\partial q_\mathfrak{a}}\left[\frac{dQ}{dt}\right] = \eta\cdot\frac{\partial s}{\partial p_\mathfrak{a}}. \qquad (9^{f}.)$$

Nach $(6^{d}.)$ war:

$$P_\mathfrak{a} = -\frac{\partial}{\partial p_\mathfrak{a}}\left[H-L\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}}\right],$$

und da L unabhängig von η, so ist:

$$\frac{\partial P_a}{\partial \eta} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_a . \partial \eta} = \frac{\partial s}{\partial p_a}, \qquad (9^g.)$$

wodurch in Verbindung mit ($9^f.$) die Richtigkeit der Gleichung ($9^e.$) bestätigt wird, und somit auch die Anwendbarkeit unseres allgemeinen Satzes. Dabei könnte jede beliebige unter den Functionen η der Gleichung ($6^b.$) als Geschwindigkeit angesehen werden, nur muss dann entsprechend $d\eta/dt$ als Beschleunigung gelten. Auch die Temperatur ϑ gehört in die Reihe der integrirenden Nenner η, so dass also auch:

$$\frac{\partial}{\partial q_a}\left[\frac{dQ}{dt}\right] = \frac{\partial P_a}{\partial \log \vartheta}.$$

Da bei dieser Anwendung $d\vartheta / dt = 0$ sein soll, so ist $\frac{\partial}{\partial q_a}\left[\frac{dQ}{dt}\right]$ die Geschwindigkeit, mit welcher Wärme eintritt, wenn der Parameter p_a mit der Geschwindigkeit q_a wächst, während ϑ constant bleibt. Dies giebt die oben gegebene Formulirung des Satzes.

Dieselben Betrachtungen lassen sich auch auf die reversiblen Theile thermoelektrischer und elektrochemischer Vorgänge anwenden.

Peltiers Phänomen. Wenn Erwärmung einer Stelle einer geschlossenen Leitung einen elektrischen Strom hervorbringt, so wird derselbe Strom dort Kälte entwickeln (abgesehen von der Wärmeentwickelung durch den Leitungswiderstand).

Elektrochemisch: Wenn Erwärmung eines constanten galvanischen Elements die elektromotorische Kraft steigert, wird der 165
Strom in demselben Wärme latent machen[1]).

Die obigen Formeln zeigen aber nicht nur den Sinn der Aenderung an, sondern geben auch gleichzeitig Aufschluss über die Quantitäten, um die es sich handelt.

---

[1]) Siehe meine Abhandlungen zur Thermodynamik chemischer Vorgänge. Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1882, 2. Febr., S. 24—26; 1882, 27. Juli, S. 825—835. Abgedruckt auf S. 958 und 979 des zweiten Bandes dieser Sammlung.

C. Beziehungen zwischen den Kräften und Coordinaten.

Endlich folgt aus Gleichung (9.):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial p_{\mathfrak{b}}}-\frac{\partial P_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}}&=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{a}}\cdot\partial p_{\mathfrak{b}}}-\frac{\partial^2 H}{\partial q_{\mathfrak{b}}\cdot\partial p_{\mathfrak{a}}}\right]\\&=\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial q_{\mathfrak{b}}}-\frac{\partial P_{\mathfrak{b}}}{\partial q_{\mathfrak{a}}}\right].\end{aligned}\right\}\quad(9^h.)$$

Für den Fall der Ruhe, wo die rechte Seite Null wird, ergiebt sich hieraus das allgemeine Gesetz aller conservativen Kräfte:

$$\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial p_{\mathfrak{b}}}=\frac{\partial P_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}}.\qquad(9^i.)$$

Dieselbe Bedingung ist aber auch erfüllt, wenn zeitweilig die Bewegung so vor sich geht, dass die rechte Seite von Gleichung (9^h.) gleich Null ist. So können wir das Gesetz (9^i.) auch anwenden um für die Kräfte warmer Körper, beziehlich monocyklischer Systeme eine Kräftefunction zu bilden, falls nur während der Bewegung eine der Functionen η der Gleichung (6^b.) constant bleibt. Wenn wir dabei die lebendige Kraft der geordneten Bewegungen L vernachlässigen, ist nach Gleichung (6^d.) einfach:

$$P_{\mathfrak{a}}=-\frac{\partial H}{\partial p_{\mathfrak{a}}},$$

also unsre Gleichung (9^i.) erfüllt. In diesem Falle sind wir aber fast immer, wenn wir uns mit der Mechanik irdischer Körper beschäftigen, die mehr oder weniger Wärme enthalten. Trotzdem die Körper innerlich heftig bewegt sind, können wir z. B. für die Theorie ihrer elastischen Wirkungen vermöge des hier aufgewiesenen Gesetzes Kräftefunctionen der Molecularkräfte bilden und anwenden, als ob ihr Gleichgewichtszustand der eines stabilen Gleichgewichts in absoluter Ruhe wäre.

Ich will hier noch bemerken, dass die in den Gleichungen:

$$\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial q'_{\mathfrak{b}}}=\frac{\partial P_{\mathfrak{b}}}{\partial q'_{\mathfrak{a}}},\qquad(9^a.)$$

166

$$\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial q_{\mathfrak{b}}}+\frac{\partial P_{\mathfrak{b}}}{\partial q_{\mathfrak{a}}}=2\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial P_{\mathfrak{b}}}{\partial q'_{\mathfrak{a}}}\right]\qquad(9^b.)$$

$$\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial p_{\mathfrak{b}}}-\frac{\partial P_{\mathfrak{b}}}{\partial p_{\mathfrak{a}}}=\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial P_{\mathfrak{a}}}{\partial q_{\mathfrak{b}}}-\frac{\partial P_{\mathfrak{b}}}{\partial q_{\mathfrak{a}}}\right]\qquad(9^h.)$$

ausgesprochenen gegenseitigen Beziehungungen der Kräfte in Verbindung mit dem Umstande, dass die P_a lineare Functionen der q'_a sind, was man schreiben kann:

$$\frac{\partial^2 P_a}{\partial q'_b \cdot \partial q'_c} = 0, \qquad (9^k.)$$

und mit den früher gegebenen Definitionen:

$$q_a = \frac{dp_a}{dt}, \qquad (1.)$$

$$q'_a = \frac{dq_a}{dt} \qquad (9.)$$

genügend sind, um nachzuweisen, dass ein *kinetisches Potential* besteht, dass die Kräfte P_a in der von Lagrange angegebenen Weise durch die Differentialquotienten desselben ausgedrückt, und dass die Bewegungsgleichungen auf das Princip der kleinsten Wirkung reducirt werden können.

Die hier zusammengestellten Beziehungen der Kräfte enthalten also eine vollständige Charakteristik derjenigen Bewegungen, welche dem Princip der kleinsten Wirkung unterliegen.

Der Beweis für diesen Satz lässt sich mit den bis jetzt vorbereiteten Hülfsmitteln der Analysis für den Fall, dass nicht mehr als drei Coordinaten p_a vorkommen, unmittelbar geben. Dazu werden aber Sätze aus der Theorie der Potentialfunctionen im Raume von drei Dimensionen gebraucht. Will man auf mehr Coordinaten p_a übergehen, so braucht man die entsprechenden Sätze für eine grössere Zahl von Coordinaten Dieselben lassen sich bilden, soweit sie für unseren Beweis nöthig sind. Da dies aber eine Sache von selbständigem Interesse ist, so schien es mir nicht passend sie hier nur nebensächlich abzuthun, und ich ziehe deshalb vor, den genannten Beweis bei einer andern Gelegenheit zu geben.

Andere allgemeine Eigenthümlichkeiten der unter dem Principe der kleinsten Wirkung ablaufenden Bewegungen werden in den nächsten Paragraphen beschrieben werden.

213 § 5.

Verallgemeinerung von Hamilton's Differentialgleichung.

Hamilton hat die von ihm unter etwas engeren Voraussetzungen gebildete Function Φ

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} (F - L) \,.\, dt$$

als Function der Zeit $t = t_1 - t_0$ und der Werthe der Coordinaten zu den Zeiten t_1 und t_0 darzustellen gelehrt. Wir wollen die Coordinaten und Bewegungsmomente für die Zeit t_1 mit p_α und s_α, für die Zeit t_0 mit $\mathfrak{p}_\alpha$ und $\mathfrak{s}_\alpha$ bezeichnen. Vorausgesetzt ist, das während der Zeit $(t_1 - t_0)$ die Aenderungen der p_α nach den Bewegungsgesetzen erfolgen. Dann lässt sich offenbar der Werth des mit Φ bezeichneten Integrals als Function der p_α, $\mathfrak{p}_\alpha$ und des t berechnen, und für diese Art der Darstellung haben wir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial p_\alpha} &= -s_\alpha, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{p}_\alpha} &= \mathfrak{s}_\alpha, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= E \end{aligned}\right\} \qquad (10.)$$

oder:

$$d\Phi = E \,.\, dt - \sum_\alpha [s_\alpha \,.\, dp_\alpha] + \sum_\alpha [\mathfrak{s}_\alpha \,.\, d\mathfrak{p}_\alpha]. \qquad (10^a.)$$

Diese ganze Umformung lässt sich auch für die in § 1 gemachten erweiterten Annahmen durchführen[1]). Für den hier
214 vorliegenden Zweck genügt es dies unter der Annahme zu thun, dass die $P_\alpha = 0$ seien. Uebrigens möge die Function H eine beliebige Function der p_α und q_α sein, wenn sie nur die oben erörterten Stetigkeitsbedingungen erfüllt.

Die ersten beiden Systeme von Gleichungen (10.) ergeben sich bekanntlich bei der Ausführung der partiellen Integrationen, durch die man bei der Variation von Φ die δq_α in δp_α über-

---

[1]) Wie schon C. G. J. Jacobi in seinen Vorlesungen über Dynamik bemerkt hat. XIX. Vorlesung.

führt. Der in der dritten der Gleichungen (10.) vorkommende Differentialquotient nach der Zeit $\partial\Phi/\partial t$, für ungeänderte Werthe der $p_\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}_\mathfrak{a}$, ergiebt sich, wenn wir die bei der Fortsetzung einer wirklichen Bewegung eintretende Aenderung des Werthes von Φ suchen für eine Verlängerung der Zeit um dt. Dabei wächst $p_\mathfrak{a}$ um $q_\mathfrak{a}.dt$, und andererseits zeigt Gleichung (1^a.), dass die genannte Variation von Φ gleich dem Endwerthe von $H.dt$ ist. Also:

$$H.dt = \left\{\frac{\partial\Phi}{dt} + \Sigma\left[\frac{\partial\Phi}{\partial p_\mathfrak{a}}\cdot q_\mathfrak{a}\right]\right\}.dt,$$

oder nach den ersten Gleichungen (10.) und (1^h.):

$$\frac{\partial\Phi}{dt} = E.$$

Aus den Gleichungen (10.) folgen nun folgende Beziehungen zwischen den Grössen $s_\mathfrak{a}$, $\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$, E, wenn dieselben als Functionen der $p_\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_\mathfrak{a}$ und des t dargestellt sind:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial s_\mathfrak{a}}{\partial p_\mathfrak{b}} &= \frac{\partial s_\mathfrak{b}}{\partial p_\mathfrak{a}},\\ \frac{\partial s_\mathfrak{a}}{\partial \mathfrak{p}_\mathfrak{b}} &= -\frac{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}}{\partial p_\mathfrak{a}},\\ \frac{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{a}}{\partial \mathfrak{p}_\mathfrak{b}} &= \frac{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}}{\partial \mathfrak{p}_\mathfrak{a}},\end{aligned}\right\} \quad (10^b.)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial p_\mathfrak{a}} &= -\frac{\partial s_\mathfrak{a}}{\partial t},\\ \frac{\partial E}{\partial \mathfrak{p}_\mathfrak{a}} &= \frac{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{a}}{\partial t}.\end{aligned}\right\} \quad (10^c.)$$

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, ist:

$$E.dt - \sum_\mathfrak{a}[s_\mathfrak{a}.dp_\mathfrak{a}] + \sum_\mathfrak{a}[\mathfrak{s}_\mathfrak{a}.d\mathfrak{p}_\mathfrak{a}] = d\Phi \qquad (10^d.)$$

das vollständige Differential einer Function der $p_\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_\mathfrak{a}$ und des t.

Beziehungen zwischen den E, $s_\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$.

Uebrigens sind die in der Differentialgleichung (10^d.) vorkommenden Grössen E, $s_\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$, wenn sie der Energie und den Bewegungsmomenten bei einer ohne Eingriff äusserer 215
Kräfte möglichen Bewegung des Systems entsprechen sollen,

nicht ganz unabhängig von einander. Die Bewegungsgleichungen des Systems würden nämlich wie Hamilton schon gezeigt, durch das System der Gleichungen:

$$\mathfrak{s}_a = \text{Const.} \tag{10 e.}$$

dargestellt werden können. Da die $\mathfrak{s}_a$ Functionen der p_a, des t und der $\mathfrak{p}_a$ sind, so werden hieraus im Allgemeinen die p_a als Functionen der Zeit und der die Integrationsconstanten vertretenden $\mathfrak{p}_a$ und $\mathfrak{s}_a$ bestimmt werden können, wodurch die Lage des Systems für jeden späteren Augenblick gegeben ist. Wenn man nun bei einem conservativen System die so gewonnenen Werthe der p_a in den Werth des E einsetzt, so würde dieses sich in eine Function der $\mathfrak{p}_a$ und $\mathfrak{s}_a$ verwandeln, welche aber dann nicht mehr abhängig von der Zeit sein dürfte. Wenn wir zurückgehen auf die Gleichungen (10.), so heisst dies, dass:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = F_{\left(\mathfrak{p}_a,\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathfrak{p}_a}\right)} \tag{10 f.}$$

oder dass *für die Function Φ eine Differentialgleichung erster Ordnung bestehen muss zwischen ihren Differentialquotienten $\partial\Phi / dt$ und $\partial\Phi / \partial\mathfrak{p}_a$, deren Coëfficienten nur von den $\mathfrak{p}_a$ abhängen.*

Ebenso können wir aber auch den Weg des Systems von einer bestimmten Endlage rückwärts verfolgen, wobei wir die Werthe der p_a und s_a als constant zu behandeln haben. Dann ergeben die Gleichungen:

$$s_a = \text{Const.}$$

die Grössen $\mathfrak{p}_a$ als Functionen des t und der festen Werthe der s_a und p_a. Diese Werthe der $\mathfrak{p}_a$, eingesetzt in die Function E, ergeben diese als Function der s_a und p_a, aus welcher das t verschwunden sein muss. Daraus folgt, dass es für die Function Φ eine *zweite Differentialgleichung* geben muss:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = G_{\left(p_a,\ \frac{\partial \Phi}{\partial p_a}\right)} \tag{10 g.}$$

zwischen den Differentialquotienten $\partial\Phi / \partial t$ und $\partial\Phi / \partial p_a$, deren Coëfficienten nur von den p_a abhängen.

Diese beiden Differentialgleichungen für die Function Φ haben bei Hamilton eine bestimmtere Gestalt, da er die

beiden Bestandtheile des kinetischen Potentials und zwar in der alten engeren Form von vornherein als gegeben be- 216
trachtet, während wir hier nur den allgemeinsten Charakter derjenigen Bewegungen suchen, die gleichzeitig dem Princip von der Erhaltung der Energie und dem der kleinsten Wirkung entsprechen.

Dazu kommt ferner, dass jedes Paar zusammengehöriger s_a und $\mathfrak{s}_a$ Werthe derselben Function zu Anfang und Ende der Zeit t sein sollen. Wenn wir also die Differentialgleichung (10^d.) auf sehr kleine Zeiten t anwenden, werden bei wirklichen Bewegungen die Grössen:

$$p_a - \mathfrak{p}_a = q_a \cdot t \qquad (10^h.)$$

zu setzen sein, und diese q_a sich dem Werthe der Geschwindigkeit um so mehr nähern, je kleiner t ist. Ebenso wird sich aber dann auch der Unterschied $(s_a - \mathfrak{s}_a)$ mit abnehmendem t der Null nähern müssen. Wenn die Differentialgleichung (10^d.) und diese Nebenbedingungen erfüllt sind, folgt, dass auch das *Variationsproblem* erfüllt sei.

Zu dem Ende braucht man nur die $\mathfrak{p}_a$ constant zu lassen, und die p_a so zu verändern, wie sie sich beim ungestörten Ablauf der Bewegung während des Zeittheilchens dt verändern, also:

$$d\mathfrak{p}_a = 0 \text{ und } dp_a = q_a \, . \, dt.$$

Dies ergiebt nach (10^d.):

$$d\Phi = \{E - \Sigma[s_a \, . \, q_a]\} \, . \, dt \qquad (10^d.)$$

oder:

$$\Phi = \int_0^t dt \, . \, \{E - \sum_a [s_a \, . \, q_a]\}, \qquad (10^i.)$$

wo unter dem Integralzeichen für E, s_a und q_a die zur Zeit t nach Anfang der entsprechenden Bewegung wirklich eingetretenen Werthe zu nehmen sind. Dies ist die frühere Darstellung der Function Φ. Und dass dieser Werth von Φ, für den wirklich zurückgelegten Weg des Systems berechnet, der Minimalbedingung genügen müsse, ergiebt die Differentialgleichung (10^d.). Wenn wir nämlich den Weg des Systems aus der durch den Index 0 bezeichneten Lage in die mit 2

bezeichnete durch eine mittlere variirbare Lage, die wir mit 1 bezeichnen, getheilt denken, so ist nach (10^{e}.):

$$\Phi_{0,2} = \Phi_{0,1} + \Phi_{1,2}.$$

Wenn wir nun die Coordinaten der mittleren Lage variiren, so wird nach (10^{d}.):

$$\delta\Phi_{0,1} = -\delta\Phi_{1,2} = -\sum_{a}[s_a . \delta p_a],$$

folglich:

$$\delta\Phi_{0,2} = 0.$$

Dies lässt sich, wie leicht zu sehen, auf beliebige Zertheilung
217 des Weges in beliebig viele Stücke übertragen, und es ergiebt sich daraus, dass das Integral $\Phi_{0.2}$ nicht variirt, wenn irgend welche kleine Aenderungen der Zwischenlagen vorgenommen werden.

Der Minimalsatz hängt an der Erfüllung der Differentialgleichung (10^{d}.), wie diese an jenem, für die erweiterte Form des H ebenso gut, wie für die ursprüngliche engere, von welcher Lagrange und Hamilton ausgegangen sind.

Die in diesem Paragraphen besprochenen Bedingungen, welche zwischen den in dem Differentiale (10^{d}.) vorkommenden Grössen bestehen, reduciren sich auf eine Gleichung, die E als Function der p_a und s_a giebt, wenn man C. G. J. Jacobis[1]) Umformung benutzt.

§ 6.

Reciprocität der rechtläufigen und rückläufigen Bewegung.

Umkehrbar nenne ich die Bewegung des Systems, wenn die Reihe der Lagen, die es bei rechtläufiger Bewegung durchgemacht hat, auch rückwärts durchlaufen werden kann ohne Eingriff anderer Kräfte und mit denselben Zwischenzeiten für jedes Paar gleicher Lagen. Die Umkehr ist möglich, wenn der Werth des kinetischen Potentials durch Wechsel des Vorzeichens aller q_a nicht geändert wird. Kommen aber darin Producte und Potenzen der q_a von ungeradzahligem Grade vor,

---

[1]) Jacobi l. c. XX. Vorlesung.

wie es z. B. bei der Einmischung verborgener Bewegungen (§ 1.) geschieht, so ist die Bewegung umkehrbar, nur wenn es mechanisch möglich ist auch einen Theil der Constanten (die Geschwindigkeiten verborgener Bewegung) negativ zu machen, so dass die Grösse H bei gleichzeitiger Negativsetzung dieser Constanten und sämmtlicher q_a ihren Werth nicht ändert. Es ergiebt sich dies leicht aus der Betrachtung der Bewegungsgleichungen (1^c.), wenn man berücksichtigt, dass auch das dt entgegengesetztes Vorzeichen bei der Umkehr annehmen muss.

Gesetz der Reciprocität.

In meinen akustischen Untersuchungen[1]) habe ich ein Gesetz der Reciprocität nachgewiesen, welches ich in meinen Vorlesungen leicht auf kleine Schwingungen eines beliebigen, um eine stabile Gleichgewichtslage oscillirenden mechanischen 218
Systems auszudehnen pflegte. Es ist aber noch allgemeiner und gilt für jedes bewegte System, welches dem Gesetze der kleinsten Wirkung unterworfen ist und umkehrbare Bewegungen hat.

Die ursprüngliche Bewegung A werde abgeändert dadurch, dass man zur Zeit t_0 sämmtliche Anfangslagen ungeändert lässt, aber eines der Bewegungsmomente $\mathfrak{s}_1$ um $d\mathfrak{s}_1$ vermehrt. Dadurch möge die Coordinate p_2 zur Zeit t_1 um dp_2 wachsen. Wenn man dann in der umgekehrten Bewegung, während sie durch die Werthe p_a der Coordinaten hindurchgeht, das Bewegungsmoment s_2 um ebensoviel ändert, wie vorher $\mathfrak{s}_1$, so wird nach der Zeit $t = t_1 - t_0$ die Coordinate $\mathfrak{p}_1$ um ebenso viel geändert sein, wie vorher p_2.

Wir haben, da alle dt und $d\mathfrak{p}_a = 0$ sein sollen:

$$d\mathfrak{s}_a = \sum_b \left[\frac{\partial \mathfrak{s}_a}{\partial p_b} \cdot dp_b \right]. \tag{11.}$$

Von diesen soll nur das $d\mathfrak{s}_1$ von Null verschieden sein. Wir wollen zur kürzeren Bezeichnung schreiben:

$$\sigma_{a,b} = \frac{\partial \mathfrak{s}_a}{\partial p_b} = - \frac{\partial s_b}{\partial p_a}. \tag{11^a.}$$

[1]) Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. Borchardt-Crelle, Journ. f. d. Mathem. Bd. 57, S. 27—30. Abgedruckt in Bd. I, S. 332—335 dieser Sammlung.

Die Grössen $\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ sind nach (10^b.) dieselben, wie die $\sigma_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$. Mit $D(\sigma)$ bezeichnen wir die Determinante der Grössen $\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$. Wenn diese nicht identisch gleich Null ist, haben wir nach Gleichungen (11.) unter der gemachten Einschränkung:

$$dp_2 = -\frac{\partial \log D(\sigma)}{\partial \sigma_{1,2}} \cdot d\mathfrak{s}_1. \qquad (11^b.)$$

Wenn wir dagegegen verlangen, dass alle $dp_\mathfrak{a} = 0$, und ebenso mit Ausnahme des ds_2 alle $ds_\mathfrak{a} = 0$, so erhalten wir mit Berücksichtigung von (11^a.) für die rechtläufige Bewegung die entsprechende Gleichung:

$$d\mathfrak{p}_1 = \frac{\partial \log D(-\sigma)}{\partial(-\sigma_{1,2})} \cdot ds_2.$$

Für die rückläufige Bewegung kehren sich die Vorzeichen der Bewegungsmomente und also auch der $\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ um; für diese wird also:

$$d\mathfrak{p}_1 = \frac{\partial \log D(\sigma)}{\partial \sigma_{1,2}} \cdot ds_2. \qquad (11^c.)$$

Aus der Verbindung der Gleichungen (11^b.) und (11^c.) folgt:

$$dp_2 : d\mathfrak{s}_1 = d\mathfrak{p}_1 : ds_2,$$

wodurch das oben ausgesprochene Gesetz erwiesen ist.

Was den *Ausnahmefall* betrifft, wo die Determinante $D(\sigma)$ identisch gleich Null ist, so würden in diesem Falle die $dp_\mathfrak{b}$
219 nicht nothwendig gleich Null sein, wenn auch alle $d\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$ ohne Ausnahme gleich Null wären. Da nun die Bewegung des Systems vollständig bestimmt sein müsste, und somit auch die Werthe der $p_\mathfrak{a}$ nach Ablauf der Zeit t unzweideutig bestimmt wären, wenn zu Anfang der Zeit t die Anfangslagen $\mathfrak{p}_\mathfrak{a}$ und Anfangsgeschwindigkeiten gegeben wären: so würde dieser Ausnahmefall nur eintreten können, wenn die $\mathfrak{q}_\mathfrak{a}$ durch die Werthe der $\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$ nicht vollständig bestimmt sind, was wir durch die Schlussbemerkungen von § 1 ausgeschlossen haben. Es ist also nicht nöthig diesen Ausnahmefall in Betracht zu ziehen.

Die hier vorausgesetzten plötzlichen Aenderungen in dem Werthe der $\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$ und $s_\mathfrak{a}$, bei denen die Coordinaten selbst keine Aenderungen ihrer Werthe erleiden sollen, wären mechanisch hervorzubringen, dadurch dass man Kräfte $P_\mathfrak{a}$ während sehr

kurzer Zeit, aber entsprechend kräftig einwirken liesse. Dabei können die verschiedenen ansteigenden Grade der Geschwindigkeit durchlaufen werden, ohne dass auch die grösste erreichte Geschwindigkeit Zeit genug hätte die Lage merklich zu ändern. Für eine solche Annahme folgt aus Gleichung (1.):

$$-\int P_a \,.\, dt = s_1 - s_0.$$

Da P_a in der dort gebrauchten Bezeichnungsweise die von dem bewegten System nach aussen geübte Kraft bezeichnet, so ist $(-P_a)$ die entgegenstehende äussere Kraft, welche zur Hervorbringung der verlangten Bewegungsänderung erforderlich ist.

Wir wollen eine solche Krafteinwirkung nach dem Vorgange von Sir W. Thomson als *Stoss in der Richtung der Coordinate* p_a bezeichnen. Dabei ist zu bemerken, dass im Allgemeinen die Kräfte P_a Aggregate von Kaftcomponenten sind, die auf verschiedene Theile des Systems einwirken, und nur so vertheilt sind, dass das Aggregat von Kräften P_a bei keiner Veränderung der übrigen Coordinaten Arbeit verrichtet, ausser bei einer Aenderung von p_a. Da wir ferner eine rechtläufige und eine rückläufige Bewegung zu unterscheiden haben, so wird es zweckmässig sein für die rechtläufige Bewegung solche Werthe der $d\mathfrak{s}_a$, welche das rechtläufige Moment $\mathfrak{s}_a$ vergrössern, und Verschiebungen dp_a, welche den Abstand $(p_a - \mathfrak{p}_a)$ vergrössern, als positiv zu betrachten, dagegen für die rückläufige Bewegung auch negative Werthe der ds_a, welche das rückläufige Moment $(-s_a)$ vergrössern, und negative Verschiebungen $(-d\mathfrak{p}_a)$, welche den Abstand $(\mathfrak{p}_a - p_a)$ vergrössern, als gleichwerthig den positiven Aenderungen $d\mathfrak{s}_a$ und dp_a bei der recht- 220
läufigen Bewegung zu behandeln.

Dann lässt sich das Reciprocitätsgesetz so aussprechen:

Wenn ein Stoss, der nur das Moment $\mathfrak{s}_a$ *in der Anfangslage der rechtläufigen Bewegung um* $d\mathfrak{s}_a$ *vergrössert, nach der Zeit t die Coordinate der Endlage* p_b *um* dp_b *vergrössert hat, so wird ein gleichwerthiger rückläufiger Stoss, der das rückläufige Moment* $(-s_b)$ *in der früheren Endlage um gleich viel vergrössert, nach der Zeit t die gleichwerthige rückläufige Aenderung der Coordinate* $\mathfrak{p}_a$ *hervorbringen.*

§ 7.

Die Bewegungsmomente statt der Geschwindigkeiten als unabhängige Variable eingeführt.

Die Differentialgleichung (10^d.) giebt mannigfache Gelegenheit zur Transformation der Werthe durch Wahl anderer unabhängiger Variablen, welche schon von Hamilton[1]) theilweis benutzt sind. Da er aber dabei vorausgesetzt hat, dass die lebendige Kraft eine homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten sei, so erlaube ich mir noch hier für die allgemeinere Form des Problems diejenige dieser Umformungen durchzuführen, bei welcher die Mitwirkung äusserer veränderlicher Kräfte nicht ausgeschlossen zu werden braucht. Diese wird gewonnen dadurch, dass man die Geschwindigkeiten q_a im Werthe von H, beziehlich E durch die Bewegungsmomente s_a ersetzt.

Das kinetische Potential H hatten wir als Function der p_a und q_a betrachtet. Demnach ist:

$$dH = \Sigma\left[\frac{\partial H}{\partial p_a}\cdot dp_a + \frac{\partial H}{\partial q_a}\cdot dq_a\right]. \qquad (12.)$$

Wir hatten bezeichnet:

$$-\frac{\partial H}{\partial q_a} = s_a.$$

Daraus folgt:

$$dE = d[H + \sum_a (s_a . q_a)] = \sum_a\left[\frac{\partial H}{\partial p_a}\cdot dp_a + q_a . ds_a\right]. \qquad (12^a.)$$

Wenn die Determinante der Grössen $\partial s_a / \partial q_b$ nicht gleich Null ist, können wir die p_a und s_a als Variable statt der p_a und
221 q_a einführen, und es ergiebt sich aus (12^a.):

$$\frac{\partial H}{\partial p_a} = \frac{\partial E}{\partial p_a},$$

$$q_a = \frac{dp_a}{dt} = \frac{\partial E}{\partial s_a}.$$

Hierin ist H für die partiellen Differentiationen als Function

[1]) Philosoph. Transact. 1835. P. I, p. 98 bis 100. — S. auch Jacobi l. c. Vorl. XIX.

der p_a und q_a, E aber als Function der p_a und s_a vorausgesetzt.

Daraus ergiebt sich der in (1^c.) gegebene Werth der Kraft:

$$\left.\begin{aligned} P_a &= -\frac{\partial E}{\partial p_a} - \frac{ds_a}{dt}, \\ \frac{dp_a}{dt} &= \frac{\partial E}{\partial s_a}, \end{aligned}\right\} \qquad (12^b.)$$

$$H = E - \sum_a \left[s_a \cdot \frac{\partial E}{\partial s_a} \right]. \qquad (12^c.)$$

Das entsprechende Variationsproblem erhält etwas andere Form als bei Hamilton:

$$\Psi = \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \left\{ E + \sum_a \left[p_a \left(P_a + \frac{ds_a}{dt} \right) \right] \right\}. \qquad (12^d.)$$

Hierin werde P_a als Function der Zeit allein angesehen, E als Function der p_a und s_a. Man variire die p_a und s_a unabhängig von einander, und verlange, dass an den Grenzen der Zeit die $\delta s_a = 0$ seien. Dann giebt ohne andere Hülfsgleichungen die Bedingung:

$$\delta \Psi = 0$$

die beiden Systeme der Bewegungsgleichungen (12^b.).

Bei dieser Darstellungsweise brauchen wir allerdings die kinetische Energie gar nicht zu kennen, aber wir müssen die Grössen s_a kennen, die wir aus den q_a für die allgemeinere Form des E nur mittels des H herleiten können.

Die entsprechende Form der Differentialgleichung (10^d.) für den Fall, dass die P gleich Null sind, ergiebt sich, wenn wir zu jener Gleichung:

$$d\Phi = E \,.\, dt - \Sigma(s_a \,.\, dp_a) + \Sigma(\mathfrak{s}_a \,.\, d\mathfrak{p}_a) \qquad (10^d.)$$

beiderseits addiren:

$$d\{\Sigma(s_a \,.\, p_a) - \Sigma(\mathfrak{s}_a \,.\, \mathfrak{p}_a)\}.$$

Dies giebt:

$$\left.\begin{aligned} & d\{\Phi + \sum_a [s_a \,.\, p_a] - \sum_a [\mathfrak{s}_a \,.\, \mathfrak{p}_a]\} \\ & \quad = d\Psi = E \,.\, dt + \sum_a [p_a \,.\, ds_a] - \sum_a [\mathfrak{p}_a \,.\, d\mathfrak{s}_a]. \end{aligned}\right\} \qquad (12^e.)$$

Sind also E, die $p_\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}_\mathfrak{a}$ als Functionen der Zeit t und der
222 $s_\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$ dargestellt, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p_\mathfrak{a}}{\partial s_\mathfrak{b}} &= \frac{\partial p_\mathfrak{b}}{\partial s_\mathfrak{a}}, \\ \frac{\partial \mathfrak{p}_\mathfrak{a}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} &= \frac{\partial \mathfrak{p}_\mathfrak{b}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{a}}, \\ \frac{\partial p_\mathfrak{a}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} &= -\frac{\partial \mathfrak{p}_\mathfrak{b}}{\partial s_\mathfrak{a}}, \\ \frac{\partial E}{\partial s_\mathfrak{a}} &= \frac{\partial p_\mathfrak{a}}{\partial t}, \\ \frac{\partial E}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{a}} &= -\frac{\partial \mathfrak{p}_\mathfrak{a}}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \qquad (12^f.)$$

Das mittlere von diesen Gleichungssystemen lässt sich wieder wie (10^b.) verwenden, um *ein zweites Reciprocitätsgesetz* zu bilden, wobei zu Anfang der Zeit t eine Verschiebung $\delta\mathfrak{p}_1$ ausgeführt wird, während alle andern $\mathfrak{p}_\mathfrak{a}$ und sämmtliche $\mathfrak{s}_\mathfrak{a}$ unverändert bleiben; nach Ablauf der Zeit t sei dadurch s_2 geändert um δs_2. Dann werde bei der rückgängigen Bewegung nur p_2 geändert um δp_2, und es ändere sich nach Ablauf der Zeit t das Moment $\mathfrak{s}_1$ um $\delta\mathfrak{s}_1$. Dann ist wieder:

$$\delta\mathfrak{p}_1 : \delta s_2 = \delta p_2 : \delta\mathfrak{s}_1 \qquad (12^g.)$$

vorausgesetzt, dass die Determinante der Gleichungen:

$$\delta p_\mathfrak{a} = \sum_\mathfrak{b} \left[\frac{\partial p_\mathfrak{a}}{\partial \mathfrak{s}_\mathfrak{b}} \cdot d\mathfrak{s}_\mathfrak{b} \right]$$

nicht gleich Null sei. Wenn sie es ist, sind die beiden Lagen reciproke Foci der Bewegung.

Berlin, April 1886.

CXXI.

Zur Geschichte des Princips der kleinsten Action.

Aus den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
Sitzung vom 10. März 1887. S. 225—236. 1887.

Ich habe in der öffentlichen Sitzung der Akademie am 27. Januar d. J. über das oben genannte Thema eine Vorlesung gehalten. Erst nachdem dieselbe gehalten war, lernte ich eine 225
als Broschüre veröffentlichte Abhandlung von Hrn. Adolph Mayer[1]) kennen, worin die Geschichte des Princips der kleinsten Action, soweit Maupertuis, Euler und Samuel König daran betheiligt sind, so ausführlich und gründlich erörtert ist, dass es mir unnöthig schien, darauf in einer weiteren Publication zurückzukommen. Ich würde vielleicht die Motive der darin handelnden Personen zum Theil anders beurtheilen; das fällt aber doch nur in das Bereich historischer Hypothesen.

Dagegen lasse ich hier zwei dahin gehörige Erörterungen folgen, die eine über den Begriff der Action bei Leibniz, worüber sich bei A. Mayer nichts findet, und die zweite das Verhältniss des Princips der kleinsten Action zu Hamilton's Princip betreffend, worin mein Urtheil einigermassen von dem des genannten Autors[2]) abweicht.

---

[1]) Geschichte des Princips der kleinsten Action. Akademische Antrittsvorlesung von Dr. Adolph Mayer. Leipzig 1877.

[2]) Die beiden allgemeinen Sätze der Variationsrechnung, welche den beiden Formen des Princips der kleinsten Action in der Dynamik entsprechen. Bericht der Königlich Sächsischen Gesellschaft d r Wissenschaften 14. November 1886.

Der Begriff der Action bei Leibniz.

Der Begriff der Action ist von Leibniz gebildet und definirt worden. Auf ihn weist auch Maupertius beim Gebrauche dieses Terminus zurück.[1]) Die Erklärung des genannten Begriffs findet sich in der auf einer Reise durch Italien 1689 ausgearbeiteten, aber unvollendet gebliebenen Abhandlung über Dynamik, die erst 1860 nach dem in der Königlichen Bibliothek zu Hannover aufbewahrten Manuscripte von C. J. Gerhardt[2]) herausgegeben wurde. Leibniz nennt daselbst in der Sectio III Cap. 1 Defi-
226 nitio 3. p. 346 die genannte Grösse die Actio formalis und erläutert dies so: „quia .... motui est essentialis; secus ac sunt alii effectus, aliaeve actiones, ex impedimento quodam peculiari nascentes, ut ex vi gravitatis corpora versus centrum terrae prementis, aut ex resistentia medii vel contactus, aut ex elastro aliquo vincendo et similibus materiae concretae accidentibus. Si quis autem vocabulum metaphysicum aegrius fert in re Mathematica, cogitet non aliud commodius suppetiisse, et assignata definitione omnem ambiguitatem esse sublatam.“ — Es ist hiernach klar, dass er die durch das Beharrungsvermögen der bewegten Masse fortgesetzt neu eintretenden Lagenveränderungen, als die aus dem Begriffe der Masse selbst folgende Action, mit dem Terminus „formalis“ bezeichnet, und dass der rechnungsmässige Werth der Action, den er schliesslich als gleich dem Producte aus der Masse, der Weglänge und der (hier noch als constant betrachteten) Geschwindigkeit setzt, ein quantitatives Maass für die Leistung des Beharrungsvermögens darstellen soll. Da die Weglänge durch das Product aus der Geschwindigkeit und der Zeit dargestellt werden kann, so ist die Grösse der Action, wie schon Leibniz gethan, auch gleich dem Product aus der lebendigen Kraft und der Zeit zu setzen. In dem weiteren Verlauf des citirten Paragraphen wird nun die Wahl dieses Maasses sorgfältig, man kann fast sagen weitläufig discutirt. Dass das genannte Maass unter übrigens gleichen Umständen der Masse, dass es bei gleicher Masse und Geschwindigkeit dem durchlaufenen Raum proportional zu wählen sei, ist leicht zu

---

1) Histoire de l'Acad. Roy. de Berlin 1752 p. 295.

2) Leibniz' Mathematische Schriften Abth. II. Bd. II. S. 345—366.

rechtfertigen. Die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit aber begründet Leibniz durch eine, oder eigentlich zwei neue Voraussetzungen, von denen er aber nur die erste als Axiom deutlich bezeichnet, nämlich: „Es ist eine grössere Action, wenn dieselbe Masse durch dieselbe Weglänge in kürzerer Zeit geführt wird". Die zweite Voraussetzung bezeichnet er allerdings als Propositio quarta. Wir können sie aber nicht als bewiesen ansehen. Es kann höchstens als eine plausible Hypothese gelten, dass bei vier Bewegungen, wo immer die gleiche Masse den gleichen Weg zurücklegt, die Actionswerthe eine Proportion bilden, wenn die gebrauchten Zeiten eine solche bilden. Von diesem Satze aus kommt der Autor dann auf einem ziemlich umständlichen Wege zu den angegebenen Ausdrücken für den Werth der Action.

Man erkennt hier deutlich, dass es ihm darum zu thun ist, diesen bestimmten Werth der Action als den nothwendig richtigen nachzuweisen und die Lücke in seinen Schlüssen, die nur durch Thatsachen auszufüllen wäre, durch wahrscheinliche Annahmen möglichst zu decken. Er muss ein Ziel vor Augen gehabt haben, für welches er gerade diesen Werth der Action und deren Begriff brauchte. Dieses Ziel aber kommt nicht zum 227
Vorschein, da die genannte Abhandlung über die Dynamik nicht vollendet worden ist. Er schreibt darüber an Joh. Bernoulli,[1]) dass er das in Italien ausgearbeitete Büchlein in Florenz einem befreundeten ausgezeichneten Mathematiker (nämlich dem Freiherrn von Bodenhausen), der ihn darum bat, zurückgelassen habe um es herauszugeben; „et ille redegit in mundum omnia studiose; sed cum finis libro adhuc deesset, quem summittere in me receperam, per me stetit hactenus, quominus editio sequeretur; nondum enim colophonem adjeci, partim quod multa nova subinde nascerentur, quae mererentur addi, partim quod his, quos videbam mea non ut par erat accepisse, nollem velut obtrudere pulchras veritates". Das Originalmanuscript trägt noch Randbemerkungen, die auf die Absicht einer Revision hindeuten. Veröffentlicht wurde nur ein kürzerer Auszug in den Actis

---

[1]) Leibniz'ens Mathematische Schriften, von Gerhardt. Abth. I. Bd. III. S. 259. Abth. II. Bd. II. S. 15.

Eruditorum 1695, dessen zweiter Theil aber ebenfalls unveröffentlicht liegen blieb. Darin kommen Erörterungen vor über den Begriff der Action, die mit der oben von mir gegebenen Interpretation durchaus übereinstimmen, aber nichts weiter über das Maass der Action.

Was kann nun Leibniz für einen Zweck dabei gehabt haben, dass er diesen Begriff bildete? Wie grossen Werth er darauf legte, zeigt die Ausführlichkeit seiner Erörterung und Begründung desselben. In dem uns vorliegenden Text liegt der einzige Gebrauch, den er davon macht, darin, dass er einen der Wege um den Werth des Arbeitsaequivalents (Potentia) der bewegten Körper zu bestimmen, darauf gründet.[1]) Dazu schiebt er freilich ohne weitere Rechtfertigung die Voraussetzung ein, dass bei verschiedenen Geschwindigkeiten die Potentia der in gleichen Zeiten geleisteten Actio formalis proportional sein müsse. Er selbst bezeichnet diese Herleitung als gegründet auf die Verhältnisse der reinen Bewegung nach Abstraction von allem wahrnehmbaren Stoffe, und erklärt, dass sie ihm als die vorzüglichste erschiene, wenn sie auch vielleicht nicht nach dem Geschmacke Aller sein würde. Seine drei anderen Beweise sind auf beobachtete Thatsachen gegründet, und erscheinen uns allerdings nach unserer jetzigen Denkweise als die allein brauchbaren.

Aber aus dieser Verwendung des Begriffs der Action wird doch deutlich, was ihn bewogen hat die Fortsetzung der eingeleiteten Bewegung unter dem Einfluss des Beharrungsvermögens nicht als einen nur passiven Zustand, als Inertia, son-
228 dern als Actio aufzufassen; denn sie ist Trägerin eines Arbeitsaequivalents, einer Potentia, deren Unzerstörbarkeit er vermuthet, und deren Übergang in andere aequivalente Arbeitsformen er schon kennt.

Wenn er aber mit dem Begriffe der Action nichts weiter beabsichtigt hat, als den Werth der actuellen Energie zu finden, so muss man dies einen seltsamen Umweg nennen, der kaum

---

[1]) Dynamica P. I. Specimen praeliminare. Demonstratio quarta (S. 291) und Sect. III Cap. 2 (S. 359).

geeignet war, auf seine Gegner, namentlich die Anhänger von Descartes, Eindruck zu machen.

Die einzige Verwendung, welche der Begriff der Action in der späteren Entwickelung unserer Dynamik gefunden hat, ist die im Principe der kleinsten Action, und dieses bekommt in der That einen anschaulicheren Sinn, wenn wir Leibniz'ens Begriff der Action hineintragen.

Nehmen wir dasselbe in der von Lagrange vervollständigten Form. Es wird vorausgesetzt, der unveränderliche Werth der gesammten Energie E sei gegeben; dadurch ist in der augenblicklichen Lage des Systems also auch der Werth der lebendigen Kraft L bestimmt, da die potentielle Energie F nur von der Lage abhängt, und

$$L = E - F.$$

Dadurch ist nun auch bestimmt, welches der Gesammtwerth der Leistungen des Beharrungsvermögens im nächstfolgenden Zeitelemente dt sein wird, nämlich $L \cdot dt$. Welche Wege aber die einzelnen schweren Massen des Körpersystems, und in welchen Richtungen sie diese einschlagen werden, wie sich also der gegebene Betrag der Action auf die einzelnen Massen und Richtungen vertheilt, das hängt für das Zeitelement dt ganz allein vom Beharrungsvermögen ab bis auf verschwindende Grössen zweiten Grades. Und hier tritt nun die Regel ein: die Fortbewegung geschieht so, dass die am Ende von dt eintretenden Lagen von den vor dem Anfang von dt zunächst zurückliegenden nicht durch eine kleinere Leistung des Beharrungsvermögens hätten erreicht werden können, als die wirklich aufgebrauchte ist. Für kleine Abschnitte des Weges ist bekanntlich die Action immer ein absolutes Minimum.[1]) Indem man das Princip also auf hinreichend kurze Wegabschnitte anwendet, wird man in seiner Formulirung von den Verwickelungen frei, welche die Maximo-Minima der Action für längere Wege herbeiführen..

Dieser Regel entsprechend ist auch der deutsche Namen der Trägheit für das Beharrungsvermögen ganz passend. Die

---

[1]) S. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von Clebsch. Vorlesung VI, S. 45—49.

Trägheit, durch das Gesetz der Energie zur Action gezwungen, 229 vermeidet wenigstens überflüssige Action; aber ihre Voraussicht erstreckt sich nur auf kürzeste Zeiträume.

In Leibniz'ens Abhandlung über Dynamik und auch in seiner darüber mit Joh. Bernoulli geführten Correspondenz, wo er (a. a. O.) seine Bestimmung des Werthes der Action vertheidigt, ist keine bestimmte Andeutung über das genannte Princip enthalten, ausser dass er multa nova, quae mererentur addi, unbestimmt erwähnt. Indessen hat ihm offenbar die Entdeckung des Princips der kleinsten Wirkung gleichsam vor den Füssen gelegen, und ich gestehe, dass mir bei dieser Lage der Dinge die Ächtheit des von Samuel Koenig 1751 veröffentlichten Brieffragments,[1]) welches von Leibniz herrühren und an den Baseler Mathematiker Hermann gerichtet sein sollte, sehr wahrscheinlich erscheint. Darin heisst es:

„L'Action n'est point ce que vous pensés, la consideration du tems y entre; elle est comme le produit de la masse par le tems, ou du tems par la force vive. J'ai remarqué que dans les modifications des mouvemens elle devient ordinairement un Maximum ou un Minimum. On en peut deduire plusieurs propositions de grande consequence; elle pourroit servir à determiner les courbes que decrivent les corps attirés à un ou plusieurs centres. Je voulois traiter de ces choses entr' autres dans la seconde partie de ma Dynamique, que j'ai supprimée; le mauvais accueil, que le prejugé a fait à la première, m'ayant degouté."

Der Schluss stimmt mit dem Schluss des oben citirten lateinischen Briefes an Joh. Bernoulli durchaus überein.[2]) Aber auch, wenn der Brief ächt ist, zeigt der Ausdruck, die Action sei „gewöhnlich" ein Maximum oder Minimum, an, dass er die Bedingungen der Variation und die Grenzen für die Gültigkeit des Satzes nicht genau gekannt hat; abgesehen davon, dass die Action niemals ein absolutes Maximum werden kann, nur ein Maximo-Minimum.

[1]) Acta Eruditorum. 1751, Martii P. II. p. 176.

[2]) Dieser Briefwechsel ist nach der Angabe von C. J. Gerhardt schon 1745 herausgegeben; die Übereinstimmung beweist also nichts für die Ächtheit des 1751 veröffentlichten Fragments.

Übrigens würde gerade dieser Umstand, das Schwanken zwischen Maximum und Minimum sehr geeignet gewesen sein, ihn in der Veröffentlichung zögern zu lassen. Wäre die Action ein sicheres Minimum gewesen, wie Maupertuis später glaubte, so würde das Princip wohl auch in Leibniz'ens Augen viel wichtiger erschienen sein. So könnte er es noch für unfertig gehalten haben.

Wenn wir diesen Betrachtungen von Leibniz über die Bedeutung der Action weiter folgen, so sagt das Princip der kleinsten Action bei Voraussetzung hinreichend kurzer Wegstücke 230
aus, dass das bewegte Körpersystem, wenn es seine Bewegung von der Lage a aus über die Lage b fortsetzt und demnächst die Lage c erreicht, letztere von a aus auf keinem anderen Wege als dem über b eingeschlagenen mit so geringer Action erreicht werden konnte. Dagegen hätten alle anderen Lagen, die von b aus mit dem gleichen Aufwande von Action erreicht werden konnten, und die nicht die normalen Fortsetzungen des früheren Weges gewesen wären, auch mit geringerer Action erreicht werden können. Der Erfolg der wirklichen Bewegung ist also der weitreichendste, der mit dem gegebenen Betrage von Action erreicht werden konnte.

Hierin liegt die Ähnlichkeit mit dem Verhalten der geodätischen (oder wie ich sie bei einer früheren Gelegenheit zu nennen vorgeschlagen habe, geradesten) Linien auf einer krummen Oberfläche. Jedes Stück derselben, was unterhalb einer gewissen Länge bleibt, ist der kürzeste Weg zwischen seinen Endpunkten, und bei einer Fortsetzung über den Endpunkt hinaus um eine kleine Länge ds ist der zweite Endpunkt von ds entfernter von jedem kurz vor dem ersten Endpunkt liegenden Punkte der Linie, als jeder andere Punkt, der in dem gleichen Abstande ds von deren Endpunkte liegt. Dem entsprechend tritt auch in Jacobi's analytischer Form die Analogie des Problems mit dem der isoperimetrischen Curven deutlich heraus.

In denjenigen Fällen, wo die Abweichung der bewegten Punkte von der geraden Linie nur von festen Verbindungen herrührt, denen dieselben unterliegen, und keine Bewegungskräfte auf dieselben einwirken, also wo auch die lebendige Kraft

constanten Werth L hat, reducirt sich der Werth der Action auf das Product $L \cdot t$. Nur der letztere Factor ist noch veränderlich, wenn der Weg variirt wird. Daher reducirt sich das Princip der kleinsten Action unter dieser Bedingung auf die Forderung, die Fortsetzung der Bewegung solle so geschehen, dass die zunächst zu erreichenden Lagen von den zunächst vorausgehenden bei dem vorgeschriebenen Werthe von L nicht hätten *in kürzerer Zeit* erreicht werden können.

Wenn aber Kräfte einwirken und daher die lebendige Kraft veränderlich ist, so weichen die bewegten Körper von ihrem Wege nach der Seite hin ab, wo die Kräfte sie hinziehen, die potentielle Energie also abnimmt, und die lebendige Kraft zunimmt. Ihr wirklicher Weg erfordert also mehr Zeit, als der bei entsprechender lebendiger Kraft zurückzulegende schnellste Weg zwischen den Endpunkten des Wegstücks erfordert hätte, ist aber mit geringerer lebendiger Kraft zurückgelegt worden, als wenn das Körpersystem schon von Anfang an sich der Seite grösserer lebendiger Kraft zugeneigt hätte. Das Product aus
231 lebendiger Kraft und Zeit wird also auf einem Wege von etwas grösserer Zeit und kleinerer lebendiger Kraft, wie er im Gleichgewicht der Centrifugalkraft und der seitlich gerichteten Bewegungskraft ausgeführt wird, immer noch kleiner sein können, als auf dem Wege kürzester Zeit.

Dadurch lässt sich wohl einsehen, dass das Princip der kleinsten Action einen solchen Einfluss dem Sinne nach richtig anzeigt; aber nicht ohne Rechnung lässt sich begründen, dass dies auch in Bezug auf dessen Grösse der Fall ist.

Verhältniss von Hamilton's allgemeinem Princip der Mechanik zu dem der kleinsten Action.

Das Princip der kleinsten Action kann in zweierlei Weise durchgeführt werden, je nach der Bedingung, welche man für die Variation festsetzt. In allen Fällen verlangt man, dass der Gesammtbetrag der Action ein Grenzwerth sei für den Übergang aus einer gegebenen Anfangslage in eine gegebene Endlage. Die Variation wird bewirkt dadurch, dass man die Coordi-

naten p_a der einzelnen während des Übergangs eintretenden Lagen des Körpersystems variirt, gleichzeitig aber auch die Zeit, und zwar letztere so, dass der vorhandene Betrag der Energie des Systems nicht geändert wird. Da nämlich die Energie ausser der potentiellen Energie F, welche nur von der Lage abhängig ist, auch noch die lebendige Kraft enthält, die von den Geschwindigkeiten abhängig ist, und die letzteren durch Variirung der Wegstrecken, die im Zeitelement dt zurückgelegt werden, variirt werden, so kann man sämmtliche Geschwindigkeiten durch Variation des Werthes von dt, der zur betrachteten Wegstrecke gehört, verändern, und dabei die Änderung von dt so einrichten, dass der Betrag der Energie bei der Variation nicht geändert werde.

Diese Forderung aber, dass der Betrag der Energie nicht variirt werde, kann in zweierlei Weise gestellt werden.

A. Es wird verlangt, dass nur der zur Zeit in der unvariirten Bewegung bestehende Betrag der Energie nicht geändert werde, ohne die Grösse dieses Betrages vorzuschreiben, welcher möglicher Weise durch Änderung von Umständen, die unabhängig von der Bewegung des Systems ablaufen, sogar im Laufe der normalen Bewegung sich ändern kann. Das ist das von Lagrange und Hamilton behandelte Problem. Beide unterscheiden sich nur durch die Methode der Lösung.

B. Man verlangt, dass der Betrag der Energie einen vor- 232
geschriebenen Werth E

$$E = F + L$$

habe und behalte. In diesem Falle kann man diese Gleichung benutzen, um das dt zu eleminiren. Dies ist das Problem, wie es C. G. J. Jacobi gefasst hat. F muss hierbei von t unabhängig sein.

Lagrange's Verfahren.

Lagrange[1]) giebt die erste vollständige und genaue Darstellung des Princips der kleinsten Action in der Form

[1]) Miscellanea Taurinensia T. II. p. 196—298.

$$\delta \int \sum_{\mathfrak{a}} [m_{\mathfrak{a}} \cdot q_{\mathfrak{a}} \cdot ds_{\mathfrak{a}}] = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

Darin ist $m_{\mathfrak{a}}$ die Masse, $q_{\mathfrak{a}}$ die Tangentialgeschwindigkeit, $ds_{\mathfrak{a}}$ das Element der Weglänge je eines bewegten Punktes. Es ist also

$$ds_{\mathfrak{a}} = q_{\mathfrak{a}} \cdot dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1_a.$$

Die einschränkende Bedingung, dass bei Ausführung der Variation der Werth der Energie nicht verändert werde, hat er in einer Form aufgestellt, in der die Kraftcomponenten noch nicht als Differentialquotienten der Energie ausgedrückt sind, dadurch wird die Darstellung sehr weitläuftig. Bei Einführung der genannten Vereinfachung ist die einzuhaltende Bedingung:

$$\sum [m_{\mathfrak{a}} \cdot q_{\mathfrak{a}} \cdot \delta q_{\mathfrak{a}}] + \delta F = 0 \ldots\ldots\ldots \quad 1_b.$$

Es wird keine der Variablen als unabhängig und unvariirbar erklärt, also namentlich auch nicht die in den $q_{\mathfrak{a}}$ versteckt vorkommende Zeit. Um dieses Verhältniss deutlich zu bezeichnen, ist es rathsam die sämmtlichen Grössen $s_{\mathfrak{a}}$, $q_{\mathfrak{a}}$ und t als abhängig von einer zunächst unbestimmt bleibenden unabhängigen Variablen, die wir mit ϑ bezeichnen wollen, darzustellen. F kann als Function der $p_{\mathfrak{a}}$ und eventuell auch explicite des ϑ angesehen werden.

Lagrange[1]) leitet zunächst aus Gleichung (1) ab:

$$\sum_{\mathfrak{a}} \int [m_{\mathfrak{a}} \cdot \delta q_{\mathfrak{a}} \cdot ds_{\mathfrak{a}}] + \sum_{\mathfrak{a}} \int [m_{\mathfrak{a}} \cdot q_{\mathfrak{a}} \cdot \delta ds_{\mathfrak{a}}] = 0 \ldots\ldots \quad 1_c$$

und eliminirt nun die Variationen $\delta q_{\mathfrak{a}}$ durch Gleichung (1_b); nämlich

$$\begin{aligned} \sum [m_{\mathfrak{a}} \cdot \delta q_{\mathfrak{a}} \cdot ds_{\mathfrak{a}}] &= \sum \left[m_{\mathfrak{a}} \cdot q_{\mathfrak{a}} \cdot \delta q_{\mathfrak{a}} \cdot \frac{ds_{\mathfrak{a}}}{q_{\mathfrak{a}}} \right] \\ &= \sum [m_{\mathfrak{a}} \cdot q_{\mathfrak{a}} \cdot \delta q_{\mathfrak{a}} \cdot dt] \\ &= - \delta F \cdot dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1_d. \end{aligned}$$

233 Wählen wir zur Bestimmung der Orte beliebige Coordinaten $p_{\mathfrak{a}}$, so wird sich der Werth von F durch diese und durch

[1]) Miscellanea Taurinensia T. II. p. 196, 205.

ϑ ausdrücken lassen. Dagegen der im zweiten Integral von (1_e) vorkommende Werth

$$\Sigma\,[m_a \cdot q_a \cdot \delta ds_a] = \frac{1}{2 \cdot dt}\,\Sigma\delta\,[m_a \cdot ds_a^2].$$

Die Summe $\underset{a}{\Sigma}\,[m_a \cdot ds_a^2]$ lässt sich in bekannter Weise auf eine quadratische Form der dp_a zurückführen:

$$\underset{a}{\Sigma}\,[m_a \cdot ds_a^2] = \underset{b}{\Sigma}\,\underset{c}{\Sigma}\,[\tfrac{1}{2} A_{b,c}\ dp_a\, dp_c] = L \cdot \left(\frac{dt}{d\vartheta}\right)^2 \ldots\ldots 1_e$$

worin die A Functionen der p_a sind. Nach diesen Substitutionen giebt Gleichung (1_d), indem wir die Abhängigkeit von ϑ bezeichnen

$$0 = -\int \frac{dt}{d\vartheta} \cdot \delta F \cdot d\vartheta + \int \frac{1}{2 \cdot \frac{dt}{d\vartheta}} \cdot \delta \sum_b \sum_c \left[A_{b,c} \cdot \frac{dp_b}{d\vartheta} \cdot \frac{dp_c}{d\vartheta} \right] \cdot d\vartheta. \quad 1_f.$$

Werden die Variationen in bekannter Weise ausgeführt, die $d\,(\delta p_c)\,/\,d\vartheta$ durch partielle Integration beseitigt, wobei die δp_c an den Grenzen der Integration gleich Null gesetzt werden, so erhält man die Bedingungen des Grenzwerthes von (1):

$$0 = -\frac{\partial F}{\partial p_a} \cdot \frac{dt}{d\vartheta} + \frac{1}{2 \cdot \frac{dt}{d\vartheta}} \sum_b \sum_c \left[\frac{\partial A_{b,c}}{\partial p_a} \cdot \frac{dp_c}{d\vartheta} \cdot \frac{dp_b}{d\vartheta} \right]$$

$$- \frac{d}{d\vartheta} \cdot \sum_b \left\{ A_{a,b} \cdot \frac{\frac{dp_b}{d\vartheta}}{\frac{dt}{d\vartheta}} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots 1_g$$

Da jedes p_a und auch t nur von ϑ abhängen soll, ist für diese, wie alle anderen Functionen φ, die nur von ϑ abhängen:

$$\frac{\frac{d\varphi}{d\vartheta}}{\frac{dt}{d\vartheta}} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Somit kann (1_g) geschrieben werden:

$$0 = -\frac{\partial F}{\partial p_a} + \frac{\partial L}{\partial p_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_a}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots 1_h$$

welche Gleichung mit den bekannten Bewegungsgleichungen von Lagrange übereinstimmt.

Im F allein würde noch ϑ stecken können, als eine Grösse, von der ursprünglich t abhängen sollte. Da nun aber in (1_h) alle anderen Grössen p_a, q_a als Functionen von t dargestellt sind, und sich aus (1_t), worin t nur ausserhalb des Variationszeichens vorkommt, keine Bedingungsgleichung durch Variation des t
234 ergeben hat, sondern nur so viele Bedingungen, als Grössen p_a existiren, so bleibt die Beziehung von ϑ zu t unbestimmt, d. h. die Gleichungen (1_h) erfüllen die Forderungen des Variationsproblems für eine jede willkürlich gewählte Art der Abhängigkeit des t von ϑ, oder des ϑ von t, wie dies bei den Bewegungsgleichungen in der That ebenfalls der Fall ist. Das F kann also von ϑ oder von t beliebige Abhängigkeit haben; das ändert die Geltung der Gleichungen (1_b) nicht.

Man kann aber das Variationsproblem auch mittels der Methode der unbestimmten Coefficienten behandeln, und dadurch die Variationen δp_a und δt von einander unabhängig machen. Dies führt zu Hamilton's Form.

Indem wir in Gleichung (1) das ds_a durch (1_a) eliminiren, kommen wir zur Forderung:

$$0 = \delta \int L \cdot \frac{dt}{d\vartheta} \cdot d\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2$$

während die Variationen der p_a und des t so ausgeführt werden sollen, dass

$$\delta(\dot{F} + L) = \dot{0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2_a$$

bleibt. Da die letztere Gleichung für jeden Werth von ϑ erfüllt sein soll, muss man den willkürlichen Factor λ, mit welchem man sie multiplicirt, als eine Function von ϑ behandeln, die natürlich nicht der Variation unterworfen ist. So erhalten wir

$$0 = \delta \int \left[\lambda . F + \left(\lambda + \frac{\partial t}{\partial \vartheta} \right) \cdot L \right] \cdot d\vartheta \quad \ldots\ldots \quad 2_b$$

als die zu erfüllende Bedingung. Zu variiren sind die p_a und t; die δp_a sind an den Grenzen des Integrals gleich Null zu setzen, während das δt keiner solchen Bedingung unterworfen ist.

F ist wieder zu behandeln als Function der p_a und des ϑ, und L ist von der in (1_e) gegebenen Form.

a) Variation nach p_a ergiebt die Bedingung

$$0 = \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial p_a} + \left(\lambda + \frac{\partial t}{\partial \vartheta}\right) \cdot \frac{\partial L}{\partial p_a} - \frac{d}{d\vartheta}\left\{\left(\lambda + \frac{\partial t}{\partial \vartheta}\right) \cdot \frac{\partial L}{\partial q_a} \cdot \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial \vartheta}}\right\} \ldots \quad 2_c.$$

b) Variation nach t ergiebt für die Lagen zwischen den Grenzen:

$$0 = -\frac{\partial L}{\partial \vartheta} + \frac{d}{d\vartheta}\left\{\left(\lambda + \frac{dt}{d\vartheta}\right) \cdot \frac{2L}{\frac{dt}{d\vartheta}}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad 2_d$$

An den Grenzen aber

$$0 = L - \left(\lambda + \frac{dt}{d\vartheta}\right) \cdot \frac{2L}{\frac{dt}{d\vartheta}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2_e.$$

Die Gleichung (2_d) ergiebt, dass 235

$$-L + \left(\lambda + \frac{dt}{d\vartheta}\right) \cdot \frac{2L}{\frac{dt}{d\vartheta}} = \text{Const.}$$

Die Gleichung (2_e) stimmt damit überein, indem sie gleichzeitig zeigt, dass die Constante Null sein muss. Da nun L, welches als Factor in beiden Gliedern vorkommt, bei keiner Bewegung Null sein kann, so folgt

$$2\lambda + \frac{dt}{d\vartheta} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2_f.$$

Wenn wir diesen Werth von λ zunächst in die Gleichungen (2_c) einsetzen, erhalten wir mit $\frac{1}{2} \cdot \frac{dt}{d\vartheta}$ dividirend:

$$0 = -\frac{\partial F}{\partial p_a} + \frac{\partial L}{\partial p_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_a}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2_g$$

die bekannte Form der Bewegungsgleichungen wie (1_h). Die Gleichungen $(2_d')$ dagegen und (2_e) werden identisch erfüllt.[1])

[1]) Der wesentliche Inhalt der bis hierher gegebenen Ableitung kommt auch bei Hrn. A. Mayer vor. (Berichte der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1886. 14. Novbr.)

Die in diesen letzteren Gleichungen gleich Null gesetzten Ausdrücke sind aber die Factoren, mit denen das δt in der Variation des Integrals (2_b) zwischen und an den Grenzen desselben multiplicirt ist. Daraus folgt, dass das δt nach der Festsetzung des Werthes von λ in (2_f) ganz willkührlich gewählt werden kann, also t eine beliebig veränderliche Function von ϑ werden kann, ohne dass der Werth des Integrals (2_b) dadurch geändert wird. Damit hört aber auch die Nothwendigkeit auf, t zu variiren; denn wenn t als Function von ϑ irgendwie gewählt ist, kann auch das willkürlich bleibende $\delta t = 0$ gesetzt werden. Dadurch wird der in (2_f) gegebene Werth von λ der Variation entzogen und kann in das Integral (2_b) eingesetzt werden. So erhalten wir Hamilton's Form

$$0 = -\tfrac{1}{2} \cdot \delta \int (F - L) \cdot \frac{dt}{d\vartheta} \cdot d\vartheta$$

oder da t eine willkürliche Function von ϑ, folglich auch gleich ϑ sein kann

$$0 = \delta \int (F - L) \cdot dt \; \ldots\ldots \quad 2_h$$

worin nun auch F eventuell eine Function von t sein würde.

Daraus geht hervor, dass auch Hamilton's hier gefundene Form aus der von Lagrange vervollständigten Fassung des
236 Princips der kleinsten Action hervorgeht, wenn man die Nebenbedingung benutzt, um die Variation der Zeit zu eliminiren. Die Abweichung von Lagrange's Verfahren liegt nur darin, dass diese Elimination, wodurch die ursprüngliche unabhängige Variable ϑ verschwindet, und statt ihrer das t als nicht zu variirende Grösse eintritt, auch in das zu variirende Integral selbst eingeführt wird.

Lagrange's und Hamilton's Form sind also auch durchaus übereinstimmend in den Voraussetzungen über die in das Problem eintretenden Functionen F und L, wie in den daraus zu ziehenden Folgerungen.

Jacobi's Form ergiebt sich, wie er selbst auseinandergesetzt hat, indem man das Zeitelement dt ganz eliminirt mittels der Gleichung:

$$E = F + L,$$

welche aber nur gilt, wenn F von t unabhängig ist. Dafür tritt der Werth des E in das zu variirende Integral der Action ein:

$$A = \int \sqrt{2\,(E - F)} \cdot ds,$$

wo

$$ds^2 = \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{b}} [A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot dp_{\mathfrak{a}} \cdot dp_{\mathfrak{b}}].$$

Will man aber die Abhängigkeit der Grössen von einander vollständig bezeichnen, so muss man die unabhängige Variable ϑ wieder einführen, deren Functionen die $p_{\mathfrak{a}}$ sind.

Die Form von Lagrange ist also die gemeinsame Quelle der beiden anderen Formen, die durch Elimination verschiedener Grössen mittels der Zusatzbedingung entstehen. Hamilton eliminirt δt, wobei auch E und ϑ wegfallen, Jacobi eliminirt (wenn F unabhängig von t) dt und damit t aus dem zu variirenden Integral. Beide Methoden ergeben eine Fassung des Variationsproblems, bei der keine Nebenbedingungen mehr anzufügen sind. Physikalisch ist Jacobi's einschränkende Bedingung für ein vollständig bekanntes und in sich abgeschlossenes Körpersystem stets als gültig anzusehen. Hamilton's Form dagegen erlaubt die Bewegungsgleichungen auch für unvollständig abgeschlossene Systeme durchzuführen, auf welche veränderliche äussere Einflüsse wirken, die von einer Rückwirkung des bewegten Systems unabhängig angesehen werden können. Zu den letzteren gehören auch die von sogenannten festen Centren ausgehenden Kräfte, die übrigens auch in Jacobi's Form aufgenommen werden können.

CXXII.

Versuch, um die Cohäsion von Flüssigkeiten zu zeigen.[1]

Verhandlungen der Berliner Physikal. Gesellschaft. Sitzung vom 4. Febr. 1887. S. 16 bis 18.

---

17 Ich fand die betreffende Methode bei Versuchen, durch welche die untere Grenze der elektromotorischen Kraft, die zur Wasserzersetzung nöthig ist, gefunden werden sollte. Der Apparat ist eine Röhre, der eines Heberbarometers entsprechend. Der längere Schenkel ist etwas länger, als für ein solches nöthig wäre; in ihn war oben als Elektrode ein Platindraht eingeschmolzen. Der kurze Schenkel hatte einen Glashahn, dicht über diesem endete er in eine enge Spitze. Ueber das Quecksilber des langen Schenkels war ursprünglich schwach mit Schwefelsäure angesäuertes Wasser gebracht. Der Versuch gelingt aber auch mit ganz reinem Wasser.

Wenn man die Röhre wie ein Barometer mit Quecksilber füllt, und etwas Wasser in den längeren Schenkel aufsteigen lässt, bildet sich beim Aufrichten der Röhre zuerst oben ein unvollkommenes Vacuum, während das Wasser den grössten Theil seiner Luft aufperlen lässt. Man saugt am kurzen Schenkel, bis das Quecksilber über den Hahn gestiegen ist, und schliesst diesen. Nun lässt man die Blase mit verdünnter Luft und das Wasser in dem nahehin horizontal gehaltenen Rohre

---

1) Aeltere Versuche, die weniger weit reichten, s. bei James Moser Pogg. Ann. CLX, 138.

hin und herfliessen, schliesslich lässt man das Wasser grossentheils in den langen Schenkel wieder aufsteigen, während man die Luftblase in dem kurzen zu fangen sucht. Ehe man die Röhre aufrichtet, öffnet man wieder den Hahn. Beim Aufrichten bildet sich oben wieder das Vacuum, dem das Wasser nun nur noch eine Spur Luft abgiebt, welche sichtbar wird, wenn man das unten geöffnete Barometer etwas neigt, so dass die Flüssigkeit im langen Schenkel oben anschlägt. Diese Luftblase entfernt man wieder in derselben Weise, wobei man die Röhre bis 40° oder 50° erwärmt, indem man sie durch die Spitze einer Flamme zieht. Die Luftbläschen, die sich nach jeder dieser Operationen in der Spitze der Röhre sammeln, werden immer kleiner, aber es ist mir nie gelungen, ein nur mit Dämpfen gefülltes Vacuum zu gewinnen, welches nicht beim Zusammenfallen ein kleines Bläschen gelassen hätte.

Wenn diese Bläschen aber etwa nur noch ein Viertel Millimeter Durchmesser haben, kann man sie vom Wasser
absorbiren lassen, indem man die Röhre mit geöffnetem Hahne 18
umlegt, so dass ihr oberes Ende nur wenige Centimeter höher steht, als das Niveau im kurzen Schenkel. In dieser Lage lässt man sie abkühlen und wartet bis das Luftbläschen verschwunden ist.

Wenn man sie dann aufrichtet, haftet die Flüssigkeit oben am Rohre, und das Quecksilber am Wasser, so dass sie nicht abreissen; nur muss man Stösse gegen das Rohr vermeiden.

Jetzt schiebt man einen steifen Schlauch auf die Spitze des kurzen Schenkels, und verbindet ihn mit der Luftpumpe. *Man kann nun die Luft auspumpen, so weit es die Pumpe leistet, ohne die Flüssigkeit im Barometerrohre zum Abreissen zu bringen.* Die Cohäsion der beiden Flüssigkeiten überwindet hierbei also einen negativen Druck von mehr als einer Atmosphäre, ohne dass doch das Wasser absolut luftfrei wäre.

Wenn man einen elektrischen Strom durch das Wasser leitet, der Sauerstoff zum Platin, Wasserstoff zum Quecksilber treibt, so zerreisst die Wassersäule, sobald dessen elektromotorische Kraft im Stande ist, unter den gegebenen Bedingungen

Wasserzersetzung einzuleiten. Das Gestell, welches das Barometer trägt, muss dabei auf Kautschukfüssen stehen, um Erschütterungen abzuhalten. Ich fand (Mai 1885) als Grenze 2,06 und 2,18 Volt. Nach der von mir entwickelten elektrochemischen Theorie (Berl. Sitzungsber. 31. Mai 1883)[1]) sind um so kleinere elektrische Kräfte zur Scheidung der Elemente des Wassers ausreichend, je weniger von beiden Gasen in der Flüssigkeit aufgelöst ist.

[1]) Abgedruckt auf S. 92—114 des vorliegenden Bandes.

CXXIII.

Weitere Untersuchungen, die Elektrolyse des Wassers betreffend.

Aus den Sitzungsber. der k. preuss. Akademie der Wissensch. zu Berlin. Sitzung vom 28. Juli 1887. S. 749—758. Wiedemanns Annalen. Bd. XXXIV. S. 737—751.

Unter dem 10. Mai 1883 habe ich der Akademie eine 737
Reihe thermodynamischer Sätze vorgetragen, die sich auf die Zersetzung des Wassers durch galvanische Ströme beziehen. Dieselben führten zu dem für die Lehre von der Polarisation wichtigen Ergebniss, dass die elektrolytische Zersetzung des Wassers durch um so kleinere elektromotorische Kräfte würde geschehen können, je kleiner die Mengen der in der Nähe der Elektroden aufgelösten Mengen Wasserstoff und Sauerstoff seien; ja dass sogar keine andere untere Grenze als Null für die kleinste elektromotorische Kraft bestehe, die vollkommen gasfreies Wasser zersetzen könnte. Allerdings ist dabei zu bemerken, dass die Mengen zu entwickelnden Knallgases für Kräfte, die unter 1,5 Volt betragen, so ausserordentlich klein werden, dass dieselben in keiner anderen Weise als durch die schwachen Stromreste, die sie unterhalten, wahrgenommen werden können. Ich habe bei der früheren Gelegenheit schon ausgeführt, dass demgemäss auch in Wasser, welches ursprünglich vollkommen gasfrei wäre, jede schwächste elektromotorische Kraft im Stande sein würde, einen dauernden elektrischen Strom durch die Flüssigkeit zu unterhalten. Denn auch die kleinste Menge der an

den Elektroden frei und elektrisch neutral gewordenen Gase würde durch Diffusion allmählich an die entgegengesetzte Elektrode gelangen, diese theilweis depolarisiren und dadurch einen neuen Betrag eines polarisirenden Stromes im Sinne
738 des Batteriestromes frei machen können. Unvergleichlich stärker freilich müssen chemisch nachweisbare Mengen aufgelösten Sauerstoffs oder Wasserstoffs wirken.

Ich habe mich seitdem vielfach bemüht, experimentell die Grenzen für die kleinsten elektromotorischen Kräfte, welche bei gegebenem Drucke des über der Flüssigkeit stehenden Knallgases neues Gas zu entwickeln im Stande sind, festzustellen. Die Versuche erfordern in der Regel sehr lange Zeit, und ich kann sie durchaus noch nicht nach jeder Richtung hin als abgeschlossen betrachten. Indessen kann ich wenigstens Methoden angeben, durch welche sich die erwähnte Veränderlichkeit der elektromotorischen Kraft nachweisen lässt.

Für die hier auszuführenden Messungen der elektromotorischen Kräfte der Wasserzersetzung muss ich gleich von vornherein auf eine Fehlerquelle aufmerksam machen, die von früheren Beobachtern und auch zum Theil in meinen eigenen früheren Versuchen nicht immer genügend beachtet ist, und die Ergebnisse von Versuchen, die nur kurze Zeit dauern, erheblich fälschen kann. Enthält nämlich eine Anode von Platina oder auch beide Electroden Wasserstoff oder überhaupt verbrennliche Gase occludirt, sodass der durch den Strom herangeführte Sauerstoff sich mit den Gasen der Anode verbinden kann, so wird eine viel geringere elektromotorische Kraft Wasserstoffbläschen an der Kathode frei machen. Am auffallendsten ist dies, wenn die Kathode klein, die Anode aber gross ist. Bei solchen Versuchen scheint alles durch Ausglühen in Flammen gereinigte Platina verbrennliche Gase aus dem Innern der Flamme zu enthalten. Auch wenn ein früherer umgekehrter Strom einen Vorrath von Wasserstoff in den an der jetzigen Anode haftenden Wasserschichten zurückgelassen hat, bringt dies dieselbe Wirkung hervor.

Zu erkennen ist diese Ursache der Gasentwickelung

daran, dass dieselbe nicht lange anhält und meist schnell an Stärke abnimmt, wenn man für eine gleichbleibende elektromotorische Kraft der Batterie sorgt. Aber es kann Tage lang dauern, ehe der Grenzwerth erreicht ist, wo alle wirksamen Spuren des occludirten *H* verschwunden sind. In den 739
zu beschreibenden Versuchen, welche meist Wochen und Monate gedauert haben, ist also darauf geachtet worden, dass immer dieselbe Stromrichtung zwischen den Elektroden bewahrt wurde, wo kein besonderer Grund vorlag sie zu ändern.

Eine weitere Schwierigkeit bei den Versuchen dieser Art besteht dann darin, dass ganz dieselben Hindernisse der Entwickelung aufgelösten Gases in Gasblasen entgegenstehen, welche sich der Bildung der ersten Dampfblasen bei Siedeverzügen widersetzen. Diese Hindernisse können in Flüssigkeiten von geringem Gasgehalt auffallend gross werden. Eine Zeit lang glaubte ich, dass ich die Grenze der Wasserzersetzung am besten in luftfrei gemachten Flüssigkeitssäulen würde bestimmen können, die unter negativem Druck im oberen Theile eines Barometerrohrs nur durch die Cohäsion der Flüssigkeit getragen würden. Man denke sich ein Heberbarometer, dessen kürzerer Schenkel durch einen Glashahn verschlossen werden kann, während durch die obere Wölbung des langen Schenkels ein eingeschmolzener Platindraht dringt. Es wird etwas durch Schwefelsäure schwach angesäuertes Wasser und Quecksilber in nöthiger Menge eingefüllt. Man lässt das Wasser in das obere Ende des langen Schenkels steigen, stellt das Barometer aufrecht, indem man gleichzeitig den Hahn öffnet. Es bildet sich oben das Vacuum, und das überflüssige Quecksilber fliesst durch den Hahn ab, der danach geschlossen wird. Nun spült man die ganz verschlossene Röhre mit dem Vacuum aus, lässt dann wieder das Wasser in den oberen Theil des langen Schenkels steigen, die Luftblase aber in den kurzen. Dies gelingt, wenn man das Barometer beinahe wagerecht hält, den kurzen Schenkel aber höher liegend als den langen. Dann richtet man es wieder auf, bildet ein neues Vacuum, indem man den Hahn öffnet, und wiederholt dieses Verfahren immer wieder, indem man

später auch noch Erwärmungen des ganzen Rohrs bis etwa 40° C. zu Hülfe nimmt. Dadurch gelingt es die Luft immer vollständiger zu entfernen, bis schliesslich das neugebildete Vacuum beim Umlegen des Rohres sich nur noch in ein
740 winziges Luftbläschen von etwa 0,2 mm Durchmesser zusammenzieht.

Wenn es so weit gekommen ist, lasse man das Rohr in nahehin wagerechter Stellung mit geöffnetem Hahne liegen und abkühlen. Man findet, dass nach einer halben oder ganzen Stunde das Luftbläschen wieder absorbirt ist. Man kann das Rohr dann vorsichtig aufrichten, ohne dass das Quecksilber sinkt. Es wird getragen durch die Adhäsion des Wassers an der oberen Wölbung des Glases, trotz des hier vorhandenen rauhen Platindrahtes, ferner durch die Cohäsion des Wassers, die Adhäsion des Quecksilbers am Wasser und die Cohäsion des Quecksilbers. Der negative Druck im Wasser betrug dabei zunächst etwa 8 bis 10 cm Quecksilber. So weit sind diese Erscheinungen schon länger bekannt. Neu aber ist, wie ich glaube, dass man nun die geöffnete Spitze des kurzen Schenkels durch einen Schlauch mit einer Luftpumpe verbinden und den ganzen Atmosphärendruck wegnehmen kann, ohne dass die Flüssigkeiten loslassen.[1])

Durch die hängende Flüssigkeit kann man alsdann einen elektrischen Strom vom Platin zum Quecksilber gehen lassen, der gegen ersteres O, gegen letzteres H hindrängt. Bei allmählicher Verstärkung der elektromotorischen Kraft kommt man endlich an die Grenze, wo die Flüssigkeitssäule abreisst. Die Ströme, welche ich dazu gebraucht habe, wurden von Calomelzellen, wie ich sie früher beschrieben habe, gegeben. Da die hierbei erregten Wasser zersetzenden Ströme, nachdem die Polarisation sich ausgebildet hat, äusserst schwach sind, reichen diese Zellen dafür vollkommen aus, und indem man solche von verschiedener Concentration der Chlorzink-

[1]) Ich habe diesen Versuch in meinen Vorlesungen der letzten beiden Winter und auch der hiesigen Physikalischen Gesellschaft in ihrer Sitzung vom 4. Februar 1887 gezeigt. (S. die vorige Nr. CXXII. dieser Sammlung.)

lösung verwendet, in Verbindung mit einer schwächeren Zelle, die statt des Zinks Cadmium enthält, kann man die verschiedensten Abstufungen elektromotorischer Kräfte herstellen und diese Wochen lang unverändert halten.

Indessen erhielt ich selbst bei dieser Einrichtung auffallend hohe und schwankende elektromotorische Kräfte, die 741
bis zu 2 Volt betrugen, während ich in früheren Fällen schon bei erheblich geringeren Kräften Wasserzersetzung beobachtet hatte. Wir werden letzteres auch in den definitiven Versuchen bestätigt finden. Es ist aber diese Methode besonders geeignet, um zu zeigen, wie gross der Widerstand gegen die erste Blasenbildung werden kann.

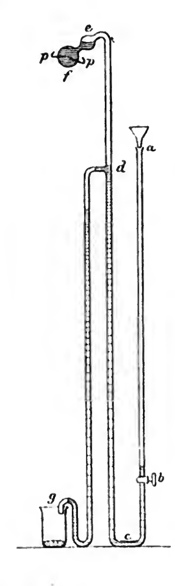
Bei anderen weiteren Zersetzungszellen, die mit zwei Platinelektroden versehen am oberen Ende eines Barometerrohrs sassen und in verschiedenen Graden der Luftverdünnung untersucht wurden, zeigte sich regelmässig, dass bei langsamer Abschwächung der elektromotorischen Kraft der Batterie die Gasbläschen sich nur noch an einzelnen, zuletzt nur noch an einer bestimmten Stelle der Platindrähte entwickelten, die Tage lang unverändert blieb. Wenn aber bei weiterer Schwächung der elektromotorischen Kraft die Gasentwickelung auch nur wenige Minuten aufgehört hatte, so trat sie bei der Rückkehr zu demjenigen Werthe der Kraft, der eben noch Gasblasen hatte aufsteigen machen, nicht wieder ein. Man musste vielmehr zu erheblich höheren Werthen übergehen, ehe sich neue Blasen bildeten. Dann konnte man wieder langsam herabgehen bis zu den früheren Graden. Schnell durfte man dies nicht thun; es musste die durch die stärkere Wasserstoffansammlung bedingte elektromotorische Gegenkraft Zeit haben abzunehmen, was nur langsam durch Diffusion des Wasserstoffs geschehen konnte, sonst stockte die Gasentwickelung und hörte infolge dessen wieder ganz auf.

Durch diese Versuche zeigt sich deutlich, wie wenig darauf zu rechnen ist, dass man durch das Aufsteigen der Gasblasen die Grenzen der Wasserzersetzung erkennen könne.

Ich habe deshalb einen anderen Weg eingeschlagen, der mich schliesslich zu folgender Methode geführt hat. Die

Wasserzersetzung geschieht in einer Zelle am oberen Ende eines Barometers, welches zugleich eine Nebenröhre hat, die als Sprengel'sche Quecksilberpumpe das angesammelte Gas immer wieder fortschaffen kann. Der Apparat dazu ist in nebenstehender Figur in ein Zehntel

742 natürlicher Grösse abgebildet. Darin ist *abcd* das Barometerrohr, dessen offener Schenkel bei *b* durch einen Glashahn geschlossen werden kann, *dg* ist eine engere Nebenröhre (2 mm innerer Durchmesser), die als Quecksilberpumpe dient, bei *e* und *f* ist die aus zwei Glaskugeln bestehende Zersetzungszelle. Die obere *e* ist kleiner; die untere grössere hat zwei Platindrähte *pp* als Elektroden. Man füllt zuerst das mit 1 Proc. Schwefelsäure angesäuerte Wasser in die Kugeln ein, stellt dann den Apparat aufrecht und giesst Quecksilber durch den Trichter bei *a* ein; sobald dies bis zur Höhe der Oeffnung *d* in beiden Schenkeln gestiegen ist, fängt es an, durch die Röhre *dg* abzufliessen, und nimmt die Luft aus dem Raum *de* mit. Gleichzeitig entwickelt sich die im Wasser aufgelöste Luft in allmählich seltener und grösser werdenden Blasen, die das überschüssige Wasser hinauswerfen, sodass es gleichfalls durch die Röhre *dg* abfliesst. Da hierbei die Röhre nass wird, und auch später noch immer die abgesogenen Wasserdämpfe sich dort verdichten, so muss diese Röhre verhältnissmässig eng sein, damit die Quecksilbertropfen trotz der geringen Capillarspannung ihrer nassen Oberfläche die zwischen ihnen gefangene Flüssigkeit und Luft nicht zu leicht wieder aufsteigen lassen. Bei höheren Graden der Verdünnung steigen die sehr winzigen Luftbläschen allerdings vielmals wieder auf, bis sich mehrere von ihnen zu einer grösseren



Blase vereinigt haben, die dann das Quecksilber nicht mehr durchbrechen kann und ausgeworfen wird. In den oberen Raum können sie nicht zurück, da der Quecksilberverschluss bei *d* sich nur in den Momenten, wo schnelles Abströmen 743
beginnt, gegen die in dem strömenden Quecksilberfaden neu entstehende Lücke öffnet und am Schlusse der abwärts gerichteten Bewegung des Fadens, wenn das Aufsteigen einzelner Luftbläschen und Wassertropfen beginnt, schon wieder geschlossen ist.

Ich hatte nach früheren Erfahrungen lange gezweifelt, dass eine innen nasse Sprengel'sche Pumpe arbeiten würde, aber bei hinreichend engem Rohr geht es recht gut.

Die flache Wölbung der Kugel *f* an ihrer oberen Seite muss im Stande sein, eine Luftblase festzuhalten, ohne dass diese durch das Verbindungsrohr nach *e* aufsteigt. Wenn neues Gas in der Flüssigkeit von *f* gebildet wird, diffundirt dies allmählich in diese Luftblase hinein, die nur den Druck der kleinen über ihr stehenden Wassersäule (in meinem Apparat zuletzt 10 mm) zu tragen hat. Die Blase in *f* wird dadurch allmählich grösser, und zwar nimmt das Knallgas unter diesen Umständen einen mehr als 1000 mal grösseren Raum ein, als unter atmosphärischem Druck, sodass höchst minimale Mengen, die im Laufe eines Tages angesammelt sind, ihre Anwesenheit verrathen. Den Durchmesser der Blase habe ich mit einem oben angelegten Millimetermaassstabe gemessen, um Gleichbleiben derselben oder Vergrösserung zu erkennen.

Wird die Blase zu gross, so lässt man einen Theil derselben, indem man den Apparat neigt, nach *e* aufsteigen. Hierbei ist zu bemerken, dass der kurze schräge Arm der Röhre bei *e* nicht wie in der Zeichnung nach links, sondern nach vorn gewendet ist, was dort nicht dargestellt werden konnte, sodass, wenn man nach Verschluss des Hahnes *b* das obere Ende des Apparates vornüber neigt, die Luftblase aufsteigen kann.

Es wurde jeden Tag eine genügende Quantität Quecksilber durch den Apparat gegossen, sodass das in den Raum oberhalb *d* diffundirte Gas immer wieder entfernt wurde,

und der Apparat dauernd in demselben evacuirten Zustande blieb.

Zur Erzeugung des Stromes brauchte ich drei Eisenchloridlösung-Kohle-Elemente. Der Widerstand ihrer Schliessung
744 betrug 3000 Quecksilbereinheiten, gegen welche ihr eigener Widerstand von etwa 75 Einheiten klein genug war, dass dessen kleine Schwankungen nicht in Betracht kamen. Die Elemente blieben ohne Unterbrechung so geschlossen, um sie in möglichst constantem Zustande zu halten; dabei nimmt ihre elektromotorische Kraft sehr langsam ab. Jeden Tag wurde die Stärke des von ihnen in diesem Widerstande erregten Stromes mit dem eines übrigens unberührt und ungeschlossen dastehenden verschlossenen Calomelelementes verglichen und danach die Länge des Widerstandes berechnet, die man zwischen den zur Zelle führenden Drähten lassen musste, um die gewünschte elektromotorische Kraft in dieser zu erhalten. Diese Kraft machte ich von Tag zu Tag in kleinen Stufen kleiner, um die Grenze zu finden. Der durch die Zelle gehende Convectionsstrom war in diesen Fällen so schwach, dass er keinen in Betracht kommenden Abzug an der elektromotorischen Kraft hervorbrachte.

Die Calomelzelle war im Laufe der Zeit mehrere mal mit einem Strome, dessen elektrolytisches Silberäquivalent bestimmt wurde, compensirt worden und dadurch auf Volt reducirt. Ihr Werth war 1,034 Volt.

Die Grenze für die Gasentwickelung fand ich zwischen 1,64 und 1,63 Volt für einen Druck des Knallgases von 10 mm Wasser. Wenn man in einem Raume von constanter Temperatur arbeiten kann, wird sich die Bestimmung noch genauer machen lassen. Da die Werthe der elektromotorischen Kräfte der verschiedenen Flüssigkeitszellen nicht gleichmässig mit der Temperatur sich änderten, und Steigerung der letzteren auch ein wenig aufgelöstes Gas aus der Flüssigkeit frei machen musste, konnten kleine Schwankungen in den Werthen entstehen.

Um die Thatsache zu constatiren, dass die zur Zersetzung nöthige elektromotorische Kraft vom Druck des Knallgases abhängig ist, wurde neben der bisher beschriebenen baro-

metrischen Zelle eine ältere, ähnlich construirte eingeschaltet, die nur eine abweichende Form des Gefässes und keinen Hahn hatte. Diese war ursprünglich leer gepumpt gewesen; dann war darin Knallgas bis zu atmosphärischem Druck entwickelt worden, sodass das Quecksilber in den beiden 745
Schenkeln des Barometers nahehin gleich hoch stand, natürlich etwas wechselnd nach Luftdruck und Temperatur. Diese konnte neben der evacuirten Zelle gleichzeitig eingeschaltet werden, aber so, dass ihre Ableitungsstellen an dem Draht von 3000 Quecksilbereinheiten einen etwas grösseren Widerstand des Batteriekreises zwischen sich fassten, als die der anderen Zelle. Gegenseitige Störung der beiden Zweigleitungen war dabei nicht zu fürchten, wenigstens nicht für die bisher erreichten Genauigkeitsgrenzen, da die beiden Zellen im polarisirten Zustande, wie wir gleich nachher noch besprechen werden, nur sehr unbedeutende Theile des Batteriestromes in sich ableiten und deshalb die Potentialwerthe der verschiedenen Theile seiner Leitung nicht merklich verändern. Der Stand der beiden Quecksilberkuppen wurde jeden Tag mit dem Kathetometer abgelesen und der Druck des Gases im oberen Raume der Zelle mit Correction wegen des Wasserdampfdruckes berechnet. Es fand sich, dass dieser Druck bei 1,79 Volt noch nicht zunahm, wohl aber bei 1,82. Um genauere Bestimmungen zwischen diesen Grenzen zu erlangen, wird die Methode etwas geändert werden müssen, sodass man die Temperatur besser beherrschen kann.

Da es sich hier zunächst darum handelt, die untere Grenze des Druckes festzustellen, bei welchem keine Zersetzung mehr erfolgte, so ist es sicherer, hier nicht die oben angenommene Grenze 1,79 zu nehmen, welche dem Anfangszustande der Werthe unmittelbar nach der täglichen Regelung der elektromotorischen Kraft entspricht, sondern den Endzustand, wie er am anderen Tage bei neuer Vergleichung mit dem Calomelelement sich ergab. Dann müssen wir auf 1,78 oder selbst 1,775 herabgehen.

Ferner kommt in Betracht, dass ein Theil der elektromotorischen Kraft den Potentialunterschieden entspricht, die der Strom in den Widerständen hervorruft. In der luftleeren

Zelle war der Strom nach hergestellter Polarisation so klein,
dass er etwa nur ein Hunderttheil des durch die nicht eva-
cuirte Zelle fliessenden Convectionsstromes ausmachte. Dieser
letztere grössere Strom betrug $^1/_{67021}$ eines Ampère und durch-
746 lief in der Batterie etwa 75 Ohm, in der Zelle, deren Wider-
stand aus Dimension und Entfernung ihrer Drähte und dem
Leitungsvermögen der Schwefelsäure annähernd berechnet
wurde, etwa 25 Ohm, ausserdem einen wechselnden Theil der
grossen Widerstandsscala, der nicht über 100 Ohm betragen
hat. Dies ergiebt im günstigsten Falle einen Aufwand von
0,0035 Volt, der von der elektromotorischen Kraft als verbraucht
für Ueberwindung des Widerstandes abzuziehen ist.

Endlich ist zu bemerken, dass zwar die mit Gas von 742 mm gefüllte Zelle lange nicht so leicht Zunahme und Abnahme des Gases anzeigt, wie die evacuirte, wo die Gasvolumina fast 1000 mal grösser sind. Andererseits musste ein Ueberschuss von 0,01 Volt bei dem geringen Widerstande von höchstens 200 Ohm in dem Kreise dieser Zelle in 24 Stunden 6,7 ccm Gas ergeben, was in der Barometerröhre von 5 mm innerem Durchmesser nicht hätte übersehen werden können, sodass ein in Betracht kommender Fehler in dieser Richtung nicht gemacht sein kann.

Für den Einfluss des Druckes auf die elektromotorische Kraft habe ich (Vortrag vom 31. Mai 1883. p. 660. Gl. (3_c)[1]) folgenden Ausdruck entwickelt:

$$A = A_0 + 10^{-7} . \eta . \vartheta \left\{ R_h \frac{2a_h}{2a_h + a_0} \log\left(\frac{p_h}{p_a}\right) + R_0 . \frac{a_0}{2a_h + a_0} \log\left(\frac{p_0}{p_a}\right) \right\} .$$

Darin ist p_a atmosphärischer Druck, p_h und p_0 sind die Drucke des über der Flüssigkeit stehenden H und O; a_h und a_0 sind die Atomgewichte derselben Elemente; ϑ die absolute Temperatur nach Centigraden gezählt.

$$R_h = \frac{p_h \cdot v_h}{\vartheta} = 41\,461\,000 . \frac{\mathrm{cm}^2 . \mathrm{g}}{\mathrm{sc}^2} ,$$

wo v_h das Volumen von 1 g . H; R_0 die entsprechende Constante für O, und η die Menge des von einem Ampère in einer Secunde zersetzten Wassers:

[1]) Abgedruckt auf S. 108 des vorliegenden Bandes.

$$\eta = 0{,}000\,09319$$

nach den letzten Bestimmungen von Herrn F. Kohlrausch.

Wenn reines Knallgas über der Flüssigkeit steht, wie in unseren Versuchen, und wir dessen Druck mit p bezeichnen:

$$p = p_h + p_0\,,$$

wird der mit dem Druck wechselnde Theil der elektro- 747
motorischen Kraft:

$$A_1 - A_2 = {}^1/_6 . 10^{-7} . \eta . \vartheta . R_4 . \log\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 0{,}018\,868 \,.\, \log \text{nat.} \left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

Der Druck in der evacuirten Röhre betrug im Mittel 10 mm Wasser, in der anderen, corrigirt für den Wasserdampfdruck, 742 mm Quecksilber. Für dieses Verhältniss der Drucke ergiebt unsere Formel einen Unterschied der elektromotorischen Kraft von 0,1305 Volt. Wir hatten 1,64 Volt für letzte Reste der Gasentwickelung und sollten daraus schliessen, dass in der anderen Zelle die Entwickelung bei 1,77 ihre Grenze haben würde. Dies entspricht auch dem oben unter Berücksichtigung der Correctionen gegebenen Ergebniss der Versuche innerhalb der bisher erreichten Grenzen der Genauigkeit.

Die Bestimmung der Grenze für den höheren Knallgasdruck hoffe ich noch wesentlich verfeinern zu können, und auch die Beobachtungen von der Asymmetrie der Elektroden frei zu machen, die nicht ganz ohne Einfluss ist und in geblasenen Glaszellen nicht ganz vermieden werden kann.

Wenn wir zu noch grösseren Drucken übergehen wollten, so müssten wir den Druck von einer Atmosphäre wieder in demselben Verhältniss, nämlich auf mehr als 1000 Atmosphären steigern, um eine Erhöhung der elektromotorischen Kraft um dieselbe Differenz von 0,16 Volt zu erhalten, d. h. um sie von 1,79 auf 1,95 Volt zu vergrössern. Das wird aber nicht angehen, da schon Hr. W. Siemens[1]) gefunden hat, dass bei

---

[1]) S. Werner Siemens' gesammelte Abhandlungen und Vorträge p. 445. Anmerkung, wo ein Strom von 3 bis 4 Daniells aufhörte, Zersetzung zu geben, wenn der Druck sehr gross wurde. Bei 10 Daniells entzündete das Knallgas sich wiederholt.

einer gewissen Höhe des Druckes das Knallgas sich spontan entzündet.

Dazu kommt, dass je grösser der Druck, desto grösser auch die Beladung der Flüssigkeit mit gelösten Gasen wird. Desto höher steigen die Convectionsströme, die einen immer grösseren Theil des Stromes ohne elektrolytische Zersetzung entladen.

746 Dadurch werden bei den Messungen die Widerstände in den Zellen immer einflussreicher, und die Wärmeentwickelung in ihnen immer störender. Ich habe deshalb vorgezogen, mich auf die hier gebrauchten sehr schwachen Ströme zu beschränken und mit niedrigen Drucken zu arbeiten.

Nachträglicher Zusatz vom Juni 1888. — Das Vorstehende lässt erkennen, dass die elektromotorische Gegenkraft von Zellen, die Gase entwickeln, um so höher steigt, je schwerer die Entwickelung der Gasbläschen zu Stande kommt. Desto grössere Mengen der aufgelösten Gase können sich nämlich in den den Elektroden nächstgelegenen Wasserschichten ansammeln. Dass Fortspülen dieser Schichten zeitweilig die Polarisation beseitigt und stärkere Ströme auftreten lässt, ist bekannt. Ich glaube nun, dass man die altbekannte Thatsache, wonach die elektromotorische Kraft eines Zink-Platin-Paares in verdünnter Schwefelsäure dauernd höher ist, als die eines Zink-Kupfer-Paares in derselben Flüssigkeit, darauf zurückführen kann. Diese Thatsache erschien immer als ein Paradoxon dem Gesetz von der Constanz der Energie gegenüber. Wenn man aber annimmt, dass sich Wasserstoffblasen leichter an Platina als an positiveren Metallen entwickeln, so würde sich die Thatsache erklären. Es wirkt freilich der gleiche chemische Process in beiden Zellen; in beiden tritt Zink in die Lösung und eine äquivalente Menge Wasserstoff entwickelt sich dafür. Aber das Kupfer würde von einer viel stärker mit Wasserstoff überladenen Flüssigkeit umgeben sein, als das Platina, und nach der thermochemischen Theorie, aus der die Gleichung auf p. 276 hergeleitet ist, ergiebt sich, dass Neuausscheidung von Wasserstoff in eine schon viel Wasserstoff haltende Flüssigkeit hinein mehr chemische Arbeit

erfordert, als in eine andere, die nur Spuren des genannten Gases enthält.

Die Arbeit, welche die chemischen Kräfte dabei leisten sollten, und die in einem Zink-Platin-Element oder auch wohl in einem Smee-Element ziemlich vollständig in Form des elektrischen Stromes gewonnen werden kann, muss zum grossen Theile dabei nach anderer Richtung verwendet werden, und 749
zwar ist in dieser Beziehung Folgendes zu beachten.

Wenn über einer mit Gas unter bestimmtem Drucke gesättigten Flüssigkeit das absorbirte Gas unter gleichem Drucke steht, herrscht Gleichgewicht der molecularen Arbeitskräfte zwischen beiden. Wird der Druck des freien Gases allmählich vermindert, so entwickelt sich langsam Gas aus der Flüssigkeit, und es würde bei constant gehaltener Temperatur das Aequivalent des geänderten Vorrathes freier Energie in der Arbeit des Gasdruckes wieder gewonnen werden können; ebenso in einer elektrolytischen Flüssigkeit, aus der die Gasbläschen wirklich in dem Momente frei würden, wo die Flüssigkeitsschicht an der Elektrode so weit gesättigt ist, als sie unter dem Drucke, den das entwickelte Gas zu überwinden hat, gesättigt werden kann. Wenn sie aber stärker gesättigt ist, geht ein Theil der freien Arbeit, welchen das entwickelte Gas gegen höheren Druck hätte leisten können, verloren und kann nur in Form von Wärme wieder erscheinen. Diese Wärme wird sich in der Flüssigkeit finden. In der That zeigen die bisher ausgeführten calorimetrischen Versuche mit H entwickelnden Zellen, dass das gleiche thermochemische Aequivalent der Wärme immer richtig zum Vorschein kommt. Es würde dies ein Vorgang sein, der einigermaassen dem alten und fraglichen Begriffe des Uebergangswiderstandes entsprechen würde; im Grunde wäre es aber nur ein secundär durch den Strom veranlasster Process, welcher dem Strome die durch die Wasserstoffbeladung der Flüssigkeit versperrte Bahn wieder frei macht.

Dass bei einem solchen Sachverhalt alle die kleinen Modificationen der Oberflächen, welche auf die Entwickelung der Gasblasen Einfluss haben, sich in unregelmässigster Weise geltend machen, dass Umrühren der Flüssigkeit, theils durch

eine äussere mechanische Kraft, theils durch die aufsteigenden Gasblasen bewirkt, die Stromstärke ändert, dass Erwärmung der Flüssigkeit eine grosse Verstärkung des Stromes hervorbringt, erklärt sich leicht; auch dass es eine geraume Zeit zu dauern pflegt, ehe die Flüssigkeit ausreichend mit Gas beladen
750 ist, um in einen annähernd beständigen Zustand zu kommen, der dann wieder durch die kleinsten Aenderungen der Lage oder Temperatur geändert wird.

Da die Gasblasen aus übersättigten Flüssigkeiten nur von den Wänden aufzusteigen pflegen, müssen wir schliessen, dass der Riss zwischen Flüssigkeit und Wand leichter zu Stande kommt, als in der Mitte der Flüssigkeit, wo deren Cohäsion überwunden werden muss, die sich dann noch an den entstandenen kleinsten Bläschen als zusammenschnürende Capillarkraft äussert. Es ist also hauptsächlich die Anziehung zwischen Flüssigkeit und Wand, die überwunden werden muss, um dem entweichenden Gase Platz zu schaffen. Denkt man sich nun an der Grenzfläche eine elektrische Doppelschicht abgelagert, so wird die Anziehung zwischen Metall und Flüssigkeit durch die elektrische Anziehung vergrössert sein. Eine stärkere Ausbildung der elektrischen Doppelschicht wird also die Entwickelung der Gasblasen erschweren. Nun wissen wir aus Hrn. A. König's[1]) Versuchen über die Capillarconstante polarisirten Quecksilbers, dass dieses seine maximale Spannung hat, wenn es der Wasserstoffentwickelung ziemlich nahe ist. Daraus ist zu schliessen, dass das Metall dann keinen Potentialunterschied gegen die Flüssigkeit hat. Wir dürfen vermuthen, dass es bei dem ihm galvanisch nahestehenden Platina sich ähnlich verhält, während die positiveren Metalle, um im Gleichgewicht elektrischer Vertheilung mit dem H beladenen und von O befreiten Wasser oder dem ihm äquivalenten Pt zu sein, um so stärkere Schichten $+E$ innerhalb ihrer Grenzfläche ablagern müssen, je positiver sie sind. In dieser Weise könnte ein Zusammenhang bestehen zwischen den galvanischen Constanten der Metalle und ihrer Fähigkeit, Wasserstoffblasen aufsteigen zu lassen.

---

[1]) A. König, Wied. Ann. 16. p. 1.

In den Fällen der oben beschriebenen Versuche, wo es nicht zur Blasenbildung kommt, muss die Diffusion der beiden Gase durch die Flüssigkeit unterhalten werden, wenn der Strom fortbestehen soll. Die Diffusion ist aber ein durch moleculare Reibung verzögerter Process, bei dem freie Arbeitsäquivalente verschwinden und in Wärme übergehen. Diese 751
Wärmeentwickelung durch Diffusion, die zu der äusserst geringen vom Strome entwickelten Wärme sich addirt, wird als das Arbeitsäquivalent für die während des schwachen Convectionsstromes durch die Umsetzung in der Batterie verloren gehende chemische Energie betrachtet werden müssen.

CXXIV.

Zu dem „Bericht über die Untersuchung einer mit der Flüssigkeit Pictet arbeitenden Eismaschine, erstattet von Hrn. Dr. Max Corsepius."

Verhandlungen der Physik. Gesellschaft zu Berlin. Sitzung vom 14. Ocbtr. 1887. S. 97—101. — Ebenda findet sich auch in dem Sitzungsbericht vom 11. November 1887 die Fortsetzung der Discussion.

---

97 Für die industriellen Zwecke der Eisfabrikation hat das
von Hrn. Raoul Pictet angewendete Gemisch von flüssiger
schwefliger Säure und Kohlensäure offenbar grosse Vortheile
dadurch, dass es bei Zimmertemperatur leicht zu comprimiren
ist, und doch unter dem Drucke von etwa einer Atmosphäre
Verdampfungstemperaturen von 18.5° C. erreicht. In wissen-
schaftlicher Beziehung sollen nach Ansicht der Hrn. Pictet
und Corsepius die besprochenen Versuche eiu Resultat er-
98 geben haben, was in der That von der allergrössten Bedeutung
wäre, wenn es sich bestätigte. Es soll nämlich die Arbeit der
Maschine kleiner sein, als diejenige, welche nach dem Gesetze
von Carnot-Clausius nothwendig wäre, um die in niederer
Temperatur von der Flüssigkeit Pictet aufgenommene Wärme
in die höhere Temperatur des Condensators wieder abzugeben.
Dies soll möglich werden durch den Einfluss chemischer
Kräfte, die in höherer Temperatur eine Auflösung der beiden
Flüssigkeiten in einander mit verminderter Dampfspannung be-
wirken, während in niederer Temperatur die Flüssigkeiten sich
wieder trennen. Dieser Erklärungsweise liegt die Voraussetzung
zu Grunde, dass die chemischen Kräfte in ihrer Wirkungsweise
dem bisher nicht nur in allen anderen Fällen, sondern auch
in einer guten Anzahl von chemischen und elektrochemischen

Processen bestätigten allgemeinen thermodynamischen Gesetze sich entziehen.

Bekanntlich sagt dieses Gesetz aus, dass zur Uebertragung des Wärmequantums Q aus der Temperatur T in die höhere Temperatur T_1 ein Aufwand W von Arbeitskräften nöthig ist,

$$W = J.Q \cdot \frac{T_1 - T}{T},$$

(J sei das mechanische Wärmeäquivalent) und dass dabei in das Reservoir höherer Temperatur eine Wärmemenge Q_1 abgegeben wird:

$$Q_1 = \frac{T_1}{T} \cdot Q.$$

Die Temperaturen T_1 und T nun, mit denen die Autoren ihre Berechnung des Arbeitsaufwands anstellen, sind nicht die beobachteten Temperaturen des Condensators und der Salzlösung im Gefrierapparate, sondern es sind berechnete Temperaturen, deren wirkliche Existenz durch keine directe Beobachtung constatirt ist. Sie sind nämlich berechnet aus den beobachteten Werthen des Gasdrucks in den Röhrenleitungen vor und hinter der Pumpe. Es ist angenommen, dass aus diesem Gasdruck die Temperaturen der beiden mit Pictet's Flüssigkeit und ihren Dämpfen gefüllten Räume nach der über diese Flüssigkeit entworfenen Dampfspannungstabelle berechnet werden können. Die Grenzen zwischen diesen beiden Theilen der in 99
sich zurücklaufenden Röhrenleitung bildete einerseits die Pumpe, andrerseits ein fein einstellbarer enger Regulirhahn.

Damit aber die genannte Annahme zutreffe, müsste zuerst festgestellt sein, dass in der Röhrenleitung keine Reste atmosphärischer Luft enthalten sind. Diese würde nämlich durch die Pumpe in die wärmere Abtheilung der Röhren hinübergepumpt werden, und nicht wieder herauskönnen, da durch den Hahn nur die condensirte Flüssigkeit entweicht. Der Druck solcher Luft würde sich zu dem des Dampfes addiren, diesen und die Temperatur der Condensation höher erscheinen lassen, als sie wirklich sind. Ueber diesen Punkt ist in dem Bericht nichts gesagt.

Zweitens fragt es sich, ob die Zusammensetzung der ge-

sättigten Dämpfe von Pictet's Flüssigkeit bei allen Temperaturen die gleiche ist. Nach der Analogie der meisten ähnlichen Gemische ist dies durchaus nicht wahrscheinlich; sondern es ist zu erwarten, dass der Dampf in niederen Temperaturen verhältnissmässig mehr Kohlensäure, in höheren mehr schweflige Säure enthält. Wenn der Kreisprocess stationär geworden ist, muss die durch den regulirenden Hahn übergehende Flüssigkeit gleiche Zusammensetzung haben mit dem Dampfe, der durch die Pumpe getrieben wird. Aber in der kälteren Flüssigkeit wird sich ein Ueberschuss von SO_2 sammeln müssen, gross genug um Dämpfe von der verlangten Zusammensetzung zu geben, und in dem Dampfe sowie in der Flüssigkeit des wärmeren Abschnitts wird sich dafür ein Ueberschuss von Kohlensäure sammeln, bis dieser Ueberschuss in der durch den Regulirhahn übergehenden Flüssigkeit genügt, die stärkere Ausgabe von CO_2 bei der Verdampfung zu decken. In der wärmeren Abtheilung, falls sie luftfrei ist, würde dann der Dampfdruck mit dem einer kohlensäurereicheren Flüssigkeit stimmen müssen, die die beobachtete Dampfspannuug schon bei niederer Temperatur erreicht, als die normale Flüssigkeit. In der kälteren Abtheilung dagegen würden wir ein schwerer verdunstendes Flüssigkeitsgemisch haben, dessen Temperatur merklich höher sein könnte, als die der unveränderten Flüssigkeit bei derselben Temperatur. Dann wäre die Temperatur T_1
100 in obiger Formel zu hoch, T zu niedrig angenommen, und ein zu grosser Arbeitswerth berechnet. Nach der von Hrn. R. Pictet aufgestellten Dampfspannungstabelle würde bei einer Atmosphäre Druck im Gefrierapparat die Temperatur von —18.5° bei allmählich steigender Einmischung von SO_2 bis —10° gesteigert werden können, während schon geringe Anhäufungen von CO_2 viel weiter gehende Veränderungen der Temperatur hervorbringen würden.

Hierneben werden kaum in Betracht kommen andere kleinere Wärmequanta, die die Differenz der Rechnung vergrössern können. So ist z. B. alles neugebildete Eis berechnet als abgekühlt bis zur Temperatur des Kühlwassers, während der Zweck der Fabrikation nur erforderte, dass sein Inneres 0° habe. Ferner würden die Dämpfe, welche in der kälteren

Abtheilung des Apparats entstehen, sowie die dort vorhandene Flüssigkeit, wenn die beiden ersterwähnten Fehlerquellen nicht wirksam sind, im Augenblick ihres Entstehens allerdings die berechnete niedere Temperatur haben, bei der weiteren Fortleitung aber durch die Röhre allmählich die Temperatur des Salzwassers annehmen, welche im Durchschnitt 20° höher lag. Sie nehmen also nur einen Theil der dem Salzwasser entzogenen Wärme bei der niedrigsten Temperatur auf, den Rest bei steigenden Temperaturen, während in der Berechnung des Berichts die ganze Wärmemenge, als in der niedrigsten Temperatur aufgenommen, eingesetzt worden ist. Für die Berechnung nach dem thermodynamischen Gesetz ist aber jede Wärmemenge, die die circulirende Masse aufgenommen hat, zu dividiren durch diejenige absolute Temperatur, bei welcher sie aufgenommen worden ist. Ihre Ueberführung in den Condensator erforderte um so weniger Arbeit von Seiten der Maschine, je höher die genannte Temperatur schon gestiegen war.

Um die grossen Unterschiede der Temperaturen, um die es sich hier handelt, hervortreten zu lassen, setze ich sie hier neben einander.

Beobachtet 101

Datum	Salzwasser	Kühlwasser	Intervall
17. Mai	— 10.08°	+ 10.44°	20.52°
18. „	— 5.84°	+ 10.44°	16.28°
19. „	— 16.55°	+ 10.44°	26.99°
21. „	— 8.35°	+ 10.76°	19.11°

Berechnet aus Gasdruck

Datum	Gefrierapparat	Condensator	Intervall
17. Mai	— 27.5°	+ 22.8°	50.3°
18. „	— 20.1°	+ 24.45°	44.55°
19. „	— 35.0°	+ 21.90°	56.90°
21. „	— 24.5°	+ 37.80°	62.30°

Man sieht hieraus, dass die Temperaturintervalle, mit denen die Rechnung ausgeführt ist, mehr als doppelt so gross sind, als diejenigen, welche wirklich beobachtet sind.

Die Berechnung der nach Carnot's Gesetz nöthigen Arbeitsmenge ist nach zwei verschiedenen Annahmen über die

specifische Wärme von Pictet's Flüssigkeit durchgeführt, und ergiebt in Pferdekräften angegeben:

	Berechnet		Gemessen durch
Datum	1	2	Indicator
16. Mai	58.07	54.19	41.941
18. „	65.64	62.23	46.755
19. „	55.24	50.81	36.737
21. „	77.08	70.02	48.935

Wenn man das wirklich beobachtete Temperaturintervall zwischen Wasser des Condensators und Salzwasser des Gefrierapparates zur Rechnung benutzt, bekommt man Arbeitsgrössen, die weit unter der Hälfte der berechneten, und also auch tief unter den Angaben des Indicators liegen. Dieselben wären jedenfalls zu klein, die in dem Bericht berechneten sind jedenfalls zu gross; aber der wahre Werth der betreffenden Arbeit wird erst durch directe Beobachtung der Temperatur im Innern der verschiedenen Abschnitte des Röhrensystems und durch Untersuchung der Zusammensetzung der circulirenden Flüssigkeit ebenda gefunden werden können.

CXXV.

Wolken- und Gewitterbildung.

Aus den Verhandlungen der Physikal. Gesellschaft zu Berlin. 5. Jahrg. S. 96 bis 97. Sitzung vom 22. October 1886.

An einem Tage der ersten Hälfte des Septembers d. J. 96
war vom Rigi aus nach dem Jura hin morgens klare Aussicht. In etwas geringerer Höhe, als die der Aussichtsstelle, nämlich des Känzli am Rigi, war die obere ganz regelmässig horizontale Grenze einer trüberen und schwereren Luftschicht, welche Grenze durch eine dünne Schicht von Wölkchen angezeigt war, die schmalstreifig von Nord nach Süd zogen, und die ersten durch Störung und Aufrollung der Grenzfläche beider Schichten entstehenden Wirbel anzeigten. Diese wurden im Laufe des Tages immer grösser, und hatten sich gegen Abend zu grösseren, meist aber noch getrennten Haufenwolken entwickelt, die aber immer noch ebene Grundfläche zeigten, und erkennen liessen, dass aus der unteren, im Ganzen noch ruhenden Schicht, an einzelnen Stellen aufsteigende Luftströme sich erhoben, und in der oberen Schicht begrenzte Nebelbildung bewirkten. An zwei etwas entfernteren Stellen entwickelte sich eine über das Niveau des Beobachters emporragende Wolkenbildung, deren obere Begrenzung nun nicht mehr deutlich erkannt werden konnte, und in dieser begannen elektrische Entladungen, zuerst horizontal zwischen verschiedenen Theilen dieser Wolken. Da
nur dünne Regenstreifen von diesen Stellen abwärts gingen, 97
die die Durchsicht noch nicht ganz verhinderten, konnte man

sicher erkennen, dass längere Zeit hindurch die Blitze nicht nach dem Boden gingen, sondern sich zunächst nur elektrisches Gleichgewicht zwischen den Wolkentheilen herstellte. Endlich aber erfolgten auch abwärts Entladungen, die im Allgemeinen viel glänzender waren, als die früheren. Während dies geschah, blieben die Haufenwolken über einem ausgedehnten Theil der Ebene so gut wie ungestört, nur allmählich noch anwachsend, bis es dunkel wurde, und die Nacht reichlichen Regen brachte.

CXXVI.

Ueber atmosphärische Bewegungen.

Aus den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
S. 647 bis 663. Sitzung vom 31. Mai 1888.

---

§ 1.

Einfluss der Reibung auf die grossen Circulationen der Atmosphäre.

Der Einfluss der Flüssigkeitsreibung im Innern sehr aus- 647
gedehnter Räume, die mit Flüssigkeit gefüllt sind und keine Wirbel enthalten, ist immer ein verhältnissmässig sehr kleiner. Es lässt sich dies schon aus Betrachtungen, die sich auf das Princip der mechanischen Aehnlichkeit stützen, nachweisen. Wenn wir Euler's hydrodynamische Gleichungen bilden, und darin mit u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit parallel den Axen der x, y, z, mit ε die Dichtigkeit, mit p den Druck, mit P das Potential der Kräfte bezeichnen, die auf die Masseneinheit der Flüssigkeit wirken: so ist bekanntlich, indem wir $P, \varepsilon, p, u, v, w$ als Functionen von x, y, z, t behandeln, für eine der Reibung unterworfene Flüssigkeit

$$-\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{k^2}{\varepsilon}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \quad \ldots\ldots 1$$

$$-\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon w)}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1a.$$

Zur ersteren Gleichung kommen noch zwei nach den anderen Coordinaten symmetrische hinzu.

Wenn wir nun irgend welches particuläres Integral dieser Gleichungen gefunden haben, welches für einen bestimmten Raum gilt, so werden die Gleichungen auch gelten für einen zweiten Fall, wo die sämmtlichen Leardimensionen x, y, z und ebenso die Zeit t, aber auch die Reibungsconstante k^2 auf das $n$fache vergrössert sind, P, p, ε, u, v, w aber für jeden Werth der neuen Coordinaten nx, ny, nz, nt denselben Werth behalten, wie sie im ersten Falle für x, y, z, t hatten. Daraus folgt, dass die Bewegung in analoger Weise, und nur langsamer von Statten geht, wenn bei der Bewegung der ver-
648 grösserten Masse auch gleichzeitig die Reibungsconstante entsprechend vergrössert werden kann. Wenn dies nicht der Fall ist, dieselbe vielmehr unveränderten Werth behält, so wird der Einfluss der Reibung auf die vergrösserte Masse sehr viel kleiner werden, als auf die kleinere. Die grosse Masse wird in Folge dessen die Wirkungen des Beharrungsvermögens viel weniger durch die Reibung beeinflusst zeigen.

Zu bemerken ist, dass dabei das Potential P zwar unverändert bleiben, die Kräfte $\partial P / \partial x$ aber auf den Werth $1/n$ zurückgeführt werden würden, und dass der ganze Process, wie schon bemerkt, zu seinem Ablauf die $n$fache Zeit erfordern würde.

Da Dichtigkeit und Druck unverändert bleiben sollen, so würden auch die etwa vorhandenen Temperaturunterschiede ihre Grösse und Wirkung behalten und das Verhältniss der mechanischen Aehnlichkeit nicht stören.

Leider können wir in verkleinerten Modellen die in verschiedenen Höhen verschiedene Dichtigkeit der Atmosphäre nicht nachahmen, da wir die Schwerkraft, die im $\partial P / \partial x$ steckt, nicht entsprechend ändern können. Unsere mechanischen Vergleiche würden nur eine Atmosphäre von constanter Dichtigkeit nachahmen können. Eine solche müsste bekanntlich 8026^{m} Höhe bei 0^{0} C. haben, um den mittleren Barometerstand von 76^{cm} Quecksilber hervorzubringen. Wollten wir sie im Modell durch eine Schicht von 1^{m} Höhe darstellen, so würde ein Tag auf 10.8 Secunden, ein Jahr auf 65.5 Minuten reducirt werden

müssen, und der Einfluss der Reibung bei einer Bewegung mit Geschwindigkeiten, die denen der Atmosphäre entsprechen, in dem kleinen Modell 8026 mal so gross sein müssen, als in der Atmosphäre. Der Verlust an lebendiger Kraft in der Atmosphäre während eines Jahres würde also nur dem in 65.5 / 8026 Minuten, was weniger als eine halbe Secunde ist, entsprechen.

Andererseits lässt sich mit den gemessenen Werthen der Reibungsconstante der Luft für einige einfache Fälle berechnen, wie lange Zeit eine nur durch Reibung verzögerte Bewegung gebrauchen würde, um auf die Hälfte ihrer Geschwindigkeit herabzugehen. Die Annahme constanter Dichtigkeit ist hierbei für unseren Zweck ungünstiger, als die Wirklichkeit.

Nehmen wir an, dass über einer unendlichen Ebene sich eine Luftschicht von der constanten Dichtigkeit der unteren Schichten der Atmosphäre ausbreite und eine fortströmende Bewegung von der Geschwindigkeit u in Richtung der x parallel der Ebene habe. Es sei z die verticale Coordinate, so ist die 649
Bewegungsgleichung für das Innere der Masse

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k^2}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2.$$

An der Bodenfläche $z = 0$ soll die Flüssigkeit festhaften. Hier wäre

$$u = 0, \text{ wenn } z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2a.$$

An der oberen Grenzfläche $z = h$, soll sie keiner Reibung unterworfen sein, also dort sei

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \text{ wenn } z = h \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2b.$$

Von den particulären Integralen der Gleichung (2):

$$u = Ae^{-nt} \sin (qx)$$

$$n = \frac{k^2}{\varepsilon} q^2,$$

welche die Grenzbedingungen (2a) erfüllen, ist das langsamst verschwindende, welches auch (2b) erfüllt, durch den Werth gegeben

$$q = \frac{\pi}{2h}.$$

Dadurch wird

$$n = \frac{k^2}{\varepsilon} \cdot \frac{\pi^2}{4h^2}.$$

Der Factor e^{-nt} ist zur Zeit: $t = 0$, gleich 1. Damit er gleich $^1/_2$ werde, muss sein:

$$nt = \log \text{nat. } 2 = 0.69315.$$

Nach Maxwell's[1]) Bestimmungen ist

$$\frac{k^2}{\varepsilon} = 0.13417\,[1 + 0.00366\,\vartheta_c\,] \cdot \frac{cm \cdot cm}{scd},$$

wo ϑ_c die Temperatur nach Celsius bezeichnet. Daraus ergiebt sich für 0° C.

$$t = 42747 \text{ Jahre.}$$

Vertheilen wir dieselbe Luftmasse mit geringerer Dichtigkeit auf eine dickere Schicht, so dass $(\varepsilon \cdot h)$, wie das von ε unabhängige k^2, unveränderten Werth behält, so muss t wie h wachsen. Daraus geht hervor, dass in den höheren dünneren Schichten der Atmosphäre die Wirkung der Reibung sich durch
650 Luftschichten von gleicher Masse noch langsamer fortpflanzt, als durch die unteren dichteren.

Erhöhung der absoluten Temperatur ϑ dagegen würde bewirken, dass die Zeit t, wie $1 / \vartheta$ abnähme. Die niedere Temperatur der höheren Schichten der Atmosphäre verringert ebenfalls den hier betrachteten Einfluss der Reibung.

Auch diese Rechnung zeigt, wie ausserordentlich unbedeutend die Wirkungen der Reibung an der Erdoberfläche, die im Verlaufe eines Jahres zu Stande kommen können, für die höheren Luftschichten sein würden.

Nur an festen Grenzen des Raumes, den die Atmosphäre erfüllt, beziehlich an inneren Trennungsflächen, wo Ströme verschiedener Geschwindigkeit an einander grenzen, bleiben die Flächenkräfte bei Vergrösserung des Maasstabes dieselben, auch wenn man den Reibungscoefficienten nicht mit vergrössert, und

---

[1]) Theory of Heat. London 1871, p. 279, wo k^2/ε mit ν bezeichnet ist, k^2 mit ϱ.

dies lässt erkennen, dass die Vernichtung lebendiger Kraft durch Reibung hauptsächlich nur an der Bodenfläche und an den bei Wirbelbewegungen vorkommenden Trennungsflächen stattfinden kann.

Aehnlich verhält es sich mit den Temperaturänderungen, welche durch die eigentliche Leitung der Wärme im engeren Sinne (Diffusion der bewegten Gasmolekeln zwischen wärmeren und kälteren Schichten) vor sich gehen kann. Der Leitungscoefficient für die Wärme $\varkappa$, wenn man als Einheit der Wärme diejenige wählt, welche die Volumeneinheit der Substanz um einen Temperaturgrad erwärmt (thermometrischer Wärmeleitungscoefficient), ist nach Maxwell:[1])

$$\varkappa = \frac{5}{3 \cdot \gamma}\left(\frac{k^2}{\varepsilon}\right),$$

wo γ das Verhältniss zwischen den beiden specifischen Wärmen des Gases bezeichnet.

Dieses $\varkappa$ ist in Gleichung (2) statt k^2 / ε zu setzen, um die entsprechenden Aufgaben für die Wärmeleitung zu lösen, und es zeigt sich, wenn wir $\gamma = 1.41$ setzen, dass in der oben angenommenen gleichmässig dichten Atmosphäre von 0° und 76^{cm} Quecksilber Druck eine Zeit von 36164 Jahren nöthig sein würde, um durch Leitung die letzten Temperaturunterschiede der oberen und unteren Fläche auf die Hälfte zu reduciren.

Somit wird auch für den Wärmeaustausch fast nur Strahlung und Convection der Wärme durch Luftbewegung in Betracht kommen dürfen, ausser an der Grenze gegen den Erdboden und 651
an inneren Discontinuitätsflächen.

Andererseits zeigen wiederum einfache Rechnungen, dass eine ungehemmte Circulation der Luft in der Passatzone selbst nicht bis zu 30° Breite bestehen könne.

Wenn wir uns einen rotirenden Luftring denken, dessen Axe mit der Erdaxe zusammenfällt, und der durch den Druck der benachbarten ähnlichen Ringe bald mehr nördlich, bald südlich geschoben wird, und bei dem wir die Reibung vernachlässigen können: so muss nach dem bekannten allgemeinen

---

[1]) A. a. O. S. 302.

mechanischen Princip das Rotationsmoment desselben constant bleiben. Wir wollen dasselbe, für die Einheit der Masse berechnet, mit Ω bezeichnen und die Winkelgeschwindigkeit des Ringes mit ω, seinen Radius mit ϱ, so ist bekanntlich

$$\Omega = \omega \cdot \varrho^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3$$

und es muss also ω sich umgekehrt proportional mit ϱ^2 verändern. Bezeichnen wir den mittleren Radius der Erde mit $R = 6379600^m$ und mit β die geographische Breite, mit ω_0 die Rotationsgeschwindigkeit der Erde, so ist die entsprechende relative Geschwindigkeit zur Erdoberfläche für einen Luftring, der am Aequator Windstille macht:

$$\varrho\,(\omega - \omega_0) = \omega_0 \left[\frac{R}{\cos\beta} - R\cos\beta\right].$$

Dies giebt für Luft, die in der Zone der Calmen auf dem Aequator ruht, bei Verschiebung

zur Breite	10°	die Windgeschwindigkeit	$14^m.18$	per	Sec.
„ „	20	„	57.63	„	„
„ „	30	„	133.65	„	„

Da 20^m in der Secunde die Geschwindigkeit eines Courierzuges ist, so zeigen diese Zahlen ohne Weiteres, dass solche Stürme auf breiten Erdgürteln nicht bestehen. Wir dürfen also nicht die Annahme machen, dass die am Aequator aufgestiegene Luft auch nur 20° weiter nordwärts ungehemmt wieder den Erdboden berühre.

Nicht viel besser wird die Sache, wenn man den Luftring in einer mittleren Breite ruhend nimmt. Dann würde er auf dem Aequator Ostwind ergeben, in 30° Breite Westwind; aber beide Geschwindigkeiten würden weit über die nicht allzu ungewöhnlichen Geschwindigkeiten der beobachteten Winde hinausgehen.

Da nun in der That die Beobachtungen eine Circulation der Luft in der Passatzone nachweisen, so ist die Frage aufzuwerfen: wodurch wird die westöstliche Geschwindigkeit dieser Luftmassen gehemmt und verändert? Dies nachzuweisen ist der Zweck der folgenden Betrachtungen.

§ 2.

Vom Gleichgewicht rotirender und verschieden erwärmter Luftringe.

Führen wir in die Gleichungen (1) nur rotirende Bewegungen um die Axe ein, wobei ω, Ω und ϱ ihre eben eingeführte Bedeutung behalten, so ist 652

$$u = 0$$

$$v = -z\omega = -z\frac{\Omega}{\varrho^2}$$

$$w = \quad y\omega = y\cdot\frac{\Omega}{\varrho^2}$$

und betrachten wir eine stationäre Art der Bewegung, in der Ω, p, P und ε Functionen nur von x und ϱ sind, so werden die Gleichungen (1):

$$-\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3\text{a}.$$

$$-\frac{\partial P}{\partial \varrho}\cdot\frac{y}{\varrho} - \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial p}{\partial \varrho}\cdot\frac{y}{\varrho} = -y\cdot\frac{\Omega^2}{\varrho^4}.$$

$$-\frac{\partial P}{\partial \varrho}\cdot\frac{z}{\varrho} - \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial p}{\partial \varrho}\cdot\frac{z}{\varrho} = -z\cdot\frac{\Omega^2}{\varrho^4}.$$

Die beiden letzteren Gleichungen verschmelzen in die eine:

$$\frac{\partial P}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial p}{\partial \varrho} = \frac{\Omega^2}{\varrho^3} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3\text{b}.$$

Die Gleichung (1a) ist durch die angenommenen Werthe von u, v, w erfüllt. Also sind (3a) und (3b) die einzigen zu erfüllenden Gleichungen.

Was den Werth der Dichtigkeit ε betrifft, so hängt derselbe von dem Drucke p und der Temperatur ab. Da wirksame Wärmeleitung ausgeschlossen ist, müssen wir hier das Gesetz der adiabatischen Aenderungen zwischen p und ε festhalten. Darnach ist

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0},$$

worin γ wieder das Verhältniss der specifischen Wärmen bezeichnet. Bezeichnen wir die Temperatur der betreffenden Luftmasse, welche sie unter dem Drucke p_0 annehmen würde, mit ϑ, wonach dieses Zeichen also den bleibenden Wärmegehalt der Luft bezeichnet, während ihre Temperatur mit dem Drucke wechselt, und setzen wir:

653 $$\frac{p_0}{\varepsilon_0 \vartheta} = \mathfrak{R},$$

so ist

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varrho} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \frac{\vartheta \cdot \mathfrak{R}}{p_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varrho},$$

oder wenn wir zu weiterer Abkürzung

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \mathfrak{R} \cdot p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3\text{c.}$$

$$p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \tilde{\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3\text{d.}$$

setzen, wird

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varrho} = q \cdot \vartheta \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \varrho},$$

worin q eine von ϑ und p unabhängige Constante des Gases bezeichnet.

Ebenso wird

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = q \cdot \vartheta \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x},$$

und also innerhalb einer Luftschicht von constantem ϑ und Ω nach (3a) und (3b):

$$P + q \cdot \vartheta \cdot \tilde{\omega} = -\tfrac{1}{2} \frac{\Omega^2}{\varrho^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3\text{e.}$$

Bei der sehr geringen Abweichung der Erde von der Kugelgestalt ist es erlaubt die Rechnung dadurch zu vereinfachen, dass wir die Erde zwar als eine Kugel betrachten, dagegen dem Potential P einen Zusatz geben, welcher bewirkt, dass bei der normalen Umlaufsgeschwindigkeit ω_0 der Erde die

kugelige Oberfläche derselben eine Niveaufläche werde. Zu dem Ende setzen wir

$$P = -\frac{G}{r} + \tfrac{1}{2}\,\omega_0^2 \cdot \varrho^2.$$

Dies giebt die auf die Masseneinheit wirkende Kraftcomponente in Richtung der x:

$$X = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{Gx}{r^3},$$

die in Richtung der ϱ:

$$Y = -\frac{\partial P}{\partial \varrho} = -\frac{G \cdot \varrho}{r^3} - \omega^2 \cdot \varrho\,.$$

Wenn zur letzteren noch die Centrifugalkraft $+\,\omega^2 \cdot \varrho$ hinzukommt, bleibt nur eine senkrecht gegen die Kugelfläche gerichtete Kraft auf der umlaufenden Erde übrig. Die kugelige Oberfläche wird dadurch Niveaufläche der vereinigten Potential- und Centrifugalkraft, wie es die Oberfläche der Erde wirklich ist.

Dann wird unsere Gleichung (3 e): 654

$$q \cdot \vartheta \cdot \bar{\omega} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\Omega^2}{\varrho^2} + \frac{G}{r} - \tfrac{1}{2}\,\omega_0^2 \cdot \varrho^2 + C \;\ldots\; 3\,\text{f.}$$

Die Function $\bar{\omega}$, welche eine Potenz des Druckes p mit positivem Exponenten ist, steigt und fällt mit p, bleibt unverändert, wo p unverändert bleibt, so dass wir den Sinn der Veränderungen des Druckes kurzweg nach denen von $\bar{\omega}$ ermessen können.

Innerhalb einer gleichmässigen Schicht, bei unverändertem r, d. h. in unveränderter Höhe über dem Erdboden, hat $\bar{\omega}$ ein Maximum, wo

$$\frac{\Omega^2}{\varrho^3} = \omega_0^2\ \varrho\,,$$

oder wenn wir ω statt Ω aus Gleichung (3) einführen, wo

$$\omega^2 = \omega_0^2\,,$$

d. h. da, wo der Ring Windstille macht. Gegen diese Stelle hin wächst der Druck, sowohl vom Pol, wie vom Aequator her.

§ 3.

Gleichgewicht aneinander stossender Schichten von verschiedenen Werthen des ϑ und Ω.

An beiden Seiten der Trennungsfläche solcher Schichten wird p und also auch $q\cdot\tilde{\omega}$ (s. Gleichung 3 d) denselben Werth haben müssen. Unterscheiden wir die Grössen beider Seiten durch die Indices 1 und 2, so erhalten wir (aus 3 f) demgemäss:

$$\left(\frac{1}{\vartheta_1}-\frac{1}{\vartheta_2}\right)\cdot\frac{G}{r}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\varrho^2}\left[\frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1}-\frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2}\right]+\frac{1}{2}\,\omega_0^2\varrho^2\left[\frac{1}{\vartheta_1}-\frac{1}{\vartheta_2}\right]-\frac{C_1}{\vartheta_1}+\frac{C_2}{\vartheta_2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 4.$$

Dies würde die Gleichung der Grenzcurve sein, linear nach r und quadratisch nach ϱ^2.

Um die Richtung ihrer Tangente zu finden, differentiiren wir die Gleichung 4 nach r und ϱ[1]).

$$\frac{G}{r^2}\,dr=\frac{d\varrho}{\varrho^3}\left[\frac{\Omega_1^2\cdot\vartheta_2-\Omega_2^2\cdot\vartheta_1}{\vartheta_2-\vartheta_1}-\omega_0^2\varrho^4\right]\quad\ldots\ldots\ 4\text{a}.$$

Oder wenn wir statt der Ω die entsprechenden Werthe der ω aus Gleichung (3) einsetzen

$$\frac{G}{r^2}\,dr=\varrho\cdot d\varrho\cdot\frac{(\omega_2^2-\omega_0^2)\,\vartheta_1-(\omega_1^2-\omega_0^2)\,\vartheta_1}{\vartheta_1-\vartheta_2}\ldots\ 4\text{b}.$$

655 Um zu entscheiden, wie die beiden Schichten gegen die Grenzfläche liegen müssen, wenn sie stabiles Gleichgewicht haben sollen, überlegen wir Folgendes: Die Gleichung der Grenzfläche (4) kann ihrer Herleitung nach auch geschrieben werden

$$\tilde{\omega}_1-\tilde{\omega}_2=\text{Const.}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 4\text{c}.$$

oder, wenn wir mit ds ein Längenelement derselben bezeichnen,

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\tilde{\omega}_1-\tilde{\omega}_2\right]=0.$$

---

1) In der folgenden Gleichung ist ein Druckfehler verbessert (1893).

Nun sind $\tilde{\omega}_1$ und $\tilde{\omega}_2$ Functionen, die auch über die Grenzcurve fortgesetzt einen Sinn haben und continuirlich sich ändernd fortgesetzt werden können. Die Differenz $(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2)$ wird also im Allgemeinen auf der einen Seite der Fläche bei wachsender Entfernung dn von dieser steigen, auf der anderen Seite abnehmen, d. h. negativ werden, und zwar wird dann auf der Seite, wo $\frac{d(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2)}{dn}$ positiv ist, auch für jede andere Richtung dh, in der man sich von einem Punkte der Fläche nach derselben Seite hin, wie dn von der Fläche entfernt,

$$\frac{\partial}{\partial h}(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2) > 0$$

sein müssen. Wenn dh nach der anderen Seite der Fläche $[\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 = 0]$ sieht, wird dagegen

$$\frac{\partial}{\partial h}(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2) < 0$$

negativ sein.

Wenn nun die Differenz auf der mit dem Index 1 bezeichneten Seite der Fläche positiv ist, so wird bei einer verschwindend kleinen Ausbuchtung der Grenzfläche nach dieser Seite hin, diese Ausbuchtung durch das aussen grössere $\tilde{\omega}_1$, zurückgedrängt werden; ebenso aber auch eine verschwindende Ausbuchtung nach der negativen Seite, wo im Gegentheil $\tilde{\omega}_1$ im Innern der Ausbuchtung schneller abnimmt. Dann ist also das Gleichgewicht stabil. Im Gegentheil ist es labil, wenn auf der Seite von $\tilde{\omega}_1$ die Differenz $(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2)$ negativ wird.

Wir brauchen nun nicht die Differentialquotienten für die Richtung dn zu bilden, es genügt, sie für dr oder $d\varrho$ zu bilden, und nur zu ermitteln, ob die positiven dr oder $d\varrho$ nach der Seite des Index 1 oder 2 sehen.

Indem man aus Gleichung (3f) diese Differentialquotienten bildet, ergiebt sich

$$q \cdot \frac{\partial(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2}{\partial r} = -\frac{G}{r^2}\left[\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_2}\right] \quad \ldots\ldots\ldots 4\text{d}.$$

Der Differentialquotient ist positiv, wenn $\vartheta_1 > \vartheta_2$. Die partielle 656
Differentiirung nach r, während ϱ unverändert bleibt, bezeichnet ein Fortschreiten in einer aufsteigenden Richtung der Erdaxe

parallel, d. h. in der Richtung einer nach dem Himmelspole gerichteten Linie.

Stabil ist das Gleichgewicht, wenn die wärmehaltigeren Schichten in der Richtung nach dem Himmelspol zu höher liegen.

Bilden wir dann den anderen Differentialquotienten:

$$q \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho}(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2) = \frac{1}{\varrho^3}\left(\frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} - \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2}\right) = \omega_0^2 \varrho \left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_2}\right) \ldots 4\text{e}.$$

$$= \varrho \left[\frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\vartheta_1} - \frac{\omega_2^2 - \omega_0^2}{\vartheta_2}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots 4\text{ f}.$$

Wenn hierin ϑ_1 den höheren Wärmegehalt bezeichnet, so ist das Gleichgewicht stabil, wenn längs der Grenzfläche überall

$$\varrho \cdot \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\vartheta_1} > \varrho \cdot \frac{\omega_2^2 - \omega_0^2}{\vartheta_2}.$$

Beide Werthe sind positiv, wo Westwind herrscht, negativ, wo Ostwind.

Den Ausdruck (4e) können wir auch schreiben

$$q \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho}(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2) = \frac{1}{\varrho^3} \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1 \cdot \vartheta_2}\left[\omega_0^2 \varrho^4 + \frac{\Omega_1^2 \cdot \vartheta_2 - \Omega_2^2 \cdot \vartheta_1}{\vartheta_1 - \vartheta_2}\right].$$

Damit dies in allen Breiten positiv sei, genügt dass

$$\Omega_1^2 \cdot \vartheta_2 > \Omega_2^2 \cdot \vartheta_1$$

oder

$$\frac{\Omega_1^2}{\vartheta_1} > \frac{\Omega_2^2}{\vartheta_2}.$$

Der Regel nach wird das der Fall sein, da im Allgemeinen ϑ mit ϱ gleichzeitig steigt, und zwar von einem endlichen Werthe am Pole zu einem endlichen am Aequator. Ω_1^2 steigt ebenfalls mit ϱ, und zwar von Null am Pole bis $\omega_0^2 \varrho^2$ am Aequator, so dass auch Ω^2 / ϑ von Null am Pole zu einem endlichen positiven Werthe am Aequator steigt. Wir wollen deshalb diesen Fall als den Normalfall bezeichnen. Ausnahmen werden nur unter besonderen Verhältnissen in beschränkten Zonen vorkommen können.

Im Normalfall wird das wärmere $\tilde{\omega}_1$, wenn man in gleichem Niveau fortschreitet auf Seite des grösseren ϱ, d. h.

dem Aequator zugewendet liegen, und ebenso auf Seite der grösseren r, wenn man nach dem Himmelspol hin fortschreitet, 657
d. h. ϱ und r wachsen nach derselben Seite der Grenzfläche, und diese Fläche muss so stark geneigt sein, dass die Tangente ihres Meridianschnitts das Himmelsgewölbe zwischen dem Pol und dem darunter liegenden Punkte des Horizontes schneidet. Nahe dem Aequator, wo der Pol sehr wenig sich über den Horizont hebt, giebt dies eine Neigung der Grenzflächen, die einen sehr kleinen spitzen Winkel mit dem Horizonte macht.

Dem entsprechend lässt Gleichung (4a) erkennen, dass längs der Grenzfläche selbst $dr \,/\, d\varrho$ unter diesen Umständen negativ ist.

Die aufsteigende Richtung nach einem unterhalb des Himmelspoles liegenden Punkte ist also die normale Neigung der Grenzflächen.

Wenn im Gegentheile ausnahmsweise Stellen vorkommen sollten, in denen

$$\omega_0^2 \varrho^4 + \frac{\Omega_1^2 \vartheta_2 - \Omega_2^2 \vartheta_1}{\vartheta_1 - \vartheta_2} < 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4\text{h.}$$

so würde in solchen nach Gleichung (4a) $dr \,/ d\varrho$ positiv werden, d. h. die Grenzlinie würde im Niveau steigen, wenn man sich von der Erdaxe entfernt.

Da übrigens die Gleichung (4d) zeigte, dass die wärmere Luft in Richtung der zum Pol gezogenen Linie höher liegen muss, so kann diese Linie die Grenzfläche zweier Schichten nicht zweimal schneiden und es folgt also, dass sie in dem abnormen Falle nothwendig zwischen der Grenzfläche und der unter dem Pol lagernden Horizontalebene bleiben muss. Die Tangenten des Meridianschnitts der Grenzflächen werden also den grösseren Bogen am Himmelsgewölbe zwischen Pol und äquatorialer Seite des Horizonts irgendwo schneiden müssen.

Je kleiner die Temperaturdifferenz im Verhältniss zur Differenz der Rotationsgeschwindigkeiten, desto näher kommt die genannte Tangente dem Pol.

Uebrigens können an verschiedenen Stellen der Grenzlinie derselben zwei Schichten normale und abnorme Neigungen vorkommen. Denn da in dem Ausdruck, auf dessen positiven

oder negativen Werth es ankommt (s. Gleichung 4h), die Ω und ϑ in der Ausdehnung jeder Schicht constant sind, kann dieser Werth bei gleicher Höhe über der Erde näher dem Aequator positiven Werth haben, näher den Polen negativen Werth. Dazwischen wird die Grenzcurve ein Maximum der Höhe erreichen müssen, wo die besprochene Grösse von positiv zu negativ durch Null übergeht. Ebenda ist nach (4a) auch $dr \,/\, d\varrho = 0$, also r ein Grenzwerth, hier ein Maximum.

Lage der Schichten bei continuirlicher Aenderung der Rotationsgeschwindigkeit mit dem Wärmegehalt.

658 Die bisher angestellten Betrachtungen lassen sich auch ausdehnen auf den Fall, wo Ω eine stetige Function von ϑ ist und der Werth von ϑ in den atmosphärischen Schichten sich stetig ändert. Die einzelnen Schichten sind dann nur als verschwindend in ihrer Dicke anzusehen. Dann wird Gleichung (4a)

$$G\frac{dr}{r^2} = \frac{d\varrho}{\varrho^3}\left[\frac{d\left[\frac{\Omega^2}{\vartheta}\right]}{d\left(\frac{1}{\vartheta}\right)} - \omega_0^2\varrho^4\right]$$

$$= \frac{d\varrho}{\varrho^3}\left[\Omega^2 - \vartheta\cdot\frac{d\Omega^2}{d\vartheta} - \omega_0^2\varrho^4\right].$$

Damit das Gleichgewicht stabil sei, muss der Wärmegehalt (s. Gleichung 4h) in der Richtung zum Himmelspol hin steigen. Die Schichten gleichartiger Luft aber werden weniger steil als die Polaxe steigen an allen Stellen, wo die Grösse

$$\Omega^2 - \vartheta\cdot\frac{d\Omega^2}{d\vartheta} < \omega_0^2\cdot\varrho^4,$$

dagegen steiler, wo die linke Seite grösser ist.

§ 4.

Allmählige Veränderungen des Gleichgewichts durch Reibung und Erwärmung.

Es ist bekannt, wie verschieden sich die Ausbreitung von Temperaturänderungen in der Luft gestaltet, je nachdem unten oder oben Wärme zugeführt oder entzogen wird.

Wird die untere Seite einer Luftschicht erwärmt, wie es am Erdboden durch die Sonnenstrahlen geschieht, so strebt die gewärmte Luftschicht aufzusteigen. Dies geschieht bald in kleinen überall verbreiteten zitternden und flimmernden Strömchen, wie wir sie über einer stark von der Sonne erhitzten Ebene sehen; bald sammeln sich, wo örtliche Gelegenheit ist, namentlich an Bergseiten, die kleinen Strömchen zu grösseren. Die Verbreitung der Wärme geschieht verhältnissmässig schnell durch die ganze Dicke der Luftschicht, und wenn sie in ganzer Höhe gleich wärmehaltig, also im adiabatischen Gleichgewicht ist, wird sich auch die neu hinzu- 659
kommende Luft von Anfang an durch die ganze Höhe zu vertheilen streben.

Dasselbe geschieht in ähnlicher Schnelligkeit, wenn die obere Seite einer Luftschicht abgekühlt wird.

Andererseits wenn die obere Seite gewärmt und die untere gekühlt wird, treten solche convectiven Bewegungen nicht ein. Die Leitung wirkt in grossen Dimensionen, wie ich schon oben ausgeführt habe, sehr langsam; und die Strahlung kann in erheblichem Maasse nur für diejenigen Arten von Strahlen sich geltend machen, welche stark absorbirt werden. Indessen zeigen die Versuche über Strahlung des Eises und die Beobachtungen der Nachtfröste, dass selbst Strahlen so niederer Temperatur dicke Schichten der reinen Atmosphäre grösstentheils ohne erhebliche Absorption durchlaufen können.

Eine kalte Luftschicht am Boden kann deshalb lange liegen bleiben, ebenso eine warme in der Höhe, ohne ihre Temperatur anders als höchst langsam auszugleichen.

Aehnliche Unterschiede bestehen nun auch für die Aenderung der Geschwindigkeit durch Reibung. Bei normaler Neigung der atmosphärischen Schichten ist deren oberes Ende der Erdaxe näher, als das untere. Tritt die Schicht an der Erdoberfläche als Westwind auf, so wird das Rotationsmoment der untersten Theile verzögert, deren Centrifugalkraft vermindert, und diese werden an der Polseite der Schicht aufwärts gleitend, sich der Axe nähern, um ihre stabile Gleichgewichtslage am oberen Ende der Schicht zu finden. Diese Bewegung wird ebenfalls gewöhnlich in zitternden kleinen

Strömchen, ähnlich dem Aufsteigen warmer Luft vor sich gehen, und das Rotationsmoment der ganzen Schicht ziemlich gleichmässig, in den oberen Theilen wenig später als in den unteren, verringern müssen. Da aber die Wirkung sich auf die ganze Luftmasse vertheilt, wird sie sich an der unteren Seite der Schicht viel weniger bemerklich machen, als wenn sie auf die unteren Schichten beschränkt bliebe.

Umgekehrt die Ostwinde. Deren Rotationsmoment wird durch die Reibung an der Erdoberfläche vergrössert. Die beschleunigte Luftmasse findet sich schon in der Gleichgewichtslage, die sie innerhalb ihrer Schicht einzunehmen hat, und wird nur längs der Erdoberfläche äquatorialwärts drängen in die vorliegenden Schichten hinein. Wird sie zugleich erwärmt, so wird ihr Aufsteigen langsamer vor sich gehen, als es in einer unten ruhenden Luftschicht geschähe.

Daraus ist zu folgern, dass die Aenderung durch Reibung sich in den Ostwinden auf die untere Luftschicht beschränken, hier aber verhältnissmässig wirksamer sein wird, als bei gleicher
660 Geschwindigkeit in den Westwinden. Die verzögerte Luftschicht wird im Allgemeinen — als Nordost auf der nördlichen Halbkugel — vorwärts drängen gegen den Aequator. Dabei wird sie immer wieder als Ostwind erscheinen, indem sie auf schneller rotirende Zonen der Erde zu liegen kommt. Die über ihr liegende Luft der Schichten wird da, wo unten der Platz frei wird (äusserer Rand der Passatzone), nachrücken und mit wenig verändertem Rotationsmoment unten als schwacher Ostwind erscheinen können, um dann, nach dem Aequator sich fortschiebend, die beschriebenen Einflüsse der Reibung zu erleiden. Ich möchte hier noch darauf aufmerksam machen, dass das in der tropischen Zone reichlich verdunstende Wasser ebenfalls mit der grösseren Rotationsgeschwindigkeit der umlaufenden Erde in die Passatwinde eintritt und ihr Zurückbleiben gegen die Erde vermindern muss.

In die Calmenzone selbst werden sich die unteren Schichten der Passatwinde erst einschieben können, sobald ihr Rotationsunterschied mit der Erdfläche ganz aufgehoben ist. Sie werden dann mit der Calmenzone verschmelzen und deren Masse vermehren, so dass diese sich seitlich mit ihren geneigten Grenz-

flächen immer weiter über die unter ihr schwindenden Schichten der Ostwinde ausbreiten wird.

Dadurch wird nun bedingt, dass während unten wohl meist continuirliche Uebergänge in der Temperatur und dem Rotationsmoment der Schichten stattfinden, oben schliesslich die Ränder der sich ausbreitenden Calmenzone, welche das grosse Rotationsmoment der äquatorialen Luft haben, und schon in 10° Breite als starke Westwinde, in 20° als westliche Stürme auftreten müssen, in unmittelbare Berührung mit den unterliegenden Schichten von geringerer Rotationsgeschwindigkeit und geringerer Temperatur treten.[1]) Gerade die obere Seite dieser letzteren Schichten wird kaum in ihrem Wärmegehalt und Rotationsmoment verändert sein können, während sie sich nach dem Verlust ihrer unteren Schichten abwärts und gegen den Aequator hin verschieben.

Wie ich in meiner Mittheilung[2]) an die Akademie vom 23. April 1868 gezeigt habe, können solche discontinuirliche Bewegungen eine Weile bestehen, aber das Gleichgewicht an ihrer Grenzfläche ist labil und sie lösen sich früher oder später in Wirbel auf, die zu ausgedehnten Vermischungen beider Schichten führen. Dasselbe bestätigen die Versuche mit den empfindlichen Flammen, und solche, wo man durch einen cylindrischen Strom von Luft aus einer Röhre Ausschnitte in Flammen hervorbringt und dadurch die Grenzen der bewegten 661
und ruhenden Masse sichtbar macht. Ist, wie in unserem Falle, die untere Schicht schwerer, so lässt sich zeigen, dass die Störungen zunächst ähnlich den Wasserwogen verlaufen müssen, die durch den Wind erregt werden. Der Vorgang wird sichtbar durch die gestreiften Cirruswolken, welche sich zeigen, wenn an der Grenze der beiden Schichten Nebel niedergeschlagen werden können. Wasserwogen, die durch den Wind erregt werden, zeigen denselben Vorgang, der nur durch den grösseren Unterschied der specifischen Gewichte gradweise

---

[1]) (1893) Umstände, welche dieses Verhältniss ändern können, sind im folgenden Aufsatze erörtert.

[2]) Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen, abgedruckt in: Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. I, S. 146.

verschieden ist. Heftigere Stürme bringen auch Wasserwogen zum Branden, d. h. sie bilden Schaumköpfe und werfen Wassertropfen aus der oberen Kante empor in die Luft. Bis zu einer gewissen Grenze lässt sich dieser Vorgang des Brandens auch mathematisch herleiten und analysiren, worüber ich mir spätere Mittheilungen vorbehalte. Bei geringerer Differenz der specifischen Gewichte muss der Erfolg Mischung der beiden Schichten mit Wirbelbildung und unter Umständen mit starken Regenniederschlägen sein. Eine zufällige unter sehr günstigen Umständen ausgeführte Beobachtung eines solchen Vorgangs habe ich einmal auf dem Rigi gemacht und beschrieben.[1])

Die gemischten Schichten werden Temperaturen und Rotationsmomente erhalten, deren Werthe zwischen denen ihrer Mischungsbestandtheile liegen, und ihre Gleichgewichtslage wird sich also näher gegen den Aequator hin finden als die, welche die kälteren in sie eingetretenen Schichten vorher hatten. Nach dorthin werden sie hinabsteigen, und die polwärts liegenden Schichten zurückdrängen. An Stelle der dadurch oben entstehenden Lücke werden die Schichten, denen diese herabsinkenden Theile entzogen sind, sich nach oben hin strecken und dabei ihren Querschnitt zusammenziehen müssen. Wo durch absteigende Luftmassen die unten lagernden auseinandergedrängt werden, entstehen bekanntlich Anticyklone, wo Lücken durch aufsteigende Luftmassen entstehen, Cyklone. Anticyklone und entsprechende barometrische Maxima zeigen die meteorologischen Karten[2]) an der übrigens sehr unregelmässig wechselnden Grenze des Nordostpassates im Atlantischen Meere im Winter unter 30°, im Sommer unter 40° Breite mit sehr grosser Regelmässigkeit. Bei der geneigten Lage der Schichten fallen die durch die Luftmischung häufig entstehenden Regen (*Dove's subtropische Regen*) etwas weiter nördlich, weil das Wasser ziemlich senkrecht herabfallen muss. Dort
662 beginnt dann auch die Zone der Cyklone, die übrigens gegen

---

[1]) Verhandl. der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin vom 22. October 1886. (Abgedruckt als Nr. CXXV auf S. 287 des vorliegenden Bandes.)

[2]) *Tägliche Synoptische Wetterkarten*, herausgegeben von dem Dänischen Meteorologischen Institut und der Deutschen Seewarte. Kopenhagen und Hamburg.

Norden hin immer häufiger werden. Wir dürfen wohl annehmen, dass der Vermischungsprocess nicht gleich an der Grenze der Passatzone vollständig vor sich geht, sondern Theile der stark rotirenden warmen hohen Schichten rein oder halbgemischt übrig bleiben, die erst weiter gegen den Pol hin neue Mischungen eingehen.

Im Ganzen müssen in dieser Zone der Mischungen auch unten an der Erde Westwinde die Oberhand behalten, weil der Zuwachs des gesammten Rotationsmomentes, welches die Luftmasse durch Reibung in den Ostwinden der Passatzone erfährt, schliesslich so weit steigen muss, bis irgendwo wieder Westwinde den Erdboden berühren und hinreichender Reibung unterliegen, um jenen Zuwachs vollständig wieder aufzuheben. Die im Gleichgewicht der Schichten ruhenden Luftmassen werden ja auf die Dauer keine Rotationsbewegung behaupten können, die erheblich von der des Bodens unter ihnen abweicht. Wenn ihnen also von oben her Luft starker Westwinde zugemischt wird, so werden sie ein Bewegungsmoment nach Osten hin erhalten. Ausserdem muss der fallende Regen, der grösstentheils aus den hohen Westwinden herkommt, deren Bewegung auf die durchfallenen Schichten übertragen. Endlich werden alle Zonen, welche durch äquatorialwärts von ihnen niedersteigende gemischte Massen polwärts gedrängt werden, in Westwinde übergehen.

Eine andere dauernde Quelle von Winden bildet die Kühlung des Bodens an den Polen. Die kalten Schichten werden am Boden auseinander zu fliessen streben, und Ostwinde (beziehlich Anticyklone) bilden. Ueber ihnen werden die wärmeren oberen die Lücke ausfüllen müssen, und sich als Westwinde (oder Cyklone) halten. Dadurch würde es zu einem Gleichgewicht kommen können, wie die Erörterungen des § 2 zeigen, wenn nicht die unteren kalten Schichten durch Reibung schnellere Rotationsbewegung gewönnen und dadurch zu weiterem Vorrücken befähigt würden. Dabei müssen sie, nach den oben gegebenen Erörterungen, am Boden bleiben. Dass sie dies in der That thun, zeigen die häufigen Erfahrungen an unseren winterlichen Nordostwinden, deren Kälte häufig genug die Gipfel selbst der norddeutschen Gebirge nicht er-

reicht. Uebrigens sind an dem vorderen Rande dieser in wärmeren Zonen vorrückenden Ostwinde dieselben Umstände wirksam, um Discontinuitäten zwischen der Bewegung des oberen und unteren Stromes hervorzurufen, wie an den vorrückenden Passaten, und es ist daher hier ein neuer Anstoss für Wirbelbildungen gegeben.

Die Ausbreitung der polaren Ostwinde, wenn auch in den Hauptzügen erkennbar, geht verhältnissmässig sehr unregel-
663 mässig vor sich, da die Kältepole nicht mit dem Rotationspol der Erde zusammenfallen, und niedrige Gebirge grossen Einfluss haben. Dazu kommt, dass Nebel der kalten Zone mässige Abkühlung dickerer Luftschichten, klare Luft sehr intensive Abkühlung niedriger Schichten bewirken wird. Durch solche Unregelmässigkeiten wird es bedingt sein, dass die anticyklonische Bewegung der unteren, und der grosse und allmählig wachsende Cyklon der oberen Schichten, die am Pole zu erwarten wären, sich in eine grosse Zahl unregelmässig fortwandernder Cyklone und Anticyklone mit Uebergewicht der ersteren auflösen.

Ich ziehe aus den dargelegten Erwägungen das Ergebniss, dass die hauptsächlichste Hemmung der Circulation unserer Atmosphäre, welche verhindert, dass dieselbe nicht ausserordentlich viel heftigere Winde erregt, als es thatsächlich der Fall ist, nicht so wohl in der Reibung an der Erdoberfläche, als in der Vermischung verschieden bewegter Luftschichten durch Wirbel gegeben ist, die durch Aufrollung von Discontinuitätsflächen entstehen. Im Innern solcher Wirbel werden die ursprünglich getrennten Luftschichten in immer zahlreicheren und deshalb immer dünner werdenden Lagen spiralig um einander gewickelt, und ist daher hier durch die ungeheuer ausgedehnte Berührungsfläche ein schneller Austausch der Temperatur und Ausgleichung ihrer Bewegung durch Reibung möglich.

Der vorliegende Aufsatz sollte zunächst nur zeigen, wie in der Luftmasse es durch continuirlich wirkende Kräfte zur Bildung von Discontinuitätsflächen kommen könne. Ich behalte mir vor, über den Verlauf solcher Continuitätsstörungen weitere analytische Untersuchungen später vorzulegen.

CXXVII.

Ueber atmosphärische Bewegungen.

(Zweite Mittheilung).

Zur Theorie von Wind und Wellen.

Aus den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
Sitzung vom 25. Juli 1889. S. 761—780.

In meiner am 31. Mai 1888 der Akademie gemachten 761
Mittheilung habe ich nachzuweisen gesucht, dass im Luftkreis regelmässig Zustände eintreten müssen, wo Schichten von verschiedener Dichtigkeit unmittelbar an einander grenzend über einander liegen. Der Grund für die grössere Schwere der tiefer liegenden Schicht wird dadurch bedingt sein, dass letztere entweder geringeren Wärmegehalt oder geringere Umlaufsgeschwindigkeit hat, wenn nicht beide Umstände zusammen wirken. Sobald nun eine leichtere Flüssigkeit über einer schwereren liegt mit scharf gezogener Grenze, so sind offenbar an dieser Grenze die Bedingungen für das Entstehen und die regelmässige Fortpflanzung von Wogen gegeben, wie wir sie an der Wasserfläche kennen. Dieser gewöhnlich beobachtete Fall der Wellen an der Grenzfläche zwischen Wasser und Luft ist nur dadurch von den zwischen verschiedenen Luftschichten möglichen Wellensystemen unterschieden, dass dort die Differenz der specifischen Gewichte der beiden Flüssigkeiten viel grösser ist als hier. Es schien mir von Interesse zu untersuchen, welche anderen Unterschiede im Verhalten der Luftwellen und Wasserwellen daraus folgen.

Dass dergleichen Wellensysteme an den Grenzflächen verschieden schwerer Luftschichten ausserordentlich häufig vorkommen, scheint mir nicht zweifelhaft, wenn sie uns auch in den meisten Fällen unsichtbar bleiben. Wir sehen sie offenbar nur dann, wenn die untere Schicht so weit mit Wasserdampf gesättigt ist, dass die Wellenberge, in denen der Druck geringer ist, Nebel zu bilden anfangen. Dann erscheinen streifige parallele Wolkenzüge in sehr verschiedener Breite, sich zuweilen über breite Himmelsflächen in regelmässiger Wiederholung erstreckend. Indessen scheint es mir nicht zweifelhaft, dass das, was wir so unter besonderen Bedingungen, die mehr
762 den Charakter von Ausnahmefällen haben, wahrnehmen, in zahllosen anderen Fällen vorhanden ist, ohne dass wir es sehen.

Die von mir angestellten Rechnungen zeigen ferner, dass bei den beobachteten Windstärken sich im Luftkreise nicht nur kleine Wellen, sondern auch solche von mehreren Kilometern Wellenlänge ausbilden können, die, wenn sie in der Höhe von einem oder einigen Kilometern über dem Erdboden hinziehen, die unteren Luftschichten stark in Bewegung setzen und sogenanntes böiges Wetter hervorbringen müssen. Das Eigenthümliche desselben sehe ich darin, dass Windstösse, oft von Regen begleitet, nach ziemlich gleichen Zwischenzeiten und in ziemlich gleichem Verlauf mehrmal des Tages an demselben Orte wiederkehren.[1])

Ich glaube annehmen zu dürfen, dass diese Wellenbildungen in der Atmosphäre die häufigste Veranlassung zur Vermischung der atmosphärischen Schichten, und unter geeigneten Umständen, wenn die aufsteigenden Massen Nebel bilden, zu Störungen eines nahezu labil gewordenen Gleichgewichts abgeben. Unter solchen Bedingungen, wo wir Wasserwellen branden und Schaumköpfe bilden sehen, werden zwischen den Luftschichten sich ausgiebige Mischungen herstellen müssen.

---

[1]) Die Annahme von Wogenbildung im Luftmeere, die ich kurz schon in meiner ersten Mittheilung ausgesprochen, ist seitdem auch von Hrn. Jean Luvini vorgetragen worden („La Lumière Électrique." T. XXX. p. 368, 617, 620).

Ich habe im Anfange meines früheren Aufsatzes auseinandergesetzt, wie ungenügend die bekannten Intensitäten der inneren Reibung und Wärmeleitung der Gase sind, um die Ausgleichung der Bewegungen und Temperaturen in der Atmosphäre zu erklären. Wenn nun die mechanische Wärmetheorie uns gelehrt hat, die Reibung in den Gasen als die Vermischung verschieden bewegter Schichten, die Wärmeleitung als die Vermischung verschieden temperirter Schichten aufzufassen: so ist verständlich, dass eine ausgiebigere Vermischung der Schichten in der Atmosphäre die Wirkungen der Reibung und Wärmeleitung in erhöhtem Maasse hervorbringen muss,[1]) aber allerdings nicht in ruhigem, gleichmässigem Fortgange, sondern ruckweise springend, wie es eben der besondere Charakter der meteorologischen Processe ist.

Ich habe es deshalb für wichtig gehalten, die Theorie der Wellen an der gemeinsamen Grenzfläche zweier Flüssigkeiten zu bearbeiten. In den bisherigen Arbeiten über Wasserwellen ist, so weit mir bekannt, der Einfluss der Luft und deren Mitbewegnng immer vernachlässigt worden; das durfte in der vorliegenden Arbeit nicht geschehen. Das Problem wird dadurch
viel verwickelter und schwieriger; und da schon die einfachere 763
Aufgabe, die vom Einfluss des Windes absieht, unter den Händen vieler ausgezeichneter Mathematiker nur unvollständige und angenäherte Lösungen unter günstig gewählten Voraussetzungen gefunden hat, so bitte ich zu entschuldigen, dass ich zunächst auch nur einen einfachsten Fall des Problems behandelt habe, nämlich die Bewegung geradliniger Wellenzüge, welche an der ebenen Grenzfläche unendlich ausgedehnter Schichten zweier verschieden dichter Flüssigkeiten, die auch verschiedene strömende Bewegung haben, sich in unveränderter Form und mit constanter Geschwindigkeit fortpflanzen. Ich werde Wogen dieser Art stationäre Wogen nennen, da sie auf ein Coordinatensystem bezogen, welches selbst mit den Wellen fortrückt, eine stationäre Bewegung der beiden Flüssigkeiten

[1]) Es würde das vielleicht den Voraussetzungen entsprechen, die der von Hrn. Oberbeck (15. März 1888) der Akademie vorgelegten Theorie zu Grunde liegen.

darstellen. Da in der relativen Bewegung der verschiedenen Theile eines geschlossenen Körpersystems dadurch nichts geändert wird, dass das Ganze eine gleichmässige geradlinige Geschwindigkeit nach irgend einer Richtung hin erhält, so ist diese Umformung unseres Problems erlaubt.

Uebrigens beabsichtige ich heut aus meiner betreffenden mathematischen Untersuchung nur die Ergebnisse zu geben. Die vollständige Darstellung derselben behalte ich mir vor, an anderer Stelle zu veröffentlichen.

Ehe ich zu der Theorie der Luftwogen übergehe, will ich aber noch eine Ergänzung der in meiner Mittheilung vom Mai 1888 gegebenen Betrachtungen vorführen, durch welche das räumliche Gebiet, in welchem wir die Bedingungen für die Entstehung von Luftwogen zu suchen haben, näher begrenzt wird.

§ 5.

Das Aufsteigen gemischter Schichten.

In § 3 meiner früheren Mittheilung habe ich nachgewiesen, welches die Gesetze des Gleichgewichts — falls es zu einem solchen käme — zwischen verschieden erwärmten und verschieden stark rotirenden Luftringen in der Atmosphäre, die übrigens alle als unter sich gleichartig in der Mischung angenommen sind, sein würden. Ich gehe zurück auf die Gleichung (4 a). Darin ist die Lage eines Punktes der Atmosphäre gegeben durch die Grössen

ϱ Entfernung von der Erdaxe,

r Entfernung vom Mittelpunkt der Erde.

Ferner tst ω_0 die Winkelgeschwindigkeit der festen Erde, Ω_1 und Ω_2 sind die constant bleibenden Momente der Rotations-
764 bewegung für die Einheit der Masse der einen oder anderen Luftschicht; ϑ_1 und ϑ_2 sind die Grössen, welche ich ihren Wärmegehalt genannt, und die wohl besser mit dem von Hrn. von Bezold glücklich gewählten Namen der potentiellen Temperaturen bezeichnet werden, nämlich diejenigen Temperaturen, welche die betreffenden Luftmassen erhalten würden, wenn beide adiabatisch auf normalen Druck gebracht wären.

G ist die Constante der Schwere. Dann ist längs der Grenzfläche:

$$\frac{G}{r^2}\,dr = \frac{d\varrho}{\varrho^3}\left[\frac{\Omega_1^2 \cdot \vartheta_2 - \Omega_2^2 \cdot \vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} - \omega_0^2\,\varrho^4\right] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

Das Verhältniss $d\varrho : dr$ bezeichnet zugleich das Verhältniss der Sinus der beiden Winkel, welche die Tangente der Curve in der Meridianebene einerseits mit der Erdaxe, andererseits mit der Horizontalen bildet. Wenn die wärmere Schicht, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, gleichzeitig das grössere Rotationsmoment hat, ist das Verhältniss $d\varrho : dr$ negativ, und die Tangente der Grenzfläche schneidet das Himmelsgewölbe unterhalb des Pols. Die kühlere, langsamer rotirende Masse, der wir den Index 2 geben wollen, liegt in dem spitzen Winkel zwischen der Grenzfläche und der polwärts gewendeten Erdoberfläche.

Wenn nun längs der Grenzfläche beider Schichten eine Vermischung von Massentheilen m_1 und m_2 derselben eintritt, so wird das Rotationsmoment Ω der gemischten Masse gegeben durch die Gleichung:

$$(m_1 + m_2) \cdot \Omega = m_1 \cdot \Omega_1 + m_2 \cdot \Omega_2,$$

da die Summe der Rotationsmomente unveränderlich ist, wenn keine rotirenden Kräfte von aussen einwirken. Ebenso wird die potentielle Temperatur ϑ der Mischung gegeben durch:

$$(m_1 + m_2)\,\vartheta = m_1 \cdot \vartheta_1 + m_2 \cdot \vartheta_2.$$

Setzen wir nun in Gleichung 1 die Mischung zunächst an Stelle der Masse (2), um die Richtung der Grenzlinie zwischen der Masse (1) und der Mischung zu finden, und bezeichnen wir die entsprechenden Werthe von $d\varrho$ und dr mit $d\varrho_1$ und dr_1, so giebt unsere Gleichung 1 nach einigen leichten Umformungen

$$\varrho^3 \cdot \frac{G}{r^2}\left[\frac{dr_1}{d\varrho_1} - \frac{dr}{d\varrho}\right] = \frac{m_1\,\vartheta_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)^2}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1\text{a}.$$

Da im stabilen Gleichgewicht $\vartheta_2 < \vartheta_1$ sein muss, so zeigt diese Gleichung, dass

$$\frac{dr_1}{d\varrho_1} < \frac{dr}{d\varrho} \text{ oder } \frac{d\varrho_1}{dr_1} > \frac{d\varrho}{dr}$$

765 d. h. dass die Grenzfläche zwischen (1) und der Mischung steiler gegen die Horizontalebene als die von (1) und (2) stehen muss.

Ebenso ergiebt sich, dass das Verhältniss $dr_2 : d\varrho_2$ zwischen Masse (2) und Mischung gegeben wird durch die Gleichung:

$$\varrho^3 \cdot \frac{G}{r^2}\left[\frac{dr_2}{d\varrho_2} - \frac{dr}{d\varrho}\right] = \frac{m_2 \cdot \vartheta_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)^2}{\vartheta_1 - \vartheta_2}.$$

Es ist also $\frac{dr_2}{d\varrho_2} > \frac{dr}{d\varrho}$, d. h. die Grenzfläche zwischen (2) und Mischung muss mit dem polwärts gerichteten Horizont einen kleineren Winkel als die Masse (1) bilden.

Es ist hierbei zu beachten, dass die Verhältnisse $d\varrho : dr$ positiv sind, wenn die Tangente der Grenzlinie steiler als die Pollinie steht, im anderen Falle negativ, und dass das Grösserwerden einer negativen Grösse Verkleinerung ihres absoluten Werthes bedeutet.

Nun kann die geforderte Richtung für die beiden Grenzlinien der Mischung aber nur eintreten, wenn diese sich zwischen den beiden Massen (1) und (2) nach oben in die Höhe zieht. Nur dort kann sie eine Gleichgewichtslage finden.

Daraus ergiebt sich die wichtige Folgerung, dass alle neu entstehenden Mischungen von Schichten, die mit einander im Gleichgewicht waren, sich zwischen den beiden ursprünglich vorhandenen Schichten in die Höhe ziehen müssen, ein Vorgang, der natürlich viel energischer vor sich gehen wird, wenn in den aufsteigenden Massen sich Niederschläge bilden sollten.

Indem die gemischten Schichten nach aufwärts steigen, werden sich die nördlich und südlich davon liegenden, bisher ruhig gebliebenen Theile der Schichten unter einander bis zur Berührung nähern, wobei die Differenz ihrer Geschwindigkeiten sich nothwendig vergrössern muss, da die äquatorialwärts gelegenen Schichten grösserer Rotation auf engeren Radius, die polwärts gelegenen schwächerer Rotation auf grösseren Radius rücken. Geschähe dieses gleichmässig auf einem ganzen Parallelkreise, so würden wir wieder eine neue Trennungsfläche verschieden stark rotirender Schichten erhalten, deren äquatoriale Seite stärkeren Westwind zeigen würde als die polare, welche

letztere gelegentlich auch Ostwind zeigen könnte. Bei den vielfachen localen Störungen der grossen Luftströme wird sich in der Regel wohl keine zusammenhängende Trennungslinie ausbilden, sondern diese wird in einzelne Stücke zerfallen, welche als Cyclone auftreten müssen.

Sobald die sämmtlichen gemischten Massen aber ihr Gleichgewicht gefunden haben, werden sich unten wieder die Trennungsflächen bilden, und neue Wellenbildung wird eine 766
Wiederholung derselben Processe einleiten.[1]

Aus diesen Erwägungen folgt, dass der Ort der Wogenbildung zwischen den Luftschichten namentlich in den tieferen Theilen der Atmosphäre zu suchen sein wird, während in den höheren ein überwiegend continuirlicher Uebergang der verschiedenen Werthe der Rotation und Temperatur zu erwarten ist. Die Grenzflächen verschiedener Luftschichten, auf denen die Wellen verlaufen, werden ein Ufer am Erdboden haben, und es werden die Schichten dort seicht auslaufen. Die Erfahrung lehrt ebenso wie die Theorie, dass Wasserwellen, die gegen ein seichtes Ufer anlaufen, dort branden; und selbst Wellen, die ursprünglich dem Ufer parallel fortliefen, pflanzen sich in seichtem Wasser langsamer fort. Anfangs geradlinige Wellen also, die dem Ufer parallel fortlaufen, werden in Folge der Verzögerung daselbst sich krümmen müssen, wobei sie die Convexität ihres Bogens dem Ufer zuwenden; in Folge dessen laufen sie auf dieses zu und zerschellen.

Ich werde im nächsten Paragraphen zeigen, in welchen Verhältnissen die Bewegungen und Formen der Wasserwellen geändert werden müssen, um auf die Luft übertragen zu

---

[1]) Im letzten Abschnitt meiner früheren Mittheilung (S. 289 des vorliegenden Bandes) habe ich den Ursprung der Discontinuitäten hauptsächlich in die oberen Schichten der Atmosphäre gelegt. Aber der Ausgangspunkt war dort ein anderer. Dort war die Frage: wenn einmal die Atmosphäre in einem Anfangsstadium continuirlicher Bewegung ohne Trennungsflächen wäre, wo würden sich solche zuerst bilden müssen? Darauf lautet die Antwort: an den oberen Grenzen des tropischen Calmengürtels. Hier ist die Frage: wo werden sich in Folge von Vermischungsprocessen Trennungsflächen erneuern müssen? Aber den Satz auf S. 306, der vom Herabsteigen der gemischten Schichten redet, muss ich zurücknehmen, nachdem ich das in diesem Paragraphen besprochene Gesetz gefunden.

werden. Ganz streng sind diese Verhältnisse von den Wasserwellen, die am Ufer zerschellen, allerdings auf die Luft nicht zu übertragen, auch giebt selbst die bisherige einfachere Theorie, die den Einfluss der Luft vernachlässigt, darüber keinen vollständigen Aufschluss. Aber die Bedingungen entfernen sich doch nicht erheblich von denen, wo wir strenge Uebertragungen machen können, und ich glaube deshalb nicht zweifeln zu dürfen, dass Luftwellen, die in dem idealen, rings um die Axe symmetrischen Luftkreise zunächst nur in westöstlicher Richtung laufen könnten, einmal erregt, sich der Erdoberfläche zuwenden und in nordwestlicher Richtung (auf der nördlichen Halbkugel) gegen diese anlaufend zerschellen müssen.

Ein anderer Process, der das Branden der Wellen auf der Höhe ihrer Berge bewirken kann, ist die allmälige Steigerung des Windes. Das bestätigt auch meine Analyse; sie zeigt, dass
767 Wellen von gegebener Wellenlänge nur bei beschränkter Windstärke bestehen können. Es wird Steigerung des Geschwindigkeitsunterschieds in der Atmosphäre oft genug vorkommen können, aber es lassen sich noch nicht allgemein wirkende Bedingungen für einen solchen Vorgang angeben.

Ich will hier gleich noch einen Punkt erwähnen, der Bedenken gegen meine Deutung erregen könnte. Hoch aufgetriebene Wasserwellen haben immer schmalere, stärker gekrümmte Wellenberge und breitere, flacher gekrümmte Thäler Die Analyse ergiebt dasselbe unabhängig von der Art der Medien. Luftwellen, wenn sie uns als Wolkenstreifen sichtbar werden, haben dagegen rundere Köpfe. Dabei müssen wir aber bedenken, dass nach den zuerst von Reye aufgestellten Sätzen Luft, die Nebel gebildet hat, leichter wird, als sie vorher war. Was wir als Nebel erscheinen sehen, drängt also nach oben und schwellt die Wellenberge mehr, als es in durchsichtiger Luft der Fall zu sein braucht.

§ 6.

Folgerungen aus dem Princip der mechanischen Aehnlichkeit.

Beschränken wir uns auf die Aufsuchung von solchen geradlinigen Wellen, welche ohne Aenderung ihrer Form sich

mit constanter Geschwindigkeit fortpflanzen, so können wir uns, wie schon bemerkt, eine solche Bewegung als eine stationäre vorstellen, indem wir den beiden Medien eine constante geradlinige Geschwindigkeit beigelegt denken, welche der der Wellen gleich und entgegengesetzt gerichtet ist. Dadurch wird bekanntlich an den relativen Bewegungen der verschiedenen Theile der Massen gegen einander nichts geändert. Die Grenzfläche beider Medien erscheint alsdann als eine im Raume feste Fläche, über ihr strömt das obere Medium in einer, das untere in entgegengesetzter Richtung. In grösserer Entfernung von der Grenzfläche werden beide Bewegungen in eine geradlinige Strömung von constanter Geschwindigkeit übergehen, in der Nähe der gewellten Grenzfläche dagegen der Richtung dieser folgen müssen.

Bezeichnen wir nun die Geschwindigkeitscomponenten der Flüssigkeitstheilchen in dem durch die rechtwinkeligen Coordinaten x, y gegebenen Punkte beziehlich mit u und v, so sind diese nach den gemachten Annahmen unabhängig von der Zeit, und wir können sie für incompressible Flüssigkeit bei rotationsfreier Strömung bekanntlich darstellen in der Form:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$ 768

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

wo ψ eine Function der Coordinaten ist, die der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2.$$

Die Gleichungen

$$\psi = \text{Const.}$$

sind in diesem Falle bekanntlich die Strömungslinien der Flüssigkeit. Die Grenzlinie beider Flüssigkeiten muss eine solche Strömungslinie sein, und wir wollen ihr für beide Seiten den Werth

$$\overline{\psi}_1 = 0 \text{ und } \overline{\psi}_2 = 0$$

beilegen. Die oben gestrichenen Buchstaben sollen sich auch im Folgenden immer auf die Werthe an der Grenzfläche beziehen.

Die erste Grenzbedingung, die wir zu erfüllen haben, ist also, dass, wenn wir ψ_1 und ψ_2 als Functionen von x und y darstellen, die beiden Gleichungen

$$\bar{\psi}_1 = 0 = \bar{\psi}_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2\,\text{a}$$

eine übereinstimmende Lösung zulassen.

Die zweite Grenzbedingung ist die, dass der Druck an der Grenzfläche an beiden Seiten derselbe sein muss.

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2\,\text{b.}$$

Nun ist unter den gemachten Voraussetzungen, wenn s die Dichtigkeit der betreffenden Flüssigkeit und C eine Constante bezeichnet:

$$p = C - s \cdot g \cdot x - \tfrac{1}{2} s \cdot \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right].$$

Die Gleichung 2b ist also zu schreiben:

$$\text{Const} = (s_1 - s_2)\, g \cdot \bar{x} + \tfrac{1}{2} s_1 \cdot \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial N_1}\right)^2 - \tfrac{1}{2} s_2 \cdot \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial N_2}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad 3$$

Die Gleichungen 2 und 2a bleiben richtig, wenn wir entweder die Werthe beider Coordinaten x und y, oder den des ψ_1, oder den des ψ_2 in beliebigem Verhältnisse vergrössern. Da die Dichtigkeiten s_1 und s_2 in den genannten Gleichungen nicht vorkommen, so kann auch deren Aenderung beliebig geschehen. Die Gleichung 3 aber erfordert, dass die Grössen

769 $$\frac{s_1}{s_2 - s_1} \cdot \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial N_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad \frac{s_2}{s_2 - s_1} \cdot \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial N_2}\right)^2 \cdot \frac{1}{x}$$

unverändert bleiben. Wenn also s_1 und s_2 sich ändern, und wir ihr Verhältniss

$$\frac{s_1}{s_2} = \sigma$$

setzen, wenn ferner die Coordinaten auf das $n$fache wachsen, ψ_1 auf das $a_1$fache, ψ_2 auf das $a_2$fache, so müssen

$$\frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot \frac{a_1^2}{n^3} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1-\sigma} \, \frac{a_2^2}{n^3}$$

beide ungeändert bleiben.

Oder wenn wir hierin die Verhältnisse, in denen die Geschwindigkeiten geändert sind

$$\frac{a_1}{n} = b_1$$

$$\frac{a_2}{n} = b_2$$

setzen, kann der obige Satz auch so ausgesprochen werden, dass die geometrisch ähnliche Wellenform eintreten kann, wenn

$$\frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot \frac{b_1^2}{n} \text{ und } \frac{1}{1-\sigma} \cdot \frac{b_2^2}{n}$$

ungeändert bleiben.

1. Wird das Verhältniss der Dichtigkeiten nicht geändert, so müssen in geometrisch ähnlichen Wellen die Lineardimensionen wie die Quadrate der Geschwindigkeiten beider Medien wachsen; die letzteren also in gleichem Verhältniss.

Bei doppelter Windgeschwindigkeit werden wir also Wellen von vierfachen Lineardimensionen haben können.

Dieser Satz ist nicht auf stationäre Bewegungen beschränkt, sondern allgemeingültig.[1]) Die weiteren Sätze gelten aber nur für stationäre Wogen.

2. Wenn das Verhältniss der Dichtigkeiten σ geändert wird, muss constant bleiben die Grösse

$$\sigma \cdot \frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{s_1 \cdot b_1^2}{s_2 \cdot b_2^2} = \text{Const.}$$

d. h. das Verhältniss der lebendigen Kräfte ent- 770
sprechender Volumeinheiten muss ungeändert bleiben. Als entsprechende Volumeinheiten haben namentlich die zu gelten, welche in das Bereich der von der Wellenfläche entfernteren geradlinigen Strömung fallen; aber auch für solche Volumelemente, deren Mittelpunkte einander abbilden, gilt dasselbe.

3. Sollen bei geänderten Dichtigkeiten geometrisch ähnliche Wellen dieselbe Wellenlänge behalten ($n = 1$), so muss wachsen

---

[1]) S. meinen Aufsatz: „Ueber ein Theorem geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend" in den Monatsberichten der Berliner Akademie 1873, S. 501—514. Abgedruckt auf S. 158—171 des ersten Bandes dieser Sammlung.

$$b_1 \text{ wie } \sqrt{\frac{1}{\sigma} - 1} = \sqrt{\frac{s_2 - s_1}{s_1}}$$

$$b_2 \text{ wie } \sqrt{1 - \sigma} = \sqrt{\frac{s_2 - s_1}{s_2}}.$$

Für Luft und Wasser ist bei 0° C. das Verhältniss

$$\sigma = \frac{1}{773 \cdot 4}$$

zwischen zwei Luftschichten von 0° und 10°

$$\sigma = \frac{273}{283}.$$

Sollen beide Grenzflächen congruente Wellen, also auch gleiche Wellenlänge zeigen, und bezeichne ich die Grössen b_1 und b_2 für die beiden Luftschichten mit β_1 und β_2, so wäre hiernach zu nehmen

$$b_1 = 145.21 \cdot \beta_1$$
$$b_2 = \quad 5.316 \cdot \beta_2.$$

Beide Geschwindigkeiten also, namentlich die des Windes relativ zu den Wellen müssten für die Luftwogen erheblich vermindert werden.

Der Werth der bei Aenderungen des Materials unveränderlichen Grösse

$$\frac{s_2 \cdot b_2^2}{s_1 \cdot b_1^2} = \mathfrak{p}$$

für eine gewisse Form von Wellen, deren Energievorrath gleich der der geradlinigen Strömungen längs ebener Grenzflächen ist, ergiebt sich wenigstens angenähert aus meinen Rechnungen

$$\mathfrak{p} = 0.43103.$$

Verstehen wir unter Windstärke w die Differenz der Bewegung beider Medien

$$w = b_1 + b_2,$$

so wird für Luft und Wasser

$$\frac{b_2}{w} = 0.069469$$

771 und wenn $w = \frac{10^{\text{m}}}{\text{sed.}}$

$$\lambda = 0^{m}.208965$$

dagegen für die beiden Luftschichten

$$\frac{\beta_2}{\beta_1 + \beta_2} = 0.67135$$

und für $w = 10^{m}$

$$\lambda = 549^{m}.65.$$

Daraus ergiebt sich, dass wenn man für diese Form der Luftwellen dieselbe Windgeschwindigkeit erhalten will, wie für geometrisch ähnliche Wasserwellen, man die Wellenlänge der Luftwellen im Verhältniss 1 : 2630.3 steigern muss.

Das Verhältniss wird etwas kleiner, wenn man die Rechnung für die niedrigsten Wellen ausführt, für welche

$$\mathfrak{p} = 0.15692.$$

Dies giebt für Luft und Wasser

$$\frac{b_2}{w} = 0.090776$$

und für 10^{m} Windgeschwindigkeit

$$\lambda = 0^{m}.83222.$$

Die geforderte Vergrösserung der Wellenlänge für gleiche Windstärke würde 1 : 2039.6 sein, was für 10^{m} Wind über 900^{m} Wellenlänge giebt.

Da wir bei den am Erdboden vorkommenden mässigen Windstärken oft genug Wellen von einem Meter Länge haben, so würden dieselben Winde in die Luftschichten von 10^{0} Temperaturdifferenz übersetzt, also 2 bis 5 Kilometer Länge erhalten. Grösseren Meereswellen von 5 bis 10^{m} würden Luftwellen von 15 bis 30^{km} entsprechen können, die schon das ganze Firmament des Beschauers bedecken, und den Erdboden in einer Tiefe, die kleiner als die Wellenlänge ist, unter sich haben würden, also den Wellen in seichtem Wasser zu vergleichen wären, die das Wasser am Grunde schon erheblich in Bewegung setzen.

Das Princip der mechanischen Aehnlichkeit, auf welches die Sätze dieses Paragraphen begründet sind, gilt für alle Wellen, die in constanter Form und mit constanter Fortpflanzungsgeschwindigkeit vorwärts gehen. Es lässt sich deshalb auch auf die Wellen in seichtem Wasser, wenn dieses gleichmässige Tiefe hat, übertragen, vorausgesetzt, dass die

Tiefe der unteren Schicht in dem Abbilde in gleichem Verhältniss, wie die übrigen Lineardimensionen der Wellen verändert wird.

772 Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit solcher Wellen in seichtem Wasser hängt von der Tiefe des Wassers ab. Für Wasserwellen von geringer Höhe und ohne Wind kann sie in bekannter Weise berechnet werden. Wenn wir die Tiefe des Wassers mit h bezeichnen und

$$\frac{2\pi}{\lambda} = n$$

setzen, ist

$$b^2 = \frac{g}{n} \cdot \frac{e^{nh} - e^{-nh}}{e^{nh} + e^{-nh}},$$

was für $h = \infty$ in

$$b^2 = \frac{g}{n} = \frac{g\lambda}{2\pi}$$

und für kleine Werthe von h in

$$b^2 = g \cdot h$$

übergeht. Wenn übrigens die Tiefe des Wassers nicht verhältnissmässig klein gegen die Wellenlänge ist, so ist die Verzögerung unbedeutend:

$\frac{h}{\lambda} = \frac{1}{2}$ verringert die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wie 1:0.95768

$= \frac{1}{4}$ „ „ „ „ 1:0.80978

$= \frac{1}{10}$ „ „ „ „ 1:0.39427.

Der Wind unter den Wellenthälern ist bei unterer Windstille der Fortpflanzungsgeschwindigkeit entgegen, unter den Wellenbergen aber gleich gerichtet. Da die Amplituden am Boden wie $e^{-nh}:1$ gegen die der Oberfläche abnehmen, so können sich unten diese Schwankungen nur bemerklich machen, wenn die Tiefe merklich kleiner als die Wellenlänge ist. Aenderungen des Barometerstandes sind nur zu erwarten, wenn beim Vorübergang der Wellen starker Windwechsel merklich wird.

§ 7.

Grundlagen der Rechnung.

Ich will dieselben hier nur so weit angeben, als es nöthig ist, damit jeder mit den analytischen Methoden vertraute Forscher meine Rechnungsergebnisse wiederfinden kann.

Ich führe zwei neue Variable η und ϑ ein, die mit den rechtwinkeligen Coordinaten x und y so verbunden sind, dass

$$e^{n(x+yi)} = a\,[\cos(\vartheta + \eta i) - \cos\varepsilon] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 1,$$

worin n, a und ε Constanten bezeichnen. Die Grenzlinie 773
zwischen den beiden Flüssigkeiten entspricht einem constanten positiven Werthe h von η, also

$$\overline{\eta} = h.$$

Daraus ergeben sich für diese Grenzlinie die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} e^{n\overline{x}}\cdot\cos(n\overline{y}) &= a\,[\cos ih\cdot\cos\vartheta - \cos\varepsilon] \ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{n\overline{x}}\cdot\sin(n\overline{y}) &= -\frac{a}{i}\sin(ih)\cdot\sin\vartheta \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}\ 1\,\text{a}.$$

Nach Elimination von h giebt dies eine Gleichung zwischen $\overline{x}$ und $\overline{y}$, als Gleichung der Grenzlinie. Ausser der Constanten a, die den Anfangspunkt der x-Coordinate und dem n, welches die Wellenlänge bestimmt, enthält diese Gleichung zwei willkürlich festzusetzende Parameter h und ε, die die Gestalt der Curve bestimmen.

Wir nehmen x vertical nach oben steigend, und setzen dann für den Raum der oberen Flüssigkeit, für die wir den Index 1 gebrauchen:

$$\psi_1 + \varphi_1\, i = b_1\,[\eta - h - i\vartheta],$$

wodurch $\psi + \varphi i$ gleichzeitig eine Function von $(x + yi)$ wird. Für $h = \eta$ wird $\psi_1 = 0$, so dass nach unten hin die Grenzlinie mit einer Strömungslinie zusammenfällt. Für $\eta = +\infty$ wird:

$$n\,(x + yi) = \eta - i\vartheta = \frac{1}{b_1}\,[\psi_1 + \varphi_1\, i] + h$$

oder

$$\begin{aligned} \psi_1 &= nb_1 x \\ \varphi_1 &= nb_1 y, \end{aligned}$$

so dass in grosser Höhe die Bewegung geradlinig strömend mit der Geschwindigkeit nb_1 ist.

Für den unteren Raum, wo $\eta < h$ ist, und x überwiegend negative Werthe hat, setze ich:

$$\frac{1}{b_2}[\psi_2 + \varphi_2 i] = -nx - nyi + \log\left(\frac{a}{2}\right) + h$$

$$-2 \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\infty} \left[\frac{1}{\mathfrak{a}} \cdot e^{-\mathfrak{a}h} \cdot \frac{\cos(\varepsilon\mathfrak{a}) \cdot \cos\mathfrak{a}(\vartheta + \eta i)}{\cos(\mathfrak{a}hi)}\right].$$

Daraus ergiebt sich für $\eta = h$

$$\frac{1}{b_2}\psi_2 = -n\bar{x} + \log\left(\frac{a}{2}\right) + h - 2\sum_1^\infty \left[\frac{1}{\mathfrak{a}} \cdot e^{-\mathfrak{a}h} \cdot \cos(\varepsilon\mathfrak{a}) \cdot \cos\mathfrak{a}\vartheta\right]$$

Wenn man aus der Gleichung 1 den Werth von $\bar{x}$ bestimmt, zeigt sich, dass für $\eta = h$, auch $\psi_2 = 0$ wird, dass die Grenzlinie also auch für das zweite Medium Strömungslinie ist.

774 Für $x = -\infty$ wird nach 1

$$\cos\vartheta \cdot \cos\eta i = \cos\varepsilon$$
$$\sin\vartheta \cdot \sin\eta i = 0.$$

Dem entsprechen die Werthe

$$\sin\eta i = 0$$
$$\cos\vartheta = \cos\varepsilon.$$

In Folge dessen wird der Werth von

$$\frac{1}{b_2} \cdot \psi_2 = -nx + \log\left(\frac{a}{2}\right) + h - 2\sum_1^\infty \left[\frac{e^{-\mathfrak{a}h} \cdot \cos^2(\varepsilon\mathfrak{a})}{\mathfrak{a} \cdot \cos(\mathfrak{a}hi)}\right]$$
$$(x = -\infty)$$

Rechts ist das erste Glied unendlich, alles übrige endlich, wenn h eine positive Grösse ist. In grossen Tiefen also reducirt sich der Werth von ψ_2 auf

$$\psi_2 = -nb_2 x$$

d. h. auch dort ist die Bewegung geradlinig strömend mit der Geschwindigkeit $-nb_2$.

Die zweite Grenzbedingung, die Gleichheit des Druckes an beiden Seiten der Grenzfläche betreffend, kann aber durch die

gemachten Annahmen nur für geringe Wellenhöhen annähernd erfüllt werden. Die Convergenz der dabei in Betracht kommenden Reihen hängt von dem Factor e^{-ah} ab. Sobald die Grösse h positiv ist, und nicht allzu klein, convergiren die Reihen verhältnissmässig schnell und man erhält dann ausreichende Annäherungen an die wahren Werthe dadurch, dass man im Werthe des Drucks aus Gleichung 3 die Glieder gleich Null macht, welche die erste bis dritte Potenz von e^{-h}, beziehlich von $1/\cos(hi)$ multipliciren. Die Glieder ohne diesen Factor bestimmen nur den Werth der Integrationsconstante, die die linke Seite der Gleichung bildet. Diese genannten Glieder ersten bis dritten Grades sind lineare Functionen von $\cos\vartheta$, $\cos 2\vartheta$ und $\cos 3\vartheta$, und indem die Coefficienten dieser drei Grössen gleich Null gesetzt werden, erfüllen wir Gleichung 3 bis auf Glieder, welche $1/\cos(hi)$ in vierter oder höherer Potenz enthalten. Es entspricht diese Annahme aber nur einer möglichen einzelnen Art von Wellen, nicht der allgemeinsten Form.[1]) Sie ist als Paradigma nur gewählt der einfacheren Rechnung wegen.

Die drei Gleichungen, welche man auf diese Weise erhält, sind die unten folgenden. Zur kürzeren Bezeichnung sind darin gesetzt:

$$\frac{s_1 \cdot b_1^2 \cdot \pi}{g \cdot \lambda \cdot (s_2 - s_1)} = \mathfrak{P},$$ 775

$$\frac{s_2 \cdot b_2^2 \cdot \pi}{g \cdot \lambda \cdot (s_2 - s_1)} = \mathfrak{Q},$$

$$\frac{1}{\cos hi} = \zeta,$$

$$\zeta \cdot \cos \varepsilon = z.$$

[1]) (1893) Eine weniger weit gehende Annäherung erhält man, wenn man die Bedingung weglässt, dass die Coefficienten von $\cos(3\vartheta)$ gleich Null werden sollen. Dies hat den Vortheil, dass ausser der immer klein zu nehmenden Wellenhöhe auch das Verhältniss zwischen den b_1 und b_2, also auch das zwischen der Windstärke und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen willkürlich bleibt, und man Aufschluss über die Formunterschiede niedriger, unter verschieden starkem Winde laufender Wellen erhält.

Die Grösse $\varkappa$ bestimmt die Höhe der Wellen, welche nach Gleichung 1a ist

$$H = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \log \text{nat.} \left[\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\right].$$

Die drei Gleichungen lassen sich dann schreiben:

$$\text{I.} \quad \varkappa \left\{ \mathfrak{Q}\left[2 - 2\varkappa^2 + \tfrac{1}{2}\zeta^2\right] + \mathfrak{P}\left[2 + \tfrac{3}{2}\zeta^2\right] - (1+\zeta^2) \right\} = 0,$$

$$\text{II.} \quad \mathfrak{Q}\left[2\varkappa^2 - \zeta^2\right] - \mathfrak{P} \cdot \zeta^2 - \tfrac{1}{2}\varkappa^2 + \tfrac{1}{4}\zeta^2 = 0,$$

$$\text{III.} \quad \varkappa \left\{ \mathfrak{Q}\left[2\varkappa^2 - \tfrac{3}{2}\zeta^2\right] + \mathfrak{P} \cdot \frac{\zeta^2}{2} - \tfrac{1}{3}\varkappa^2 + \tfrac{1}{4}\zeta^2 \right\} = 0.$$

Von den vier Grössen, die hierin vorkommen, werden sich also im Allgemeinen je drei durch die vierte bestimmen lassen. Nur das Werthsystem

$$\varkappa = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{Q} + \mathfrak{P} = \tfrac{1}{4}$$

lässt ζ unbestimmt. Diese Lösung passt für die ganz niedrigen Wellen, bei denen $\varkappa$ gegen ζ zu vernachlässigen ist.

Da im Allgemeinen eine von den vier Grössen der Gleichungen I bis III unbestimmt bleibt, so bleibt für gegebene Beschaffenheit der Medien und gegebene Windstärke immer noch ein Parameter der stationären Wellen veränderlich, und zwar zeigt die weitere Untersuchung, dass dies zusammenhängt mit dem Quantum von Energie, welches in den Wellen aufgehäuft ist.

In der Rechnung ist es am einfachsten, die übrigen Grössen als Functionen von cos ε auszudrücken.

$$\mathfrak{Q} = \frac{7}{36} \cdot \frac{\cos^2\varepsilon - \frac{9}{14}}{\cos^2\varepsilon - \frac{2}{3}}$$

$$\mathfrak{P} = -\tfrac{1}{9}\cos^2\varepsilon + \tfrac{1}{8}\mathfrak{Q} = -\tfrac{1}{9}\,\frac{(\cos^2\varepsilon - \frac{1}{2}) \cdot (\cos^2\varepsilon - \frac{3}{4})}{\cos^2\varepsilon - \frac{2}{3}}$$

$$\zeta^2\left[(\mathfrak{Q} + \tfrac{1}{12})\cos^2\varepsilon + \tfrac{1}{2}(1 - \mathfrak{Q})\right] = -\left[\tfrac{1}{9}\cos^2\varepsilon - \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}\mathfrak{Q}\right].$$

Da $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}$ nothwendig positiv sein müssen, folgt aus der ersten dieser Gleichungen, dass

$$\cos^2 \varepsilon > \tfrac{2}{3} = 0.66666$$ 776

oder

$$\cos^2 \varepsilon < \tfrac{9}{14} = 0.642857.$$

Die Gleichung für $\mathfrak{P}$ würde $\cos^2 \varepsilon > \frac{2}{3}$ zulassen, aber auch

$$0.5 < \cos^2 \varepsilon < 0.642857.$$

Endlich die Gleichung für ζ^2 kann geschrieben werden:

$$\zeta^2 = 0.4 \cdot \frac{(0.68615 - \cos^2 \varepsilon) \cdot (\cos^2 \varepsilon + 2.18615)}{(\cos^2 \varepsilon - 0.66537) \cdot (\cos^2 \varepsilon + 1.46537)}.$$

Da ζ^2 positiv sein muss, so ergiebt sich daraus

$$0.66537 < \cos^2 \varepsilon < 0.68615;$$

sodass die Werthe von $\cos^2 \varepsilon$, die kleiner als 0.643, dadurch ausgeschlossen werden. Wenn wir aber berücksichtigen, dass für Werthe von ζ, die grösser als 1 werden, die oben gegebenen Reihen für die Coordinaten der Grenzfläche nicht mehr convergiren, so ergiebt sich noch eine höher liegende untere Grenze, die dem Werthe

$$\cos^2 \varepsilon > 0.67264 = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{11}{8}}$$

entspricht.

Dabei würde die Höhe der Wellen noch endlich sein, nämlich

$$H = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot 2.5112 = \lambda \cdot 0.39967.$$

Dass dennoch die Werthe der Coordinaten nicht mehr in convergenten Reihen nach den $\cos(a\vartheta)$ und $\sin(a\vartheta)$ zu entwickeln sind, zeigt an, dass eine Discontinuität oder Mehrdeutigkeit der Coordinaten zu Stande gekommen sein muss. In der That zeigen auch die Gleichungen 1a, dass für kleine Werthe von h

$$\operatorname{tang}(ny) = -\frac{h \cdot \sin\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\varepsilon}$$

$$e^{2nx} = a^2 (\cos\vartheta - \cos\varepsilon)^2.$$

Aus der ersteren folgt, dass überall, wo tang (ny) endliche Werthe hat, cos ϑ nahe an cos ε bleiben muss, und nur in den Punkten, wo tang (ny) sehr klein ist, und durch den Werth Null hindurchgeht, kann ϑ fortschreiten und das Intervall schnell durchschreiten, bis zu dem nächsten Punkte, wo cos ϑ sich wieder dem Werthe cos ε nähert.

Nun ist für solche Werthe von h die Abnahme der Glieder in den Reihen für den Druck allerdings nicht mehr schnell genug, um durch die drei ersten derselben den Gang der Function genügend darstellen zu können, und die wahre Form
777 der Wellencurve bei solcher Höhe wird nur durch weiter getriebene Annäherungen zu erreichen sein. Immerhin weist dieses Verhältniss darauf hin, dass zu hoch steigende Wellen die Continuität ihrer Oberfläche verlieren. Kanten dürfen übrigens an der Wellenfläche nicht vorkommen, ausgenommen, wenn sie relativ ruhen gegen das Medium, in welches hinein sie vorspringen. Denn wenn das letztere um sie herumfliessen soll, entsteht unendliche Geschwindigkeit und unendlicher negativer Druck an der betreffenden Stelle, der die andere Flüssigkeit gewaltsam heransaugen müsste, wie es bei hoch steigenden und schäumenden Wellen in der That gelegentlich beobachtet wird.

Bei Wellen, die gleich schnell wie der Wind vorwärts gehen, können aber in der That die Berge oben eine Kante von 120° zeigen, ehe sie branden.

Die angegebenen Formeln lassen erkennen, dass wenn cos ε abnimmt von seinem oberen zum unteren Werthe, sowohl $\mathfrak{Q}$ wie $\mathfrak{P}$ und ζ^2 continuirlich zunehmen müssen. Bei gleichbleibender Wellenlänge bedeutet die Zunahme von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ Zunahme der beiden Geschwindigkeiten b_1 und b_2, so wie ihrer Summe der Windgeschwindigkeit $w = b_1 + b_2$. Soll letztere constant bleiben, so muss nothwendig die Wellenlänge mit wachsendem cos ε abnehmen.

Es geht daraus hervor, dass derselbe Wind Wellen dieser Form von grösserer und kleinerer Wellenlänge innerhalb gewisser Grenzen wird aufregen können. Die längeren werden zugleich eine verhältnissmässig grössere Höhe haben. Es hängt dies mit dem Energievorrath zusammen, der in den Wellen aufgehäuft ist.

§ 8.

Die Energie der Wellen.

Wenn man die Energie der unter dem Einfluss von Wind erregten Wasserwellen untersucht und mit derjenigen vergleicht, welche den bei ebener Grenzfläche mit derselben Geschwindigkeit gleichmässig fortströmenden beiden Flüssigkeiten zukommen würde, so findet man, dass eine grosse Zahl der möglichen stationären Wellenbewegungen einen geringeren Energievorrath erfordern, als die entsprechende Strömung bei ebener Grenzfläche. Daraus folgt, dass die Strömung mit ebener Grenzfläche sich den genannten Wellenbewegungen gegenüber wie ein Zustand labilen Gleichgewichts verhält. Daneben giebt es andere Formen stationärer Wellenbewegung, wo der Energievorrath der beiden in wogender Bewegung begriffenen Massen derselbe ist, wie bei gleich starker Strömung 778
mit ebener Grenzfläche, und endlich solche, wo er grösser ist.

Der Grund hiervon ist in folgenden Umständen zu suchen. In der wogenden Wassermasse sind zwei Formen der Energie vertreten, erstens nämlich potentielle Energie, dargestellt durch das aus den Wellenthälern in die Wellenberge hinaufgehobene Wasser. Diese Arbeitsgrösse wird mit steigender Höhe der Wellen zunehmen und stets positiv sein müssen. Nur bei glatter Oberfläche fällt sie fort.

Lebendige Kraft zweitens ist den beiden verglichenen Bewegungsformen gemeinsam, und zwar der Voraussetzung nach von gleicher Grösse in den von der Grenzfläche entfernteren Theilen der flüssigen Massen. Aus der Differenz beider heben sich die Antheile der entfernteren Flüssigkeitsschichten fort, die Unterschiede beruhen nur auf denen, die der Grenzfläche nahe liegen. Die wellige Oberfläche, welche wir uns im Raume wieder festliegend denken, bietet nun den beiden an ihr hinströmenden Flüssigkeiten ein abwechselnd breiteres und engeres Bett. Wo das Bett breiter, werden sie langsamer fliessen, die obere über den Wellenthälern, die untere unter den Wellenbergen. Dadurch wird abwechselnd die lebendige Kraft der durch eine Erweiterung des Bettes fliessenden Theile geringer, der durch eine Verengerung

fliessenden grösser als die lebendige Kraft in den entsprechenden Theilen der gleichmässigen Ströme mit ebener Grenzfläche. Es ist aber die räumliche Ausdehnung der Theile mit verminderter lebendiger Kraft, welche in die Erweiterungen fallen, grösser als die der Gebiete vermehrter Geschwindigkeit in den Verengerungen. Deshalb überwiegt in der Gesammtsumme der lebendigen Kraft die Verminderung.

Indessen geben nur die Glieder vierten Grades nach ζ, welche in der Rechnung erst unter Berücksichtigung der Glieder mit ζ^3 in den Werthen der x und y gefunden werden, den Ausschlag bei der Berechnung des Unterschiedes der Energie. Dieser Unterschied für je eine Wellenlänge berechnet ist nämlich nach meiner Rechnung in der oben besprochenen Wellenform:

$$E\frac{1}{2\pi g\,(s-s_0)} = \mathfrak{Q}\cdot\frac{z^2}{4}\,[5\zeta^2-2z^2]+\tfrac{1}{48}\,[z^4-15z^2\zeta^2-\tfrac{3}{4}\,\zeta^4]$$

oder

$$E\frac{1}{2\pi g(s_2-s_1)} = \frac{7\cos^2\varepsilon}{144}\cdot\zeta^4\,\frac{[5-2\cos^2\varepsilon]\,[\cos^2\varepsilon-{}^9/_{14}]}{\cos^2\varepsilon-{}^2/_3}$$
$$-\tfrac{1}{48}\,\zeta^4\,[15.0845-\cos^2\varepsilon]\cdot[\cos^2\varepsilon+0.0845].$$

Hierin ist $\mathfrak{Q}$ der einzige Factor, der bei kleinen Aenderungen von $\cos\varepsilon$ sich sehr schnell ändert, ein Umstand, der die Ziffernrechnung sehr erleichtert. Man findet für $E=0$ den Werth

$$\cos^2\varepsilon = 0.675148,$$

779 was schon nicht mehr sehr weit von der Grenze der Convergenz $\cos^2\varepsilon = 0.67264$ abliegt.

Man findet dem entsprechend für $E=0$

$$\mathfrak{Q} = 0.740333$$
$$\mathfrak{P} = 0.1717613$$
$$\zeta = 0.6899$$
$$z = 0.56686$$
$$H = 0.20464\cdot\lambda$$
$$e^h = 2.52006.$$

Da dies die Wellen sind, die durch einen constanten Wind unmittelbar aufgeblasen werden können, sind diese Werthe den in § 6 angeführten Rechnungen zu Grunde gelegt, während die

Werthe für die niedrigsten Wellen gefunden werden, wenn man für $\cos^2 \varepsilon$ die obere Grenze seiner Werthe 0.68615 nimmt.

Die Theorie zeigt übrigens, wie auch die erwähnten Zahlenbeispiele, dass die Wellen dieser Form von grösseren Werthen des $\cos \varepsilon$ bei gleichem Material und gleicher Windstärke grössere Wellenlänge haben, dass aber ihre Höhe einen geringeren Bruchtheil der Wellenlänge bildet, und dass ihre Energie, wenn $\cos^2 \varepsilon > 0.675148$ kleiner ist, als die der geradlinigen Strömung beider Medien mit gleichen Geschwindigkeiten. Die Energiedifferenz ist Null für ganz niedrige Wellen, wird negativ, wenn man zu relativ höheren übergeht, erreicht ein Maximum, nimmt dann ab und wird wieder Null für den angegebenen Grenzwerth.

Es genügt für eine Wellenform bewiesen zu haben, dass Wogen unter Wind möglich sind, die einen geringeren Energievorrath haben, als derselbe Wind über ebener Grenzfläche. Daraus geht hervor, dass der Zustand der geradlinigen Strömung mit ebener Grenzfläche zunächst, wenn man nur die niederen Potenzen der kleinen Grössen berücksichtigt, als ein *Zustand indifferenten Gleichgewichts* erscheint. Berücksichtigt man aber die Glieder höheren Grades, so ist derselbe gewissen Störungen gegenüber, die stationären Wellen zwischen bestimmten Grenzen der Wellenlänge entsprechen, ein *Zustand labilen Gleichgewichts*, kürzeren Wellen gegenüber entspricht er dagegen *stabilem Gleichgewicht*.

Für die Entstehung der Wellen ist dies offenbar von grosser Wichtigkeit. Es folgt daraus, was wir in der Natur ja auch bestätigt sehen, dass auch der gleichmässigste Wind über eine ebene Wasserfläche nicht wird fahren können, ohne bei der kleinsten Störung Wellen gewisser Länge aufzutreiben, die bei gewisser Höhe regelmässige Form und Fortpflanzung werden gewinnen können. Steigt der Wind, so werden die Höhen aller dieser Wellen steigen, die kürzeren unter ihnen schäumend zerspritzen, neue längere von geringerer Höhe 780
werden sich bilden können.

Die grössere Energie, welche in diesem Falle nöthig ist, um die kurzen Wellen in die Höhe zu treiben, ist dadurch

erreichbar, dass der frühere schwächere Wind schon einen Theil seiner Energie an die Wassermasse abgegeben hat, und der neue stärkere Wind diesen Theil schon vorfindet.

Brandend verspritzende Wogen in der Luftmasse werden Mischung der Schichten hervorbringen. Da die Hebungen der Wellenberge im Luftkreise viele Hundert Meter betragen können, werden Niederschläge in ihnen oft eintreten können, die dann schnelleres und höheres Steigen bedingen. Wellen von kleiner und kleinster Wellenlänge würden theoretisch möglich sein. Nur ist zu berücksichtigen, dass ganz scharfe Grenzen zwischen verschieden bewegten Luftschichten doch wohl selten vorkommen werden, und daher sich überwiegend nur solche Wogen ausbilden werden, deren Wellenlänge sehr gross, verglichen mit der Dicke der Uebergangsschichten ist.

Der Umstand, dass derselbe Wind Wellen von verschiedener Länge und Fortpflanzungsgeschwindigkeit erregen kann, wird bewirken, dass Interferenzen zwischen denselben zu Stande kommen und sich abwechselnd höhere und niedere Wellenberge folgen. Es ist das ein am Meeresstrande oft zu beobachtender Vorgang. Wo aber zwei Wellenberge verschiedener Wellenzüge sich einander einholen, werden sie leicht eine Höhe erreichen können, bei der sie überschäumen, und es werden sich dadurch analog der Erzeugung von Combinationstönen, längere Wellen bilden können, die, wenn sie durch die Windstärke begünstigt sind, auch anschwellen können. Es wäre dies einer der Vorgänge, durch welche Wellen von grosser Wellenlänge entstehen können.

CXXVIII.

Die Energie der Wogen und des Windes.

Aus den Sitzungsberichten der Akademie d. Wiss. zu Berlin. Sitzung vom 17. Juli 1890, S. 853—872. Wiedemann's, Ann. d. Physik, Bd. XLI. S. 641—662.

In meiner Mittheilung an die Akademie vom 25. Juli 1889 habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass eine ebene Wasserfläche, über die ein gleichmässiger Wind hinfährt, sich in einem Zustande labilen Gleichgewichts befindet, und dass die Entstehung von Wasserwogen wesentlich diesem Umstande zuzuschreiben ist. Ebenda habe ich hervorgehoben, dass der gleiche Vorgang sich auch an der Grenze verschieden schwerer und aneinander entlang gleitender Luftschichten wiederholen muss, hier aber viel grössere Dimensionen annehmen könne, und ohne Zweifel bei den unregelmässig eintretenden meteorologischen Erscheinungen eine wesentliche ursächliche Bedeutung hat. 641

Die Wichtigkeit dieser Vorgänge hat mich veranlasst, die Verhältnisse der Energie und ihre Vertheilung zwischen Luft und Wasser noch eingehender zu untersuchen, zunächst allerdings immer noch in der Beschränkung auf stationäre Wellen, bei denen die Bewegungen der Wassertheilchen nur parallel einer senkrechten Ebene, in der die Coordinaten x vertical, die y horizontal verlaufen, vor sich gehen. Da wir aber auch dieses beschränktere Problem zunächst nur durch Herstellung

convergenter Reihen lösen können, deren höhere Glieder zwar an Grösse schnell abnehmen, aber ziemlich verwickelte Form darbieten, so bleiben Schlüsse, die man nur aus der Kenntniss der ersten grössesten Glieder solcher Reihen gezogen hat, nothwendig immer beschränkt auf Wellen von geringen Höhen,
642 und lassen die Richtigkeit mancher wichtiger Verallgemeinerungen zweifelhaft erscheinen.

Mehrere dieser Schwierigkeiten haben sich umgehen lassen dadurch, dass es mir gelang, die Gesetze der stationären geradlinigen Wellen auf ein Minimalproblem zurückzuführen, in welchem die potentielle und actuelle Energie der bewegten Flüssigkeiten die zu variirenden Grössen bilden. Aus diesem Variationsproblem lassen sich allgemeingültig mehrere Schlüsse über das Abnehmen und Zunehmen der Energie und die Unterschiede stabilen und labilen Gleichgewichts der Wasseroberfläche herleiten.

In theoretischer Beziehung trat hierbei eine einigermaassen neue Aufgabe ein, insofern es sich um den Unterschied stabilen und labilen Gleichgewichts nicht mehr von ruhenden, sondern von dauernd bewegten, aber in stationärer Bewegung begriffenen Massen handelte. Zwar sind schon einige Beispiele dieses Unterschiedes gelegentlich behandelt worden, wie bei der Rotation eines festen Körpers um die Axe des grössesten oder kleinsten Trägheitsmomentes, und bei der Rotation eines flüssigen schweren Ellipsoides. Aber ein allgemeines Princip, wie es für ruhende Körper in der Forderung gegeben ist, dass das stabile Gleichgewicht ein Minimum der potentiellen Energie erfordert, ist für bewegte Systeme noch nicht aufgestellt worden.

Die folgenden Untersuchungen führen auf solche Formen, die übrigens auch als Verallgemeinerungen derjenigen Sätze angesehen werden können, die ich aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen von Lagrange in ihrer Anwendung auf die Bewegungen *„polycyklischer“*[1]) Systeme hergeleitet habe.

---

[1]) Crelle-Borchardt's Journ. f. Mathem. Bd. 97. p. 118. 1884. Auf S. 127 des vorliegenden Bandes abgedruckt.

§ 1.

Der Minimalsatz für stationäre Wellen bei constant bleibenden Strömungsmengen.

Ich stelle wieder, wie in meiner vorjährigen Arbeit[1]) die Geschwindigkeitscomponenten u, v der Wassertheilchen während einer wirbelfreien Bewegung durch die Gleichungen dar:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{1.}$$

Ich setze wieder, so weit nicht ausnahmsweise das Gegentheil ausdrücklich ausgesprochen wird, voraus, dass das Coordinatensystem der x, y als ruhend gegen die Wellen genommen wird, x vertical, (der Regel nach aufwärts positiv), y horizontal. Auf diese Coordinaten bezogen ruht also die Wellenfläche, während die beiden Flüssigkeiten an ihr stationär entlang strömen. Die Wellencurve wird als periodisch angesehen von der Wellenlänge λ. Andererseits wird die strömende Flüssigkeit begrenzt gedacht durch zwei Horizontalebenen, deren Gleichungen sind: 643

$$x = H_1 \quad \text{und} \quad x = -H_2. \tag{1a.}$$

Dem entsprechend bezeichne ich auch die übrigen Grössen, die sich auf diejenige Flüssigkeit beziehen, die auf der Seite der positiven x liegt, mit dem Index 1, die auf der Seite der negativen x dagegen mit dem Index 2.

Die Wellenlinie und diese beiden horizontalen Grenzlinien müssen Stromlinien sein, d. h. in ihrer ganzen Länge constante Werthe von ψ haben. Da jede der Functionen ψ eine willkürliche additive Constante enthalten kann, lässt sich an einer der Stromlinien der Werth beider ψ willkürlich wählen. Ich setze fest, dass er an der Wellenlinie, wo:

$$x = \bar{x}$$

sei, den Werth habe:

$$\bar{\psi} = 0. \tag{1b.}$$

Dagegen an der Grenzlinie:

[1]) Auf S. 309 dieses Bandes abgedruckt.

$$x = H_1 \quad \text{sei} \quad \psi_1 = \mathfrak{p}_1, \qquad (1^c.)$$

und für:

$$x = -H_2 \quad \text{sei} \quad \psi_2 = \mathfrak{p}_2. \qquad (1^d.)$$

Die Grössen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ geben dann bekanntlich das Volumen der betreffenden Flüssigkeit an, welches in der Zeiteinheit jeden Querschnitt zwischen der Wellenfläche $\psi_1 = \psi_2 = 0$ einerseits und der oberen und unteren Grundfläche andererseits in der Zeiteinheit durchströmt. Es sind dies die Grössen, die ich oben als *Strömungsmengen* bezeichnet habe. Bei der Variation werden in diesem Paragraphen also $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ als unveränderlich angesehen.

Als Nullpunkt für die x soll diejenige Höhe festgehalten werden, in welcher die Grenzfläche der beiden vorhandenen Flüssigkeitsmengen im Ruhezustande liegen würde, was durch
644 die Gleichung ausgedrückt wird:

$$\int_{y_0}^{y_0+\lambda} \bar{x} \cdot dy = 0, \qquad (1^e.)$$

d. h. $x = 0$ ist diejenige Ebene, über die ebensoviel Wasser gehoben, als darunter gesenkt ist.

Schliesslich ist der Raum, innerhalb dessen die der Variation zu unterwerfenden Grössen liegen, noch durch zwei Verticalebenen zu begrenzen, die um eine Wellenlänge voneinander abstehen. Da die Bewegungen nach der Wellenlänge λ periodisch sein sollen, müssen an der rechten, wie an der linken Verticalfläche die Geschwindigkeiten:

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial x} = \frac{\partial \psi_l}{\partial x}$$

gleich sein, daher auch für gleiche Werthe der x:

$$\psi_r = \psi_l \qquad (1^f.)$$

und

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial y} = \frac{\partial \psi_l}{\partial y}. \qquad (1^g.)$$

Nach (1.) kann letztere Gleichung auch geschrieben werden:

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial x},$$

oder

$$\varphi_r - \varphi_l = \text{Const.} \qquad (1^h.)$$

Zunächst ist bekannt, dass die Gleichungen (1.) ihre Lösung finden, wenn $(\psi + \varphi i)$ als eine Funktion von $(x + y i)$ dargestellt werden kann, welche innerhalb des von der betreffenden Flüssigkeit gefüllten Gebietes keine Discontinuitäten und keine unendlichen Werthe zeigt.

Wenn die Form der Wellenlinie gegeben ist, sind bekanntlich die Werthe der beiden Functionen ψ durch die angegebenen Grenzbedingungen (1^b.) bis (1^g.) vollständig bestimmt, und zwar werden dabei die beiden Integrale, welche mit der halben Dichtigkeit der betreffenden Flüssigkeit multiplicirt die lebendigen Kräfte ergeben, nämlich:

$$\frac{2L_1}{s_1} = \iint \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right)^2 \right] \cdot d\,S_1 \qquad (2.)$$

und

$$\frac{2L_2}{s_2} = \iint \left[\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right)^2 \right] \cdot d\,S_2 \qquad (2^a.)$$

absolute Minima für die unter den angegebenen Umständen möglichen Variationen der Functionen ψ_1 und ψ_2, wenn dabei die Werthe $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ als unveränderlich betrachtet werden.

Dagegen ist die Form der Wellenlinie durch die bisher 645
besprochenen Bedingungen noch nicht bestimmt, als in soweit, dass sie periodisch nach der Periode λ sein soll. Man kann aber die Form dieser Grenzlinie der physikalischen Bedingung entsprechend, dass der Druck auf ihren beiden Seiten gleich gross sei, dadurch bestimmen, dass man verlangt, die Variation der Differenz zwischen der potentiellen Energie Φ und der lebendigen Kraft $L = L_1 + L_2$, solle verschwinden:

$$\delta\,[\Phi - L] = 0. \qquad (2^b.)$$

Die potentielle Energie ist bedingt durch die ungleiche Erhebung der verschiedenen Theile der Oberfläche der schwereren Flüssigkeit über die Niveaufläche $x = 0$. Ihr Betrag ergiebt sich leicht als gegeben durch die Gleichung:

$$\Phi = \tfrac{1}{2} g\,(s_2 - s_1) \int \bar{x}^2 \cdot dy. \qquad (2^c.)$$

Ist s_2 die dichtere Flüssigkeit, so müssen die positiven x, wie schon bemerkt, als senkrecht steigend und g als eine positive Grösse genommen werden.

Wenn das Längenelement ds der Grenzlinie der beiden Flüssigkeiten um die verschwindend kleine Breite δN normal zu seiner Richtung nach oben verschoben wird, ergiebt sich die Variation:

$$\delta \Phi = g\,(s_2 - s_1)\int \bar{x}\,\delta N \cdot ds. \tag{2^d.}$$

Die Variation von L kann man in zwei Schritten ausführen. Im *ersten* denkt man die Grenzlinie verschoben in der angegebenen Weise, und lässt zunächst die beiden Functionen ψ_1 und ψ_2 in jedem Raumpunkte unverändert, wobei man aber auf der Seite, wo Raum durch die Verschiebung des ds gewonnen wird, diesen gewonnenen Streifen nunmehr mit der continuirlichen Fortsetzung des ψ dieser Seite ausgefüllt denkt, und zwar so, dass die Gleichung $\Delta\psi = 0$ dort erfüllt bleibt. Diese Fortsetzung der in den Streifen einrückenden Function ψ ist bekanntlich immer nur in einer Weise möglich, ohne Discontinuitäten zu bilden. Nur wenn in der früheren Grenze schon ein Verzweigungspunkt der betreffenden Function ψ liegt, also namentlich, wenn die Grenzlinie eine scharfe Ecke bildet, ist eine continuirliche Fortsetzung
646 derselben ausgeschlossen. Die besondere physikalische Bedeutung eines solchen Falles werden wir später zu besprechen haben.

Durch diesen ersten Schritt in der Variation erhalten wir:

$$\delta' L = \tfrac{1}{2}\int \left[s_2 \cdot \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial N_2}\right)^2 - s_1 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial N_1}\right)^2 \right] \cdot ds \cdot \delta N.$$

Nun sind aber die Werthe des ψ_1 und ψ_2 an der neuen Grenze nicht mehr Null, sondern es ist annähernd daselbst:

$$\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial N_1} \cdot \delta N, \qquad \psi_2 = -\frac{\partial \psi_2}{\partial N_2} \cdot \delta N,$$

und um sie wieder zu Null zu machen, muss also ein *zweiter Schritt* in der Variation ausgeführt werden, wobei die Functionen ψ so variirt werden, dass sie nunmehr an den neuen Grenzen den Werth Null erhalten.

Da nach den allgemeinen Gesetzen der Potentialfunctionen:

$$\delta'' L = -\,s_1\int \frac{\partial \psi_1}{\partial N_1} \cdot \delta\psi_1 \cdot ds - s_2\int \frac{\partial \psi_2}{\partial N_2} \cdot \delta\psi_2 \cdot ds,$$

so wird, wenn man:

$$\delta\psi_1 = -\frac{\partial\psi_1}{\partial N_1}\cdot\delta N, \qquad \delta\psi_2 = +\frac{\partial\psi_2}{\partial N_2}\cdot\delta N,$$

setzt, wie in unserem Falle verlangt wird, der schliessliche Werth:

$$\delta L = \delta' L + \delta'' L = -\tfrac{1}{2}\int\left[s_2\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial N_2}\right)^2 - s_1\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial N_1}\right)^2\right] ds\cdot\delta N. \qquad (2^e.)$$

Da endlich bei der Variation das Volumen jeder der beiden Flüssigkeiten unverändert bleiben muss, so wird noch gefordert:

$$\int \delta N\cdot ds = 0. \qquad (2^f.)$$

Daraus ergiebt sich die Variation:

$$\left.\begin{aligned}\delta\{\Phi - L\} = -\int ds\cdot\delta N\Big\{ g(s_1 - s_2)\,\overline{x} + \frac{s_1}{2}\cdot\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial N_1}\right)^2 \\ -\frac{s_2}{2}\cdot\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial N_2}\right)^2 + c\Big\} = -\int ds\cdot\delta N\cdot[p_2 - p_1].\end{aligned}\right\} (2^g.)$$

Hierin bezeichnen p_1 und p_2 den Flüssigkeitsdruck an der unteren, beziehlich oberen Seite der Grenzfläche, wie sie sich aus Euler's hydrostatischen Gleichungen ergeben. Da p_2 und p_1 willkürliche additive Constanten enthalten, kann c wegfallen. Wenn also die Gleichung $(2^b.)$ erfüllt wird, d. h. wenn: 647

$$\delta\{\Phi - L\} = 0$$

werden soll, so muss längs der Grenzfläche sein:

$$p_2 = p_1,$$

welches die Bedingung der stationären Oberfläche ist.

Stabilität der stationären Bewegung.

Für eine Form der Oberfläche, welche einer stationären nahe liegt, und die also noch Unterschiede des Druckes zeigt, ergiebt sich hierbei, dass eine solche, wenn sie den Unterschieden des Druckes folgt, also eine positive Verschiebung δN erleidet, wo $p_2 > p_1$, auch die Grösse $(\Phi - L)$ verringern, sich also einem nahegelegenen Minimum von $(\Phi - L)$ nähern, von einem nahe gelegenen Maximum derselben Grösse dagegen entfernen muss.

Die hydrodynamischen Gleichungen zeigen dann in der That, dass die Druckgleichheit in solchem Falle nur durch

Beschleunigungen hergestellt werden kann, die in der Richtung vom stärkeren zum schwächeren Druck eintreten, und die stationäre Bewegung stören müssen.

Es wird also *stabiles Gleichgewicht* einer stationären Wellenform bei den möglichen Variationen einer solchen Form einem Minimum der Grösse $(\Phi - L)$ entsprechen müssen, wie bei den polycyklischen Systemen bei constanter Geschwindigkeit ihrer cyklischen Bewegungen. Wenn dagegen dieselbe Grösse bei einer anderen Curvengestalt zu einem Maximum oder Sattelwerthe wird, ist die Bedingung der Gleichheit des Druckes beiderseits der Grenzfläche allerdings augenblicklich erfüllt; aber einzelne oder alle kleinsten Störungen der Gleichgewichtsgestalt werden anwachsen müssen; das Gleichgewicht wird *labil* werden, was sich bei wirklichen Wasserwellen im Schäumen und Branden der Wellenkämme zu erkennen giebt.

Indessen ist dabei zu bemerken, dass diese Sätze nur gelten, wenn die Functionen L_1 und L_2 im Inneren der Räume, für die sie gelten, schon ihren Grenzbedingungen gemäss als Minima bestimmt sind und für jede geänderte Form der Grenzlinie dieser Bedingung gemäss abgeändert werden.

648 Die Function Φ ist unter den gemachten Annahmen jedenfalls positiv und endlich, da nur eine endliche Menge von Flüssigkeit vorhanden ist, die um die endliche Höhe H_1 gehoben werden kann. L ist ebenfalls nothwendig positiv, kann aber $+\infty$ werden, da die Wellenberge sich der oberen, die Wellenthäler sich der unteren Grenzfläche würden nähern können, und der gesammte constant bleibende Flüssigkeitsstrom dann durch unendlich enge Spalten mit unendlicher Geschwindigkeit gepresst werden müsste.

Die Grösse $(\Phi - L)$ wird also bei ebener Grenzfläche, wo $\Phi = 0$ ist, einen positiven Werth haben müssen und kann bei steigender Wellenhöhe negativ unendlich werden. Ob zwischen diesen Grenzen ein Minimum eintritt, und bei welchen Werthen der $\mathfrak{p}$ dies geschieht, kann nur durch Untersuchung der einzelnen Wellenformen entschieden werden. *Ein* Sattelwerth ist jedenfalls bei ebener Oberfläche gegeben.

Nur lässt sich schon erkennen, dass, wenn ein vollkommenes Minimum existirt, ein Uebergang von diesem zu den

unendlichen negativen Werthen des $(\Phi - L)$ führen muss, welcher zuerst mit steigenden Werthen beginnt und dann wieder fällt. Es wird dann einen niedrigsten Werth der Uebergangsstelle zwischen steigenden und fallenden Werthen geben müssen, der einem Maximo-Minimum der Grösse $(\Phi - L)$ entspricht, also auch einer stationären Wellenform, aber einer solchen von labilem Gleichgewicht, die an der Grenze des Brandens ist.

Existirt ein solches Minimum, so muss daselbst bei Variationen in der Form der Wellen, welche Φ steigen machen, L um ebensoviel steigen. Ebenso auf dem Sattel, wenn wir den Wellenformen folgen, die die Thallinie des Sattels bilden. Vergrössern wir aber die Werthe von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$, d. h. vergrössern wir die Windstärke und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen gegen das Wasser, so werden die Differentialquotienten von L an beiden Stellen grösser, und die beiden Grenzwerthe werden sich einander nähern müssen, schliesslich ineinander übergehen, womit das absolute Minimum aufhört zu existiren und das Gleichgewicht labil wird. Daraus ist zu schliessen, dass bei steigenden Strömungen stationäre Wellen gegebener Wellenlänge schliesslich unmöglich werden müssen.

Nothwendigkeit der Brandung bei zu grossen Strömungen.

Dass für grosse Werthe der $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$, die über ein be- 649
stimmtes Maass hinausgehen, keine Minima der Function $(\Phi - L)$ bei constantem endlichen Werthe der Wellenlänge mehr möglich sind, lässt sich auch, wie folgt, erkennen. Man berechne die Werthe von L_1 und L_2 unter der Annahme $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 = 1$ für eine beliebig gewählte Wellenform, und suche alsdann für einen beliebig gewählten Werth von $\delta\Phi$ diejenigen beiden Variationen der Curve, welche die eine δL_1, die andere δL_2 zu einem Maximum macht.

Unter den möglichen Variationen der Wellenform, welche positive Werthe des $\delta\Phi$ ergeben, sind auch diejenigen, bei denen die Gipfel der Wellenberge gesteigert, die Thäler gesenkt werden. Da die obere Flüssigkeit über den Bergen den grössten, über den Thälern den kleinsten Querschnitt hat, so muss über den Bergen grössere Stromgeschwindigkeit herr-

schen, als über den Thälern, d. h. die Werthe der $\partial \psi_1 / \partial N_1$ müssen an den Berggipfeln absolut grösser sein, als in den Thälern. Daraus folgt nach Gleichung (2^e.), dass, wenn wir die Berge erhöhen und die Thäler vertiefen, wir nicht blos positive Werthe des $\delta \Phi$, sondern auch positive der beiden δL erhalten. Folglich ist der gesuchte maximale Werth der beiden Grössen δL_1 und δL_2, der zu dem vorgeschriebenen positiven Werthe des $\delta \Phi$ gehört, nothwendig ein positiver Werth, und zwar ist bei endlicher Höhe der Wellen das Verhältniss $\delta \Phi : \delta L_1$ wie $\delta \Phi : \delta L_2$ nothwendigerweise endlich.

Bezeichnen wir nun mit a einen ächten Bruch, und denken wir nunmehr die Variation für L_1 im Betrage a ausgeführt, wie es der Variation $a \cdot \delta \Phi$ entsprechen würde. Die Variation δL_2 dagegen werde im Betrage $(1 - a)$ ausgeführt. Dann ist die gesammte Variation für Φ:

$$\delta \Phi = [a + (1 - a)]\, \delta \Phi,$$
$$\delta L = a \cdot \delta L_1 + (1 - a) \cdot \delta L_2 .$$

Ist $\delta L_1 > \delta L_2$, so erhalten wir die grösste Variation von δL, wenn wir $a = 1$ machen; im entgegengesetzten Falle dagegen würden wir $a = 0$ zu machen haben. Dann erreicht δL den grössten Werth, den es bei dem gegebenen Werthe
650 von $\delta \Phi$ bei der gewählten Wellenform überhaupt haben kann.

Wenn der grösste positive Werth des δL kleiner als $\delta \Phi$ ist, so würde man jedenfalls für $\mathfrak{p}_1^2$ einen Werth finden können, der

$$\mathfrak{p}_1^2 \delta L > \delta \Phi$$

machte, und also die Variation $\delta(\Phi - L)$ für wenigstens eine Art der Formänderung negativ, was sie für eine Minimalform nicht sein darf.

Da Φ immer endlich bleibt, kann man auch immer endliche Variationen seiner Grösse vollziehen, die von der Grössenordnung der Verschiebung δN der Linienelemente ds sind, und die letzteren ergeben auch immer endliche Variationen der L_1 und L_2, wenigstens bei endlichen Geschwindigkeiten der Strömung längs der Fläche.

Unendliche Geschwindigkeiten würden nur an vorspringenden Ecken der Wellenlinie vorkommen können, und wenn

dort Strömung ist, unendlichen negativen Druck ergeben, d. h. Brandung. Nur wenn keine relative Bewegung der Wellen gegen das Medium vorhanden ist, in welches die Kanten hineinragen (wenn der Wind genau so schnell wie die Wellen geht), können solche Ecken bestehen.

Diese letzteren Fälle, die an der Grenze des Brandens liegen, ausgenommen, werden wir also für alle continuirlich gekrümmten Wellenformen für jedes $\delta\Phi$ stets ein Maximum des δL von derselben Grössenordnung haben. Und wenn wir den kleinsten Werth dieses Verhältnisses $\delta L/\delta\Phi$ aufsuchen und ein $\mathfrak{p}^2$ suchen, welches grösser als der grösste so gewonnene Werth von $\delta\Phi/\delta L$ ist, so wird für die dadurch gegebene Stromstärke überhaupt die Möglichkeit stationärer Wellenbildung von der vorgeschriebenen Wellenlänge λ ausgeschlossen.

Stationäre Wellen von vorgeschriebener Wellenlänge sind also nur für Werthe der Strömungsgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}_1^2$ *und* $\mathfrak{p}_2^2$ *möglich, die unterhalb gewisser Grenzen liegen.*

Andererseits zeigt dieselbe Betrachtung weiter, dass Verkleinerung der Werthe von $\mathfrak{p}_1^2$ und $\mathfrak{p}_2^2$ nothwendig auch grössere δL_1 und δL_2 gegen $\delta\Phi$ wird verschwinden machen. Dann können Variationen von $\delta\Phi$ durch entgegengesetzte gleicher Grössenordnung von L nicht mehr aufgehoben werden, 651
und dann könnte höchstens nur noch der eine Grenzwerth, der ebener Oberfläche entspricht, bestehen. Die Grenze für die kleinsten zulässigen Werthe der $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ ergiebt sich schon aus den bisher angestellten Untersuchungen[1]):

$$\frac{2\pi s_1\,\mathfrak{p}_1^2}{H_1^2} + \frac{2\pi s_2\,\mathfrak{p}_2^2}{H_2^2} = g\cdot\lambda\,(s_1 - s_2).$$

Somit ist das Gebiet der Werthe $(\mathfrak{p}_1)^2$ *und* $(\mathfrak{p}_2)^2$, *welches stationäre Wellen von der Wellenlänge* λ *zulässt, auch in Richtung der kleineren Werthe hin beschränkt.*

Zu beachten ist, dass die Grösse $\mathfrak{p}_2$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen gegen das Wasser bestimmt, $\mathfrak{p}_1$

---

[1]) Ich bin seitdem darauf aufmerksam gemacht worden, dass schon Sir W. Thomson diese Gleichung erster Annäherung mit Berücksichtigung der Windstärke gegeben hat. Phil. Mag. (4) 40. p. 362. 1871, wo übrigens auch der Einfluss der Capillarität berücksichtigt ist.

dagegen die Geschwindigkeit des Windes relativ zu den Wellen. Jede einzelne von ihnen kann klein werden, wenn die andere hinreichend gross ist.

§ 2.

Der Minimalsatz für stationäre Wogen bei constant gehaltenem Geschwindigkeitspotential.

Den Werth für die lebendige Kraft, wie er in Gleichung (2.) gegeben ist, können wir durch partielle Integration umbilden:

$$L_1 = \frac{s_1}{2} \int \mathfrak{p}_1 \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot dy\,,$$

worin sich das Integral nur auf die obere horizontale Grenzlinie bezieht. Die Theile des Integrals für die anderen Grenzen des Raumes S_1 fallen alle fort. Da nun nach Gleichungen (1.):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,,$$

so ergiebt sich:

$$L_1 = \frac{s_1}{2} \mathfrak{p}_1 \int \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cdot dy\,.$$

Oder indem wir den von x unabhängigen Werth der Differenz

$$\varphi_{y+\lambda} - \varphi_y = \mathfrak{f}$$

setzen, erhalten wir

$$L_1 = \frac{s_1}{2} \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{f}_1\,, \tag{3.}$$

und ebenso:

$$L_2 = -\frac{s_2}{2} \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{f}_2. \tag{3a.}$$

652 Die Grössen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{f}$ sind voneinander abhängig, sobald die Gestalt des Raumes gegeben ist, an dessen Grenzen sie gelten sollen, sodass wir setzen können:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{R}\,,$$

wo $\mathfrak{R}$ einen Werth bezeichnet, der nur von der Grösse und Form des Raumes abhängt. Daraus ergiebt sich:

$$L = \frac{s}{2} \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{f} = \frac{s}{2} \mathfrak{f}^2 \mathfrak{R} = \frac{s}{2} \frac{\mathfrak{p}^2}{\mathfrak{R}}\,. \tag{3b.}$$

Wenn also $\mathfrak{N}$ eine Aenderung $\delta\mathfrak{N}$ erleidet, so wird, wenn $\mathfrak{f}$ unverändert bleibt:

$$\delta L = \frac{s}{2} \cdot \mathfrak{f}^2 \cdot \delta\mathfrak{N},$$

$$\delta\mathfrak{f} = 0;$$

dagegen, wenn $\mathfrak{p}$ unverändert bleibt:

$$\delta L = \frac{s}{2} \cdot \frac{\mathfrak{p}^2 \cdot \delta\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2} = -\frac{s}{2} \mathfrak{f}^2 \cdot \delta\mathfrak{N},$$

$$\delta\mathfrak{p} = 0.$$

Beide Variationen haben also gleichen Werth bei entgegengesetztem Vorzeichen. Wir können demnach die Variationsform des stationären Zustandes, wo die Variation des δL aus einer solchen der Raumform hergeleitet ist:

$$\delta\Phi - \delta L = 0, \qquad \delta\mathfrak{p}_1 = \delta\mathfrak{p}_2 = 0$$

auch schreiben:

$$\delta\Phi + \delta L = 0, \qquad \delta\mathfrak{f}_1 = \delta\mathfrak{f}_2 = 0.$$

Die Grössen $\mathfrak{f}$ haben nach ihrer Definition bekanntlich den Werth:

$$\mathfrak{f} = \int_{x,\,y}^{x,\,y+\lambda} (u \cdot dx + v \cdot dy),$$

dies Integral genommen für irgend einen Werth, der von dem Punkte x, y zu dem Punkte $x, y + \lambda$ führt. Wenn wir für diesen Weg die Stromlinie $\psi = \text{const.}$ wählen, so bezeichnet er auch einen Weg, in welchem eine Reihe materieller Wassertheilchen fortfliessen. Der Werth des Integrals $\mathfrak{f}_1$, berechnet für eine solche Reihe derselben fortfliessenden materiellen Theilchen, bleibt bekanntlich ungeändert, wenn keine Verschiedenheiten der Summe des Drucks und des Potentials der äusseren Kräfte zwischen Anfang und Ende der Reihe bestehen und keine Reibung mitwirkt, welche Bewegungen auch sonst in der Flüssigkeit vor sich gehen mögen. Es ist diejenige Summe, die auch bei der Wirbelbewegung in jedem geschlossenen Ringe von materiellen Theilchen ungeändert 653
bleibt. Wir können also $s_1\mathfrak{f}_1$ und $s_2\mathfrak{f}_2$ für die Flüssigkeitsbewegungen als die ohne Einwirkung direct beschleunigender

Kräfte unveränderlich bleibenden *Bewegungsmomente* betrachten, während die Strömungsgrössen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ dadurch die Bedeutung der Geschwindigkeiten erhalten. Dann sind die beiden gefundenen Variationsprobleme vollkommen analog den von mir in der Theorie der polycyklischen Systeme entwickelten Sätzen, dass

$$\delta(\Phi - L) = -\Sigma[P_\mathfrak{a} \cdot \delta p_\mathfrak{a}], \qquad (3^e.)$$
$$\delta q_\mathfrak{a} = 0,$$

wenn die Geschwindigkeiten $q_\mathfrak{a}$ der cyklischen Bewegungen constant gehalten werden. Darin sind $\mathfrak{p}_\mathfrak{a}$ die veränderlichen Coordinaten und $P_\mathfrak{a}$ die auf ihre Vergrösserung hinwirkenden Kräfte. Stabiles Gleichgewicht entspricht, wie leicht zu sehen, einem Minimum des $(\Phi - L)$.

Andererseits, wenn man die Bewegungsmomente $\partial L / \partial q_\mathfrak{a}$ constant hält, ist

$$\delta[\Phi + L] = -\Sigma[P_\mathfrak{a} \cdot dp_\mathfrak{a}], \qquad (3^f.)$$
$$\delta\left(\frac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}}\right) = 0.$$

Auch hier erfordert stabiles Gleichgewicht ein Minimum, aber nun der Grösse $(\Phi + L)$, d. h. der gesammten Energie des Körpers.

Der obigen Gleichung (3^e.) für polycyklische Systeme entspricht durchaus die Gleichung (2^g.), nur dass darin die Anzahl der veränderlichen Coordinaten δN der Oberflächenelemente ds unendlich gross ist, und die Kraft, welche statt der $P_\mathfrak{a}$ eintritt, nämlich der Flüssigkeitsdruck, eine continuirliche Function der y ist. Daher das Integral statt der Summe.

Dass auch in der Theorie der Wellen das stabile Gleichgewicht dem Minimum der Energie bei festgehaltenem Werthe des $\mathfrak{f}$ entspricht, bestätigt sich, wenn man an den Einfluss der Reibung denkt, die ein gestörtes stabiles Gleichgewicht wieder herstellen kann, nicht aber ein labiles. Reibung vermindert immer den vorhandenen Energievorrath. Sie kann also ein gestörtes Minimum der Energie wieder herstellen, aber die Abweichung von einem Maximum nicht.

§ 3.

Minimalform für unendliche Dicke der Schichten.

Im Folgenden wollen wir die beiden Flüssigkeitsschichten, an deren Grenzfläche sich die Wellen bilden, als sehr dick in verticaler Richtung betrachten, also die Werthe H_1 und H_2 als sehr gross, beziehlich über alle Grenzen in das Unendliche wachsend ansehen, um die Theorie der Wellen von denjenigen Verwickelungen zu befreien, die durch den Einfluss der oberen und unteren begrenzenden Horizontalflächen hervorgebracht werden. 654

Unter diesen Umständen entfernt sich die Bewegung an diesen beiden weit entfernten begrenzenden Horizontalflächen nicht mehr merklich von einer geradlinigen von gleichmässiger Geschwindigkeit. An der Fläche H_1 setzen wir diese gleich a_1, an der Fläche H_2 gleich $(-a_2)$, indem wir der letzteren die entgegengesetzte Richtung zuertheilen, wie sie ihr in den normalen Fällen, wo der Wind den Wellen voranläuft, zuzukommen pflegt.

Dann ist zunächst:

$$+\mathfrak{f}_1 = a_1 \cdot \lambda, \qquad -\mathfrak{f}_2 = a_2 \cdot \lambda,$$

und in den höheren Schichten der Flüssigkeit:

$$\psi_1 + \varphi_1 i = + a_1 (x + yi) + h_1,$$

worin h_1 eine durch Gleichung (1°.) zu bestimmende Constante ist. Ebenso:

$$\psi_2 + \varphi_2 i = - a_2 (x + yi) + h_2.$$

Bei ebener Grenzfläche, wenn für diese, wie oben festgesetzt ist, $\psi_1 = \psi_2 = 0$ sein soll, und auch $x = 0$, werden h_1 und h_2 beide gleich Null, und die lebendige Kraft in diesem Falle:

$$L_1' = \frac{s_1}{2} \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{f}_1 = \frac{s_1}{2} a_1^2 H_1 \lambda,$$

$$L_2' = -\frac{s_2}{2} \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{f}_2 = \frac{s_2}{2} a_2^2 \cdot H_2 \lambda.$$

Wenn dagegen Wogen entstanden sind, ist L_1 bei festgehaltenem Werthe von a_1, und daher auch von $\mathfrak{f}_1$ kleiner, da, wie wir gesehen haben, dann bei Steigerung der Wellenhöhe ein

negativer Werth des δL_1 eintritt. Wir können also unter diesen Umständen setzen:

$$L_1 = \frac{s_1}{2} a_1^2 (H_1 - r_1) \cdot \lambda, \tag{4.}$$

635 worin r_1 ein positiver Werth ist, der von der Form und Höhe der Wellen, aber nicht von H_1 abhängt. Denken wir nämlich das H_1 vergrössert um DH_1 und das L_1 dem entsprechend um DL_1, so ist in dem dem Felde zugesetzten Streifen die Geschwindigkeit überall gleich a_1 und also:

$$DL_1 = \frac{s_1}{2} a_1^2 \cdot DH_1,$$

$$L_1 + DL_1 = \frac{s_1}{2} a_1^2 [(H_1 + DH_1) - r_1] \cdot \lambda.$$

Es gilt also derselbe Werth von r_1 auch für die grössere Höhe, unabhängig von dem Werthe des DH_1.

Die Formel (4.) ergiebt unmittelbar:

$$\mathfrak{p}_1 = - \mathfrak{f}_1 (H_1 - r_1). \tag{4^a.}$$

Verglichen mit galvanischen Verhältnissen, misst $\mathfrak{p}_1$ die Gesammtströmung (Intensität des Stromes), $\mathfrak{f}_1$ den Potentialunterschied an den Seitenflächen, demnach $(H_1 - r_1)$ die Leitungsfähigkeit, die dem Querschnitt proportional ist. Es entspricht also r_1 derjenigen constanten Verminderung des Querschnittes, welche die Strömung ebenso stark herabsetzen würde, wie die ungleichmässige Eindämmung durch die Wellen.

Die Minimalformel bei constant gehaltenem a_1 und a_2 ergiebt, da λ, H_1 und H_2 unverändert bleiben:

$$\delta(\Phi + L) = \delta\Phi - \frac{s_1}{2} a_1^2 \delta r_1 - \frac{s_2}{2} a_2^2 \cdot \delta r_2 = 0. \tag{4^b.}$$

Die andere, in der die a zu ersetzen sind durch:

$$a = \frac{\mathfrak{p}}{H - r},$$

$$\delta(\Phi - L) = \delta\Phi - \frac{s_1}{2} \mathfrak{p}_1^2 \frac{\delta r_1}{(H_1 - r_1)^2} - \frac{s_2}{2} \cdot \mathfrak{p}_2^2 \cdot \frac{\delta r_2}{(H_2 - r_2)^2},$$

fällt mit der erst gefundenen vollständig zusammen.

Die Grössen r_1 und r_2 hängen nur von der Wellenform ab, und ergeben sich meist durch einfache Rechnungen, sobald man die Form der Functionen ψ_1 und ψ_2 gefunden hat.

Fortführung der oberflächlichen Schichten.

Die Strömungsgrösse $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ der beiden Flüssigkeiten ist nicht mehr dieselbe, wie sie bei den gleichen Werthen der Geschwindigkeiten a_1 und a_2 über ebener Wasserfläche sein würde, sondern sie ist im obereren Medium um $r_1 a_1$ kleiner als vorher, im unteren um $r_2 a_2$. Denken wir uns nun auf 656
beiden Seiten die Geschwindigkeit $-a_2$ hinzugesetzt, sodass das untere Medium zur Ruhe kommt, die Wellen aber mit der Geschwindigkeit $-a_2$ fortlaufen, so fällt unter ebener Grenzfläche daselbst jede Bewegung fort; aber unter der wogenden Fläche tritt ein Gesammtstrom auf von der Grösse $-a_2 r_2$, und dafür geht der Wind im oberen Raume nicht durchweg mit der Geschwindigkeit $(a_1 + a_2)$, sondern nahe über der wogenden Fläche tritt eine Verminderung der Strömung der Luft im Betrage von $a_1 r_1$ ein.

Diese beiden Ströme bedingen nun, dass die Masse der Luft und des Wassers zusammengenommen ein anderes Bewegungsmoment in horizontaler Richtung haben, als wenn sie mit den gleichen Geschwindigkeiten a_1 und a_2 über ebener Grenzfläche flössen, und zwar beträgt diese Differenz M des Bewegungsmomentes (in Richtung des Windes als positiv gerechnet):

$$M = s_2 a_2 r_2 - s_1 a_1 r_1 . \tag{5.}$$

Gleich Null würde dies nur sein können, wenn:

$$s_2 a_2 r_2 = s_1 a_1 r_1 \tag{5^a.}$$

wäre, oder indem wir die Windgeschwindigkeit w einführen:

$$w = a_1 + a_2 , \tag{5^b.}$$

würde die Gleichung (5ª.) werden:

$$\frac{s_2 r_2 w}{s_1 r_1 + s_2 r_2} = a_1 ,$$

$$\frac{s_1 r_1 w}{s_1 r_1 + s_2 r_2} = a_2 .$$

Da nun r_1 und r_2 für die gewöhnlich vorkommenden Wellen wenig unterschiedene Werthe haben, wie uns die späteren Rechnungen zeigen werden, und für Luft und Wasser:

$$s_1 : s_2 = 1 : 773{,}4$$

ist, so würde diese Bedingung die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen gegen Wasser a_2 annähernd ergeben:

$$a_2 = \frac{w}{774{,}4}.$$

Für niedrige Wellen ergiebt Gleichung I. p. 775 meines vorjährigen Aufsatzes[1]) (unter Vernachlässigung der kleinen Grössen $\varkappa$ und ϱ):

$$s_1 a_1{}^2 + s_2 a_2{}^2 = \frac{g \cdot \lambda (s_2 - s_1)}{2\pi}.$$

Setzen wir $w = 10$ m, was einem ziemlich kräftigen Winde entspricht, so ergiebt sich für niedrige Wellen von unverändertem Bewegungsmoment:

$$a_1 = 9{,}98709 \text{ m}, \quad a_2 = 0{,}01291 \text{ m}, \quad \lambda = 0{,}082\,782 \text{ m}.$$

657 Diese Wellen von nur 8 cm Länge würden offenbar nur den ersten Kräuselungen der Oberfläche entsprechen können, die ein starker, diese treffender Wind augenblicklich erregt. Erst dadurch, dass derselbe Wind lange über diese erst erregten Wellen hinbläst, und ihnen einen Theil des Bewegungsmomentes langer Luftstrecken abgiebt, werden Wellen mit höheren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zu gewinnen sein.

Daraus würde übereinstimmend mit der Erfahrung folgen, dass gleichbleibend starker Wind, der eine ruhige Wasserfläche trifft, schneller laufende, d. h. längere oder höhere Wellen erst erzeugen kann, wenn er längere Zeit auf die erst entstandenen Wellen gewirkt, diese auf einem längeren Wege über die Wasserfläche begleitet hat.

Gleichzeitig erhellt auch, dass die Wellen unter gleichbleibendem Winde nur wachsen können, wenn der Wind schneller in derselben Richtung vorwärts geht, als sie selbst.

Energie fortlaufender Wellen auf ruhendem Wasser. Aehn-

---

[1]) Siehe S. 326 des vorliegenden Bandes.

lich wie mit dem Bewegungsmoment verhält es sich mit dem Energievorrath der Wellen. Unsere bisherigen Vergleichungen der Energie verschiedener Wellen untereinander beziehen sich auf die Energie der relativen Bewegung der Flüssigkeit gegen die als stillstehend gedachten Wellen gerechnet.

Der bekannte Satz, dass *die lebendige Kraft eines beliebig zusammengesetzten mechanischen Systemes gleich ist der lebendigen Kraft der Bewegungen relativ zu seinem Schwerpunkte plus der lebendigen Kraft des Schwerpunktes, in welchem man die Gesammtmasse des Systemes sich vereinigt denkt,* kann mit einer kleinen Aenderungsweise des Ausdruckes auch auf unseren Fall übertragen werden. Da nämlich die gesammte Masse des Systemes multiplicirt mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Schwerpunktes den Betrag des gesammten Bewegungsmomentes des Systemes in Richtung dieser Geschwindigkeit angiebt, so kann man die lebendige Kraft $\mathfrak{L}$ des Schwerpunktes auch setzen: 658

$$\mathfrak{L} = \tfrac{1}{2} M \cdot \mathfrak{v} = \tfrac{1}{2} \cdot \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{v}^2, \tag{6.}$$

wo M wieder das Bewegungsmoment des gesammten Systems in Richtung von $\mathfrak{v}$, und $\mathfrak{M}$ die Masse des Systems bezeichnet. Vergleicht man nun zwei verschiedene Bewegungszustände und Configurationen des Systems miteinander, in denen L_1 und L_2 die lebendigen Kräfte der Bewegungen relativ zum Schwerpunkt, Φ_1 und Φ_2 die potentiellen Energien sind, $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ die parallel gerichteten Geschwindigkeiten des Schwerpunkts, so ist der Unterschied ihrer gesammten Energien:

$$E_1 - E_2 = \Phi_1 - \Phi_2 + L_1 - L_2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{v}_1^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{v}_2^2 .$$

Füge ich nun, ohne die relativen Bewegungen zu verändern, bei beiden den Betrag c hinzu zur Geschwindigkeit des Schwerpunkts in deren Richtung, so wird der Unterschied geändert in:

$$E_1' - E_2' = E_1 - E_2 + c\,(M_1 - M_2).$$

Ist also $M_1 - M_2 = 0$, so ändert sich der Werth des Energieunterschiedes nicht durch Hinzufügung der Geschwindigkeit c. Dies würde, da für unsere wogenden Flüssigkeiten die Unterschiede $(E_1 - E_2)$ und $(M_1 - M_2)$ für jede Wellenlänge endlich sind, selbst wenn H_1 und H_2, also die Massen

der bewegten Flüssigkeiten, in das Unendliche wachsen, gelten müssen.

Also nur für die Wellen, die der Bedingung (5^a.) genügen, wird der Unterschied der Energie bei ruhenden Wellen und bei ruhendem Tiefwasser gleich gross sein. Nach den oben ausgeführten Sätzen werden stationäre Wellen dieser Art geringere Energie haben müssen, als ebenes Wasser, was also in diesem Falle auch für diese Art von Wellen über ruhendem Wasser gilt.

Bei den Wellen, welche grösseres a_2 haben, wird Zusatz einer gemeinsamen Geschwindigkeit ($- a_2$), welche die Wassertiefe in Ruhe bringt, den Energieunterschied zwischen glatter Oberfläche und Wellenbildung verändern um den Betrag:

$$E_1' - E_2' = E_1 - E_2 + a_2 [s_2 a_2 r_2 - s_1 a_1 r_1].$$

Der Index 1 bezieht sich auf die wogende Fläche, 2 auf
659 die ebene, die Strichelung E' auf ruhendes Tiefwasser, die ungestrichelten E auf ruhende Wellen.

Daraus geht hervor, dass die doch meist sehr kleinen Unterschiede ($E_1 - E_2$) bei Wellen von erheblicheren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten auf ruhendes Tiefwasser übertragen ihren negativen Werth verlieren und einen positiven annehmen werden.

Auch hier wird die Energie, die dem vorher ruhenden Wasser in Form der Hebung seiner Oberfläche und lebendiger Kraft seiner Bewegung gegeben wird, der Luft genommen werden müssen. Um den genügenden Betrag für die Bildung grosser Wellen zu gewinnen, wird auch aus diesem Grunde nöthig sein, dass erst lange Luftschichten vorübergezogen sind, und einen Theil ihrer lebendigen Kraft abgegeben haben.

Im ersten Moment, wo ein neuer Windstoss die Wasserfläche trifft, werden sich stationäre Wellen nur mit $M = 0$ und $E_1 - E_2 = 0$ mit dem in Gleichung (5^a.) gegebenen Werthe von a_2 bilden können. Die letztere Bedingung zeigt an, dass dieselben nahe am Zerspritzen sein würden, was man in der That oft bei ganz kleinen, plötzlich erregten Kräuselungen sieht. Uebrigens kommt bei diesen kleinen Wellen, wie Sir

William Thomson[1]) nachgewiesen hat, auch noch die Capillarspannung der Flüssigkeit in Betracht, die den Energiewerth der wogenden Fläche etwas höher stellt.

Der Regel nach werden sich also nicht gleich von Anfang an stationäre Wellen bilden, da die Wellen von unverändertem Bewegungsmoment einen Ueberschuss von Energie zurücklassen würden. Wenn sich aber von Anfang an Wellen von theils positiver, theils negativer Differenz des Bewegungsmomentes und der Energie nebeneinander auf dem ruhenden Wasser erzeugen, so wird die Summe dieser Differenzen Null werden können. Diese Wellensysteme von verschiedener Wellenlänge und Fortpflanzungsgeschwindigkeit werden, indem sie fortlaufen, mannigfache Interferenzen erzeugen, und nach dem von mir für Combinationstöne angegebenen Prinzip, was in seiner Anwendung auf die Fluthwellen schon sehr schöne Bestätigungen 660
durch Sir W. Thomson's Analyse der von der British Association angeordneten Fluthbeobachtungen erhalten hat, werden sich auch allmählich Wellen von grösseren Wellenlängen bilden können.

So lange der Wind den Wellen noch voreilt, wird er den Energievorrath und das Bewegungsmoment der Wellen weiter steigern können, und so lange noch die für ruhende Wellen berechnete Energie abnehmen und ein noch tieferes Minimum bilden kann, wird auch die Neigung, unter der Einwirkung aller der kleinen Störungen, welche die mitlaufenden anderen Wellen in den Fällen der Wirklichkeit erzeugen, der Form geringster Energie zuzustreben, weiterwirken. Diese wird endlich an den Sattelwerth und zum Zerschäumen der Oberkante führen, falls dies bei der gegebenen Windgeschwindigkeit erreicht werden kann.

Ich habe im April d. J. versucht, durch Beobachtungen, die ich auf dem Cap d'Antibes anstellte, über diese Folgerung aus der Theorie Aufschluss zu gewinnen. Ich maass mit einem kleinen tragbaren Anemometer die Windstärke unmittelbar am Rande der dort theilweise steil aufsteigenden Klippenwände der schmalen Landzunge, die ziemlich weit in das Meer hinein-

[1]) Siehe früheres Citat.

ragt. Indessen zeigten die Beobachtungen, dass mehrere Male draussen auf dem Meere stärkerer Wind geherrscht haben musste, als ich hatte beobachten können.

Ausserdem zählte ich die Anzahl der ankommenden Wogen.

Es ist bei den Wasserwellen ebenso gut wie bei den Schallwellen darauf zu rechnen, dass bei allen Ablenkungen, Verzögerungen, Dämpfungen, die sie erleiden, die Schwingungsdauer unverändert bleibt. Diese wird man also am Ufer noch ermitteln können, wenn auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in flachem Wasser geändert wird und Form und Länge der Welle sich ändern. Die Anzahl N der Wellen in der Minute wird durch

$$N = \frac{60 \cdot a_2}{\lambda}$$

661 ausgedrückt. Wenn a_2 auf na_2 steigt, steigt, wie mein vorjähriger Aufsatz zeigt, λ auf $n^2\lambda$, und also ist

$$N_n = \frac{N}{n}$$

Eine Geschwindigkeit $a_2 = 10$ m würde 9,4 Wellen in der Minute ergeben; dagegen $a_2 = 5$ m gäbe 18,8.

Die Zählung der Wellen ohne registrirende Instrumente ist nun nicht mit grosser Genauigkeit auszuführen, da auf dem Meere, soweit ich es gesehen, immer nebeneinander Wellen von etwas verschiedener Zeitperiode zu bestehen scheinen, welche interferiren, und das den akustischen Schwebungen entsprechende Phänomen geben. Während des Minimum der Bewegung wird man in der Zählung leicht unsicher. Bei wiederholten Zählungen an derselben Stelle erhält man also meist Schwankungen von etwa $^1/_{10}$ oder selbst mehr der gesuchten Anzahl.

Die Windstärke, die ich am Ufer beobachtete, ist nicht über 6,1 m gestiegen. Dies war am Abend meiner Ankunft in Antibes, 1. April d. J.; der Wind war OSO. Wellen zählte ich zwischen 8,5 und 10. Am anderen Morgen, 2. April, waren es noch 10 bis 10,5, obgleich der Wind fast ganz verschwunden war. Die Wellenzahl erklärt sich nur, wenn auf hohem Meere Wind bis etwa 10 m bestanden hatte. Der Wind hob sich

am 2. April im Laufe des Tages, doch nur bis auf 4 m. Dennoch war die Wellenzahl auch am 3. April noch 9,5 bei ganz schwachem Winde, am 4. April erst war Zunahme wahrnehmbar bis zu 12,5 Wellen.

Während einer Reihe von ruhigen Tagen steigerte sich die Zahl der immer kleiner werdenden Wellen allmählich auf 17 bis 18. Endlich am 7. April fing der Wind wieder an sich zu heben. Am Morgen fand ich 3,3 m Windgeschwindigkeit, die im Laufe des Tages bis 5,5 m anwuchs und die Anzahl der Wellen bis auf 11,5 herabbrachte. Dieses Mal aber war der Ort des stärkeren Windes nachweisbar. In Marseille hatte in der Nacht vorher ein schwerer Wirbelsturm geherrscht, und die von ihm erregten stärkeren Wellen zogen als ein scharf abgegrenzter dunkelgrauer Streifen vom Meereshorizonte heran, und erreichten Cap d'Antibes gegen Mittag lange vor dem stärkeren Winde, der sie erregt hatte, und der am letzteren
Orte überhaupt nicht dieselbe Gewalt, wie in Marseille, annahm. 662

Die wenigen Beobachtungen zeigen also einen Zusammenhang zwischen Wellenzahl und Windstärke allerdings an, und auch Uebereinstimmung, wenigstens in der Grössenordnung. Aber die Wellenzahlen sind alle etwas kleiner, als sie berechnet aus der Stärke des Uferwindes sein sollten und lassen auf stärkeren Wind in hoher See schliessen. Sie zeigen aber auch, dass die Nachwirkung eines starken Windes mehrere Tage dauern kann.

Bei 10 m Fortpflanzungsgeschwindigkeit durchlaufen die Wellen in einem Tage $7^{3}/_{4}$ Längengrade. Wenn also das Mittelmeer bis zur grossen Syrte hin am 1. April durch eine kräftige Brise von 10 m Geschwindigkeit in Wellen versetzt war, konnten diese $2^{1}/_{2}$ Tage brauchen, ehe die letzten die Küste von Südfrankreich erreichten.

Gründlicher wird sich das Problem jedenfalls erst lösen lassen, wenn Registrirungen der Wogen und ausgedehnte Beobachtungen der Windgeschwindigkeit vorliegen. Letztere sind leider für den April dieses Jahres noch nicht zusammengestellt oder wenigstens noch nicht veröffentlicht, und konnten von mir noch nicht benutzt werden.

CXXIX.

Zählen und Messen, erkenntnisstheoretisch betrachtet.

Aus: Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet. Leipzig 1887. Fues' Verlag. S. 17 bis 52.

---

17 Obgleich Zählen und Messen die Grundlagen der fruchtbarsten, sichersten und genauesten wissenschaftlichen Methoden sind, die wir überhaupt kennen, so ist über die erkenntnisstheoretischen Grundlagen derselben doch verhältnissmässig wenig gearbeitet worden. Auf philosophischer Seite mussten stricte Anhänger Kant's, die an seinem System, wie es sich unter den Anschauungen und Kenntnissen seiner Zeit historisch nun einmal entwickelt hatte, festhalten, allerdings die Axiome der Arithmetik für a priori gegebene Sätze halten, welche die transcendentale Anschauung der Zeit in demselben Sinne näher bestimmen, wie die Axiome der Geometrie die des Raumes. Durch diese Auffassung war in beiden Fällen die Frage nach einer weiteren Begründung und Ableitung dieser Sätze abgeschnitten.

Ich habe mich bemüht, in früheren Aufsätzen nachzuweisen, dass die Axiome der Geometrie keine a priori gegebenen Sätze seien, dass sie vielmehr durch Erfahrung zu bestätigen und zu widerlegen wären. Ich hebe hier nochmals hervor, dass dadurch Kant's Ansicht vom Raume, als transcendentaler Anschauungsform, nicht aufgehoben wird; meines Erachtens wird dadurch

nur eine einzelne unberechtigte Specialbestimmung seiner Ansicht beseitigt, welche allerdings für die metaphysischen Bestrebungen seiner Nachfolger höchst verhängnissvoll geworden ist.

Nun ist es klar, dass die auch von mir vertretene empiri-
stische Theorie, wenn sie die Axiome der Geometrie nicht mehr
als unbeweisbare und keines Beweises bedürftige Sätze anerkennt,
sich auch über den Ursprung der arithmetischen Axiome recht-
fertigen muss, die zur Anschauungsform der Zeit in der ent- 18
sprechenden Beziehung stehen.

Die Arithmetiker haben bisher an die Spitze ihrer Entwickelungen folgende Sätze als Axiome gestellt:

Axiom I. Wenn zwei Grössen einer dritten gleich sind, sind sie unter sich gleich.

Axiom II. *Associationsgesetz der Addition*, nach *H. Grassmann's* Benennung:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Axiom III. *Commutationsgesetz der Addition*:

$$a + b = b + a.$$

Axiom IV. Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches.

Axiom V. Gleiches zu Ungleichem addirt giebt Ungleiches.

Weiter als die übrigen Arithmetiker, deren Arbeiten ich kenne, und gleichzeitig philosophische Gesichtspunkte verfolgend, sind die Hrn. *Hermann* und *Robert Grassmann*[1]) in diese Untersuchung eingedrungen, und in der Ausführung der arithmetischen Schlussfolgerungen werde ich mich im Folgenden ihrem Wege durchaus anzuschliessen haben. Sie führen dabei die beiden Axiome II und III auf ein einziges zurück, was wir als *Grassmann's Axiom* bezeichnen wollen, nämlich:

$$(a + b) + 1 = a + (b + 1),$$

von dem aus sie durch den sogenannten (n + 1) Beweis die beiden obigen allgemeineren Sätze herleiten. Für die Lehre von der Addition der reinen Zahlen ist dadurch, wie ich im Folgenden zu zeigen hoffe, in der That die richtige Grundlage gewonnen.

---

[1]) *Hermann Grassmann*, Die Ausdehnungslehre. 1. Aufl., Leipzig 1844. Zweite Aufl. 1878. — *Robert Grassmann*, Die Formenlehre oder Mathematik. Stettin 1872.

Aber in die Frage nach der objectiven Anwendung der Arithmetik auf physische Grössen kommt dadurch zu den beiden Begriffen der Grösse und des gleich gross, deren Sinn im Gebiete der Thatsachen unerklärt bleibt, noch ein dritter hinzu, der der Einheit; und gleichzeitig scheint es mir eine unnöthige
19 Beschränkung des Gültigkeitsgebietes der gefundenen Sätze zu sein, wenn man von vornherein die physischen Grössen nur als solche behandelt, die aus Einheiten zusammengesetzt seien.

An die Brüder Grassmann hat sich unter den neueren Arithmetikern auch Hr. E. Schroeder[1]) im Wesentlichen angeschlossen, ist aber in einigen wichtigen Erörterungen noch tiefer gegangen. Während die früheren Arithmetiker den letzten Begriff der Zahl als den einer Anzahl von Gegenständen aufzufassen pflegten, konnten sie sich nicht ganz von den Gesetzen des Verhaltens dieser Gegenstände loslösen, und sie nahmen es einfach als Thatsache, dass die Anzahl einer Gruppe von Objekten unabhängig von der Reihenfolge, in der man sie zählt, zu finden ist. Hr. Schroeder ist, so viel ich gefunden habe, der Erste, welcher erkannt hat (l. c. S. 14), dass hierin ein Problem verborgen ist: auch hat er, meines Erachtens mit Recht, anerkannt, dass hier eine Aufgabe der Psychologie vorliegt, und andererseits die empirischen Eigenschaften zu definiren wären, welche den Objecten zukommen müssen, damit sie zählbar seien.

Ausserdem finden sich hierher gehörige Erörterungen, namentlich über den Begriff der Grösse, auch in Paul du Bois-Reymond's allgemeiner Functionentheorie (Tübingen, 1882) Th. I, Cap. 1 und in A. Elsas' Schrift „über die Psychophysik“ (Marburg, 1886) S. 49 ff. Beide Bücher aber beschäftigen sich mit specielleren Untersuchungen, ohne die vollständigen Grundlagen der Arithmetik dabei zu erörtern. Beide glauben, den Begriff der Grösse von dem der Linie ableiten zu dürfen, ersteres im empirischen Sinne, letzteres im Sinne des stricten Kantianismus. Was ich gegen den letzteren Standpunkt einzuwenden habe, ist schon oben erwähnt und von

---

[1]) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Leipzig, 1873.

mir in früheren Schriften auseinandergesetzt. Hr. P. du Bois-Reymond endet seine Untersuchung mit einer Paradoxie, wonach zwei entgegengesetzte Standpunkte, die beide in Widersprüche verwickeln, gleich möglich seien.

Da der letztgenannte Autor ein höchst scharfsinniger Mathematiker ist, der mit besonderem Interesse den tiefsten Grundlagen seiner Wissenschaft nachgespürt hat, so hat mich das von ihm erhaltene Schlussergebniss um so mehr ermuthigt, meine eignen Gedanken über das genannte Problem darzulegen.

Um den Standpunkt, welcher zu einfachen folgerichtigen Ableitungen und zur Auflösung der erwähnten Widersprüche führt, von vorn herein kurz zu bezeichnen, möge folgendes dienen: Ich betrachte die Arithmetik, oder die Lehre von den reinen Zahlen, als eine auf rein psychologischen Thatsachen aufgebaute Methode, durch die die folgerichtige Anwendung eines Zeichensystems (nämlich der Zahlen) von unbegrenzter Ausdehnung und unbegrenzter Möglichkeit der Verfeinerung gelehrt wird. Die Arithmetik untersucht namentlich, welche verschiedene Verbindungsweisen dieser Zeichen (Rechnungsoperationen) zu demselben Endergebniss führen. Das lehrt unter Andrem, auch ausserordentlich verwickelte Rechnungen, selbst solche, die in keiner endlichen Zeit zu beenden wären, durch einfachere zu ersetzen. Abgesehen von der damit gemachten Probe auf die innere Folgerichtigkeit unseres Denkens, würde freilich ein solches Verfahren zunächst ein reines Spiel des Scharfsinns mit eingebildeten Objecten sein, welches Hr. P. du Bois-Reymond spottend dem Rösselsprung auf dem Schachbrett vergleicht, wenn es nicht so ausserordentlich nützliche Anwendungen zuliesse. Denn mittels dieses Zeichensystems der Zahlen geben wir Beschreibungen der Verhältnisse reeller Objecte, die, wo sie anwendbar sind, jeden geforderten Grad der Genauigkeit erreichen können, und mittels desselben werden in einer grossen Anzahl von Fällen, wo Naturkörper unter der Herrschaft bekannter Naturgesetze zusammentreffen oder zusammenwirken, die den Erfolg messenden Zahlenwerthe durch Rechnung vorausgefunden.

Dann muss aber gefragt werden: Was ist der objective Sinn davon, dass wir Verhältnisse reeller Objecte durch benannte Zahlen als Grössen ausdrücken, und unter welchen Bedingungen

können wir dies thun? Diese Frage löst sich, wie wir finden werden, in zwei einfachere auf, nämlich:

21 1. Was ist der objective Sinn davon, dass wir zwei Objecte in gewisser Beziehung für *gleich* erklären?

2. Welchen Charakter muss die physische Verknüpfung zweier Objecte haben, damit wir vergleichbare Attribute derselben als *additiv* verbunden, und diese Attribute demzufolge als *Grössen*, die durch benannte Zahlen ausgedrückt werden können, ansehen dürfen? Benannte Zahlen nämlich betrachten wir aus ihren Theilen, beziehlich Einheiten, durch Addition zusammengesetzt.

Die gesetzmässige Reihe der Zahlen.

Das Zählen ist ein Verfahren, welches darauf beruht, dass wir uns im Stande finden, die Reihenfolge, in der Bewusstseinsacte zeitlich nach einander eingetreten sind, im Gedächtniss zu behalten. Die Zahlen dürfen wir zunächst als eine Reihe willkürlich gewählter Zeichen betrachten, für welche nur eine bestimmte Art des Aufeinanderfolgens als die gesetzmässige, oder nach gewöhnlicher Ausdrucksweise „natürliche" von uns festgehalten wird. Die Bezeichnung der „natürlichen" Zahlenreihe hat sich wohl nur an eine bestimmte Anwendung des Zählens geknüpft, nämlich an die Ermittelung der *Anzahl* gegebener reeller Dinge. Indem wir von diesen eines nach dem andern dem gezählten Haufen zuwerfen, folgen die Zahlen bei einem natürlichen Vorgang auf einander in ihrer gesetzmässigen Reihe. Mit der Reihenfolge der Zahlzeichen hat dies nichts zu thun; wie die Zeichen in den verschiedenen Sprachen verschieden sind, so könnte auch ihre Reihenfolge willkürlich bestimmt werden, wenn nur unabänderlich irgend eine bestimmte Reihenfolge als die normale oder gesetzmässige festgehalten wird. Diese Reihenfolge ist in der That eine von Menschen, unsern Voreltern, die die Sprache ausgearbeitet haben, gegebene Norm oder Gesetz. Ich betone diesen Unterschied, weil das angeblich „Natürliche" der Zahlenreihe mit der unvollständigeren Analyse des Begriffs der Zahl zusammenhängt. Die Mathematiker bezeichnen diese gesetzmässige Zahlenreihe als die der *positiven ganzen Zahlen*.

Die Zahlenreihe ist unserem Gedächtniss ausserordentlich 22
viel fester eingeprägt als jede andere Reihe, was unzweifelhaft auf ihrer viel häufigeren Wiederholung beruht. Wir brauchen sie deshalb auch vorzugsweise, um durch Anknüpfung an sie die Erinnerung anderer Reihenfolgen in unserem Gedächtniss zu festigen; d. h. wir brauchen die Zahlen als Ordnungszahlen.

Eindeutigkeit der Folge.

In der Zahlenreihe sind Vorwärtsschreiten und Rückwärtsschreiten nicht gleichwerthige, sondern wesentlich verschiedene Vorgänge, wie die Folge der Wahrnehmungen in der Zeit, während bei Linien, die im Raume dauernd und ohne Aenderung in der Zeit bestehen, keine der beiden möglichen Richtungen des Fortschreitens vor der andern ausgezeichnet ist.

Thatsächlich wirkt in unserem Bewusstsein jeder gegenwärtige Act desselben, sei es Wahrnehmung, Gefühl oder Wille, zusammen mit den Erinnerungsbildern vergangener Acte, nicht aber zukünftiger, die zur Zeit im Bewusstsein noch gar nicht vorhanden sind, und der gegenwärtige Act ist uns bewusst als specifisch verschieden von den Erinnerungsbildern, die neben ihm bestehen. Dadurch ist die gegenwärtige Vorstellung in einen der Anschauungsform der Zeit angehörigen Gegensatz als die nachfolgende den vorausgegangenen gegenüber gestellt, ein Verhältniss, welches nicht umkehrbar ist, und dem nothwendig jede in unser Bewusstsein eintretende Vorstellung unterworfen ist. In diesem Sinne ist die Einordnung in die Zeitfolge die unausweichliche Form unserer inneren Anschauung.

Sinn der Bezeichnung.

Nach den vorausgegangenen Erörterungen ist jede Zahl nur durch ihre Stellung in der gesetzmässigen Reihe bestimmt.

Das Zeichen Eins legen wir demjenigen Gliede der Reihenfolge bei, mit dem wir beginnen.

Zwei ist die Zahl, welche unmittelbar, d. h. ohne Zwischen-
schiebung einer anderen Zahl in der gesetzmässigen Reihe auf 23
Eins folgt.

Drei ist die Zahl, die ebenso unmittelbar auf Zwei folgt u. s. w.

Ein Grund, diese Reihe irgendwo abzubrechen, oder in ihr zu einem schon früher gebrauchten Zeichen zurückzukehren, ist nicht vorhanden. Das dekadische System macht es in der That möglich, durch Combination von nur zehn verschiedenen Zahlzeichen in einfacher und leicht verständlicher Weise die Reihe unbegrenzt fortzusetzen, ohne je ein Zahlzeichen zu wiederholen.[1])

Die Zahlen, welche einer gegebenen Zahl in der gesetzmässigen Reihe folgen, nennen wir *höher* als jene, die, welche ihr vorangehen, *niedriger*.[2]) Es giebt das eine vollständige Disjunction, die in dem Wesen der Zeitfolge begründet ist, und die wir aussprechen können als:

Axiom VI. Wenn zwei Zahlen verschieden sind, muss eine von ihnen höher sein als die andere.

Addition reiner Zahlen.

Um allgemeine Sätze über die Zahlen aufzustellen, brauche ich die bekannten Bezeichnungen der Buchstabenrechnung. Jeder Buchstabe des kleinen lateinischen Alphabets soll jede beliebige Zahl bezeichnen können, aber innerhalb jedes einzelnen Theorems oder jeder einzelnen Rechnung immer dieselbe.

Zeichenerklärung: Wenn ich irgend eine Zahl mit einem Buchstaben, z. B. a bezeichnet habe, will ich die in der normalen Reihe darauf folgende mit (a + 1) bezeichnen.

Dieses Zeichen (a + 1) soll also hier zunächst keine andere Bedeutung haben, als die angegebene. Ueberhaupt aber bedeuten,
24 wie üblich, die Parenthesen, dass die von ihnen umschlossenen Zahlen zuerst in eine Zahl zusammengefasst werden sollen, ehe man die übrigen vorgeschriebenen Operationen ausführt.

---

[1]) Die „*Zahlentheorie*“ untersucht Zahlenreihen, in denen nach einer bestimmten Zahl immer wieder die Eins folgt, die sich also periodisch wiederholen.

[2]) Ich vermeide hier noch *grösser* und *kleiner*; dieser Unterschied schliesst sich passender an den Begriff der Anzahl; davon später.

Das Gleichheitszeichen $a = b$ soll hier in der reinen Zahlenlehre nur bezeichnen: „a ist dieselbe Zahl wie b.“ Daher folgt aus

$$a = b$$
$$c = b$$

unmittelbar $a = c$, denn die oberen beiden Gleichungen sagen aus, dass beide, a wie c dieselbe Zahl b sind. Dies stellt die Gültigkeit von Axiom (I) für die Reihe der ganzen Zahlen in der reinen Zahlenlehre fest.

Zählen der Zahlen.

Wir betrachten nunmehr die normale Zahlenreihe als festgestellt und gegeben. Jetzt können wir ihre Glieder selbst als eine in unserem Bewusstsein gegebene Reihe von Vorstellungen betrachten, deren Ordnung von einem beliebig gewählten Gliede ab wir wieder durch die von *Eins* beginnende normale Zahlenreihe bezeichnen können.

Definition: Ich bezeichne als $(a + b)$ diejenige Zahl der Hauptreihe, auf welche ich stosse, wenn ich bei $(a + 1)$ Eins, bei $[(a + 1) + 1]$ Zwei u. s. w. zähle, bis ich bis b gezählt habe.

Die Beschreibung dieses Verfahrens lässt sich zusammenfassen in folgender Gleichung (*H. Grassmann's* Axiom der Addition):

$$(a + b) + 1 = a + (b + 1) \qquad (1.)$$

Erläuterung: Diese Gleichung sagt aus, dass, wenn ich von $(a + 1)$ als Eins ausgehend bis b gezählt, und dabei die mit $(a + b)$ bezeichnete Zahl gefunden habe, ich um eines weiter zählend in der ersteren Reihe auf $(b + 1)$ komme, in der zweiten auf die dem $(a + b)$ folgende Zahl, nämlich $[(a + b) + 1]$. So bezeichne ich also das in der Definition erwähnte $[(a + 1) + 1]$ auch mit $[a + (1 + 1)]$ oder $(a + 2)$, weiter das $[(a + 2) + 1]$ mit $(a + 3)$, und so fort ohne Grenzen.

In der Sprache der Arithmetik würden wir dies Verfahren 25
Addition und die Zahl $(a + b)$ die *Summe* von a und b,

a und b selbst die *Summanden* nennen; aber ich mache darauf aufmerksam, dass in dem angegebenen Verfahren die Grössen a und b nicht gleiche Rolle spielen, und es also erst bewiesen werden muss, dass sie vertauscht werden können, ohne die Summe zu ändern, was weiter unten geschehen soll. Indessen, wenn wir dieses Bedenken im Auge behalten, können wir diese Bezeichnung acceptiren, und sagen, dass die Form (a + b) vorschreibt, es solle b zu a addirt werden, und (a + b) sei die Summe von a und b, wobei aber die Ordnung, dass b hinter a steht, zunächst festgehalten werden muss. Es mag deshalb a der *erste*, b der *zweite* *Summandus* genannt werden. Dem entsprechend kann in folgerichtiger Anwendung dieser Bezeichnung jede Zahl (a + 1) als die Summe der vorausgehenden a und der Zahl Eins bezeichnet werden.

Das angegebene Verfahren der Addition wird in der gesetzmässigen Zahlenreihe stets ein Resultat ergeben müssen und zwar für dieselben Zahlen a und b stets dasselbe. Denn jeder der Schritte, aus denen wir die Addition (a + b) zusammengesetzt haben, ist ein Fortschritt in der Reihe der positiven ganzen Zahlen um eine Stufe, von (a + b) zu (a + b) + 1, und von b zu (b + 1). Jeder einzelne ist ausführbar, und jeder einzelne muss nach unseren Voraussetzungen über die unabänderliche Bewahrung der Zahlenreihe in unserem Bewusstsein immer wieder denselben Erfolg geben.

Es wird also sicher eine Zahl geben, die der Zahl (a + b) entspricht, und nur eine. Dieser Satz würde dem Inhalt des *Axiom* IV entsprechen, wenn dieses auf die reinen Zahlen und die hier vorgeschriebene Art der Addition angewendet wird.

Andererseits folgt aus der angegebenen Beschreibung des Verfahrens, dass (a + b) nothwendig von a verschieden, und zwar höher als a ist, wenn b eine von den ganzen positiven Zahlen ist.

Wenn c eine höhere Zahl ist als a, werde ich, von a stufen-
26 weise aufwärts zählend, nothwendig c erreichen müssen, und

abzählen können, die wievielte Zahl c von a aus gezählt ist· Sie sei die b-te, dann ist

$$c = (a + b).$$

Wir wollen diesen Satz für spätere Citation bezeichnen als Axiom VII. Wenn eine Zahl c höher ist, als eine andre a, so kann ich c als die Summe von a und einer zu findenden ganzen positiven Zahl b darstellen.

Theorem I: Von der Reihenfolge der Ausführung mehrerer Additionsacte. (Associationsgesetz nach Grassmann.)

Wenn ich zu einer Summe (a + b) eine Zahl c addiren soll, so erhalte ich dasselbe Resultat, wenn ich zur Zahl a die Summe (b + c) addire. Oder als Gleichung geschrieben:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (2.)$$

Beweis:

Der Satz ist, wie Gleichung (1) ausspricht, gültig für c = 1. Es soll gezeigt werden, dass, wenn er für irgend einen Werth von c richtig ist, er auch für den darauf folgenden (c + 1) richtig ist.

Es ist nämlich nach Gleichung (1):

$$[(a + b) + c] + 1 = (a + b) + (c + 1)$$
$$[a + (b + c)] + 1 = a + [(b + c) + 1]$$
$$= a + [b + (c + 1)]$$

Letzteres nach Satz 1.

Also wenn der Satz 2 für den hier vorkommenden Werth von c gilt, so sind die links stehenden Ausdrücke der ersten beiden Gleichungen dieselben Zahlen, und es ist also auch

$$(a + b) + (c + 1) = a + [b + (c + 1)],$$

d. h. der Satz gilt auch für (c + 1).

Da er nun, wie vorher bemerkt, für c = 1 gilt, so gilt er auch für c = 2. Wenn er für c = 2 gilt, so gilt er auch für c = 3 u. s. w. ohne Grenzen.

Zusatz: Da die beiden in Gleichung (2) gesetzten Formen

27 dieselbe Bedeutung haben, können wir für beide auch mit Weglassung der Klammern die Bezeichnung einführen:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) \qquad (2_a.)$$

Nur dürfen wir zunächst die Reihenfolge von a, b, c in diesen Ausdrücken nicht verändern, ehe wir nicht die Zulässigkeit einer solchen Vertauschung erwiesen haben.

Verallgemeinerung des Associationsgesetzes.

Wir verallgemeinern zuerst die in (2_a) gegebene Bezeichnung.

$$R = a + b + c + d + \text{etc} + k + l \qquad (2_b.)$$

soll eine Summe bezeichnen, in der die einzelnen Additionen in der Reihe, wie sie geschrieben sind, ausgeführt werden, und zu kürzerer Bezeichnung sei

$$m + R = m + a + b + c + d + \text{etc.} + k + l,$$

während

$$m + (R) = m + (a + b + c + d + \text{etc.} + k + l);$$

dagegen ist nach dem Sinn dieser Schreibweise:

$$(R) + m = R + m.$$

Andere grosse lateinische Buchstaben sollen in demselben Sinne gebraucht werden, wie R.

Dann ist

$$R + b + c + S = [(R) + b + c] + S,$$

weil es gleichbedeutende Ausdrücke sind. Andererseits ist nach Gleichung (2_a)

$$(R) + b + c = (R) + (b + c).$$

Also

$$\begin{aligned} R + b + c + S &= [R + (b + c)] + S \\ &= R + (b + c) + S \end{aligned}$$

d. h. statt alle Glieder der Reihe nach zu addiren, kann man zuerst zwei beliebige mittlere in eine Summe zusammenfassen.

Nachdem dies geschehen, ist die eben gebildete Summe (b + c) nur durch eine einzige Zahl vertreten, und man kann

in derselben Weise weitergehen, und irgend ein beliebiges anderes Paar aufeinander folgender Zahlen verbinden und so fort.

Also auch bei beliebig vielen Gliedern kann die Reihenfolge, in der die durch die einzelnen + Zeichen vorgeschriebenen Additionen ausgeführt werden, geändert werden, ohne dass sich 28
die Gesammtsumme ändert.

Theorem II (Commutationsgesetz nach H. Grassmann): Wenn in einer Summe aus zwei Summanden einer der Summanden Eins ist, kann die Ordnung derselben vertauscht werden. Dem entspricht die Gleichung:

$$1 + a = a + 1 \tag{3.}$$

Beweis: Die Gleichung ist richtig für $a = 1$. Wiederum ist zu zeigen, dass wenn sie für irgend einen bestimmten Werth von a richtig ist, sie auch für $(a + 1)$ richtig ist. Denn nach Gleichung (1) ist

$$(1 + a) + 1 = 1 + (a + 1).$$

Nach der Annahme soll für a Gleichung (3) gelten, folglich

$$(1 + a) + 1 = (a + 1) + 1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$1 + (a + 1) = (a + 1) + 1, \tag{3$_a$}$$

was zu erweisen war.

Da der Satz für $a = 1$ richtig, ist er auch für $a = 2$ richtig, und da er für $a = 2$ richtig, ist er auch für $a = 3$ richtig, u. s. w. ohne Grenzen.

Theorem III: In jeder Summe aus zwei Summanden kann die Reihenfolge der Summanden geändert werden, ohne die der Summe entsprechende Zahl zu ändern. Geschrieben:

$$a + b = b + a \tag{4.}$$

Der Satz ist nach Theorem II richtig für $b = 1$. Wenn er für einen bestimmten Werth von b richtig ist, ist er auch für $(b + 1)$ richtig. Denn nach Theorem I ist:

$$(a + b) + 1 = a + (b + 1),$$

nach unserer Voraussetzung ist

$$(a + b) + 1 = (b + a) + 1 = 1 + (b + a)$$
$$= (1 + b) + a = (b + 1) + a.$$

29 Von den letzten drei Schritten ist der erste und letzte nach Theorem II, Gleichung (3) gemacht, der mittlere nach Theorem I, Gleichung (2). Folglich ist

$$a + (b + 1) = (b + 1) + a$$

wie zu beweisen war.

Aus dem Satze

$$a + 1 = 1 + a,$$

folgt also

$$a + 2 = 2 + a,$$

aus diesem wieder

$$a + 3 = 3 + a,$$

und so fort ohne Ende.

Beweis von Axiom V. Wenn a und f verschiedene Zahlen sind, können wir, wie in *Axiom* VII gezeigt ist, immer eine positive ganze Zahl b bestimmen, so dass

$$(a + b) = f.$$

Dann ist

$$c + f = c + (a + b) = (c + a) + b.$$

Danach ist $(c + a)$ dann nothwendig verschieden von $(c + f)$, d. h.: *Verschiedene Zahlen zu derselben Zahl addirt, geben verschiedene Summen.*

Da aber nach Theorem III

$$c + f = f + c$$
$$a + c = c + a,$$

so lässt sich die letzte Folgerung auch schreiben

$$(f + c) = (a + c) + b,$$

d. h. *dieselbe Zahl zu verschiedenen Zahlen addirt, giebt verschiedene Summen.*

Daraus folgt der für die Theorie der Subtraction und der Gleichungen wichtige Satz, dass zwei Zahlen, die bei der Addition derselben Zahl zu jeder von ihnen dieselbe Summe ergeben, identisch sein müssen.

Vertauschung der Ordnung beliebig vieler Elemente.

Bei der bisher beschriebenen Art des Abzählens behufs der Addition waren zwei Reihen von Zahlen, die in ihrer normalen Reihenfolge stehen geblieben waren, mit einander paarweise 30
combinirt, so dass $(n + 1)$ der 1, $(n + 2)$ der 2 u. s. w. zugeordnet wurde. Nur die Anfangspunkte beider Folgen in der Zahlenreihe waren verschieden.

Wir wollen jetzt den allgemeineren Fall einer Zuordnung der Elemente zweier Reihen betrachten, von denen die eine eine bestimmte Folge bewahren soll, und daher durch die Zahlzeichen dargestellt werden kann, die andere aber veränderliche Folge habe. Für die letztere wollen wir hier als Zeichen die Buchstaben des griechischen Alphabets benutzen. Die letzteren haben allerdings auch eine unserem Gedächtnisse eingeprägte Reihenfolge, wie sie in der gewöhnlichen Aufstellung des Alphabets gegeben ist; wir wollen diese aber nur als eine unter vielen möglichen anderen durch zufällige Momente ausgezeichnete Reihe benutzen, deren festere Erinnerung uns die Uebersicht erleichtert, übrigens uns vorbehalten sie beliebig zu verändern. Andererseits aber verlangen wir, dass bei den auszuführenden Aenderungen der Folge dieser Elemente keines ausgelassen, und keines wiederholt werde. Das controlliren wir in unserem Gedächtniss am leichtesten, wenn wir festsetzen, dass die Gruppe als Elemente alle Buchstaben enthalten soll, die in der überlieferten Ordnung des Alphabets einem bestimmten z. B. $\varkappa$ vorausgehen.

Umstellung zweier aufeinander folgender Elemente einer Reihe.

Wenn zweien auf einander folgenden Zahlen n und $(n + 1)$ zwei Elemente z. B. ε und ζ zugeordnet sind, so kann n entweder mit ε oder mit ζ verbunden werden; dies giebt die beiden Arten der Zuordnung

$$\begin{matrix} n & (n+1) \\ \varepsilon & \zeta \end{matrix}$$

oder

$$\begin{matrix} n & (n+1) \\ \zeta & \varepsilon \end{matrix}$$

Indem wir statt der ersten dieser beiden Ordnungen die andre einführen, und alle übrigen zugeordneten Paare von je
31 einer Zahl und einem Buchstaben unverändert lassen, so verliert keine Zahl den zugeordneten Buchstaben, kein Buchstabe die zugeordnete Zahl, wir wiederholen keinen Buchstaben und lassen auch keinen ausfallen. Wenn also die Reihe, welche die beiden ersten oben angeführten Paare enthielt, vor der Umstellung eine Gruppe ohne Lücken und ohne Wiederholungen war, so ist es auch die durch die Umstellung gewonnene.

Durch eine passende Wiederholung solcher Umstellungen benachbarter Elemente kann ich jedes beliebig gewählte Element der Gruppe zum ersten in der Reihe machen, ohne Wiederholungen oder Lücken in der Reihe zu erzeugen. Denn wenn das gewählte Element ξ das n^{te} ist, kann ich es mit dem $(n - 1)^{ten}$, dann mit dem $(n - 2)^{ten}$ u. s. w. vertauschen, so dass seine Stellenzahl immer niedriger wird, bis ich endlich bei der niedrigsten Stellenzahl der Grnppe, nämlich 1, ankomme.

In derselben Weise kann ich jedes Element der Reihe, dessen Stellenzahl höher als m ist, zum m^{ten} Gliede der Gruppe machen, ohne Lücken oder Wiederholungen zu erzeugen. Bei diesem letzteren Verfahren behalten diejenigen Glieder der Reihe, deren Stellenzahl niedriger als m ist, dieselbe unverändert bei.

Daraus folgt: Durch fortgesetzte Vertauschung benachbarter Glieder einer Gruppe kann ich jede mögliche Reihenfolge ihrer Glieder hervorbringen, ohne Elemente ausfallen zu lassen oder solche zu wiederholen. Denn ich kann beliebig vorschreiben, welches das erste Glied der Reihe werden soll und dies nach dem angegebenen Verfahren ausführen. Dann kann ich vorschreiben, welches das zweite werden soll, und dies ebenso ausführen. Hierbei wird das eben zum ersten gewordene Element nicht aus seiner Stellung gebracht. Dann kann ich das dritte bestimmen u. s. w. bis zum letzten.

Theorem IV: Attribute einer Reihe von Elementen, die sich nicht verändern, wenn beliebige benachbarte

Elemente mit einander in ihrer Folge vertauscht werden, ändern sich bei keiner möglichen Aenderung 32
der Reihenfolge der Elemente.

Dies führt uns zunächst auf die Verallgemeinerung des Commutationsgesetzes der Addition.

Die grossen Buchstaben mögen wieder, wie bei der Verallgemeinerung des Associationsgesetzes, Summen von beliebig vielen Zahlen bedeuten. Dann ist nach dem verallgemeinerten Associationsgesetz

$$R + a + b + S = R + (a + b) + S.$$

Nach dem Commutationsgesetz für zwei Summanden ist

$$a + b = b + a.$$

Also da hiernach $(a + b)$ dieselbe Zahl wie $(b + a)$ ist:

$$\begin{aligned} R + a + b + S &= R + (b + a) + S \\ &= R + b + a + S \end{aligned}$$

Letzteres wieder nach dem Associationsgesetz.

Da man hiernach in der gegebenen Summe beliebige zwei auf einander folgende Elemente mit einander vertauschen kann, ohne den Betrag der Summe zu ändern, so kann man nach Theorem IV sie alle mit einander vertauschen und in beliebige Reihenfolge bringen, ohne die Summe zu ändern.

Damit sind die fünf grundlegenden Axiome der Addition für den von uns zu Grunde gelegten Begriff der Addition erwiesen und aus ihm hergeleitet. Nun ist noch nachzuweisen, dass dieser Begriff übereinstimmt mit demjenigen, der von der Ermittelung der Anzahl zählbarer Objecte ausgeht.

Dies führt uns zunächst zum Begriff der *Anzahl* der Elemente einer Gruppe. Wenn ich die vollständige Zahlenreihe von 1 bis n brauche, um jedem Elemente der Gruppe eine Zahl zuzuordnen, so nenne ich n die *Anzahl* der Glieder der Gruppe. Die der Aufstellung von Theorem IV vorausgegangenen

Erörterungen zeigen, dass die Anzahl der Glieder durch Aenderungen der Reihenfolge der Glieder unverändert bleibt, wenn Auslassungen und Wiederholungen derselben vermieden werden.

Dieser Satz ist nun anwendbar auf reelle Objecte, als deren
33 zeitweilig gegebene Namen man die α, β, γ u. s. w. betrachten kann. Nur müssen diese Objecte, wenigstens so lange das Ergebniss einer ausgeführten Zählung gültig sein soll, gewissen Bedingungen thatsächlich genügen, damit sie zählbar seien. Sie dürfen nicht verschwinden, oder mit andern verschmelzen, es darf keines sich in zwei theilen, kein neues hinzukommen, so dass jedem in Form eines griechischen Buchstaben gegebenen Namen auch dauernd ein und nur ein abgegrenztes, und als einzelnes erkennbar bleibendes Object entspricht. Ob diese Bedingungen bei einer bestimmten Klasse von Objecten eingehalten seien, lässt sich natürlich nur durch Erfahrung bestimmen.[1]).

Dass die Gesammtzahl der Glieder zweier Gruppen, denen kein Glied gemeinsam ist, nach dem vorher aufgestellten Begriff der Addition gleich der Summe der Anzahlen der Glieder beider Einzelgruppen ist, ergiebt sich sogleich aus der oben beschriebenen Methode des Zählens. Man würde, um die Gesammtzahl zu finden, erst die eine Gruppe durchzählen können. Wenn sie p Glieder hat, würde die Zahl $(p + 1)$ auf das erste Glied der andern Gruppe, $(p + 2)$ auf das zweite kommen, und so fort, so dass die Gesammtzahl der Glieder beider Gruppen genau durch dasselbe Verfahren des Zählens gefunden wird, wie die oben definirte Summe der beiden Zahlen, welche die Anzahl der Elemente jeder Gruppe angeben.

Der oben beschriebene Begriff der Addition deckt sich also in der That mit dem Begriff derselben, der aus der Bestimmung der Gesammtanzahl mehrerer Gruppen zählbarer Objecte hervorgeht, hat aber den Vortheil, dass er ohne Beziehung auf äussere Erfahrung gewonnen werden kann.

---

[1]) Während des Druckes erfahre ich, dass Hr. Professor L. Kronecker die Begriffe der Zahl und Anzahl in einer Vorlesung des letzten Wintersemesters ähnlich entwickelt hat.

Hiermit ist die Reihe der für Begründung der Arithmetik nothwendigen Axiome der Addition für den nur aus innerer Anschauung entnommenen Begriff der Zahlen und der Summe, 34
von dem wir ausgegangen sind, erwiesen, und zugleich die Uebereinstimmung des Ergebnisses dieser Art der Addition mit der, welche aus dem Zählen von äusseren zählbaren Objecten hergeleitet werden kann.

Die Theorie der Subtraction und Multiplication entwickelt sich von hier aus ohne weitere Schwierigkeiten, indem die Differenz (a—b) definirt wird als diejenige Zahl, die man zu b addiren muss, um a als Summe zu erhalten, und die Multiplication als Addition einer Anzahl gleicher Zahlen. Hier brauche ich nur auf Herrn Grassmann zu verweisen, der die Multiplication reiner Zahlen durch die beiden Gleichungen definirt:

$$1 . a = a,$$
$$(b + 1) . a = b . a + a.$$

In Bezug auf die Subtraction ist nur zu bemerken, dass man die Zahlen als Zeichen einer Reihenfolge auch in absteigender Richtung in das Unbegrenzte fortsetzen kann, indem man von der 1 rückwärts zur 0, von da zu (—1), (—2) u. s. w. übergeht, und diese neuen Zeichen ebenso wie die früher allein gebrauchten positiven ganzen Zahlen behandelt. Dann hat die Differenz zweier Zahlen immer eine Bedeutung, und zwar nur eine; sie ist also eindeutig bestimmt.

Die Uebereinstimmung, wie der Unterschied zwischen den Gesetzen der Addition und Multiplication ist wegen des Folgenden hier noch zu besprechen.

Das Associationsgesetz und Commutationsgesetz gelten für beide Operationen. Es ist, wie wir gesehen:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$a + b = b + a .$$

Aber auch ebenso:

$$(a . b) . c = a . (b . c)$$
$$a . b = b . a.$$

Ein Unterschied zwischen den Grundeigenschaften beider Operationen zeigt sich erst, wenn man durch jede derselben eine Anzahl n gleicher Zahlen a verknüpft. Durch Addition ver-
35 bunden geben diese das Product n . a, welches selbst wieder dem Commutationsgesetz unterliegt:

$$n \cdot a = a \cdot n.$$

Durch Multiplication von n gleichen Factoren dagegen erhält man die Potenz a^n, in welcher a und n, besondere Fälle ausgenommen, nicht mit einander vertauscht werden können, ohne den Werth der Potenz zu ändern.

Ebenso zeigt sich für das Verhältniss jeder dieser Operationen in ihrer Verbindung mit der nächst höheren im einen Falle eine Analogie:

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$
$$c^{a+b} = c^a \cdot c^b$$

Aber die Analogie fehlt bei der Commutation; denn es gilt nicht die gleiche Beziehung mehr für $(a + b)^c$ einerseits und $a^c \cdot b^c$ andererseits.

Benannte Zahlen.

Zählung ungleicher Stücke, wie wir sie oben besprochen haben, brauchen wir der Regel nach nur zur Feststellung ihrer Vollzähligkeit.

Von viel grösserer Bedeutung und ausgedehnterer Anwendung ist das Zählen gleicher Objecte. Solche Objecte, die in irgend einer bestimmten Beziehung gleich sind und gezählt werden, nennen wir die *Einheiten* der Zählung, die Anzahl derselben bezeichnen wir als eine *benannte Zahl*, die besondere Art der Einheiten, die sie zusammenfasst, die *Benennung der Zahl*.

Eine Anzahl ist, wie wir oben gesehen haben, zerlegbar in Theile, welche im Ganzen *additiv* zusammengefasst sind. Die Summe zweier benannten Zahlen von gleicher Benennung ist die Gesammtzahl aller ihrer Einheiten, also nothwendig wieder eine benannte Zahl derselben Benennung. Wenn wir zwei ver-

schiedene Gruppen von verschiedener Anzahl zu vergleichen haben, so bezeichnen wir die, welcher die höhere Anzahl zukommt, als die *grössere*, die von niederer Anzahl als die *kleinere*. Haben beide dieselbe Anzahl, so bezeichnen wir sie als *gleich*.

Objecte oder Attribute von Objecten, die mit ähnlichen ver- 36
glichen den Unterschied des grösser, gleich oder kleiner zulassen, nennen wir *Grössen*. Können wir sie durch eine benannte Zahl ausdrücken, so nennen wir diese den *Werth* der Grösse, das Verfahren, wodurch wir die benannte Zahl finden, *Messung* der Grösse. Uebrigens gelangen wir in vielen thatsächlich ausgeführten Untersuchungen nur dazu, die Messung auf willkürlich gewählte, oder durch das gebrauchte Instrument gegebene Einheiten zurückzuführen; dann haben die Zahlen, die wir finden, nur den Werth von *Verhältnisszahlen*, bis jene Einheiten auf allgemein bekannte (*absolute Einheiten der Physik*) zurückgeführt sind. Diese allgemein bekannten Einheiten sind aber nicht etwa durch ihren Begriff zu definiren, sondern nur an bestimmten Naturkörpern (Gewichten, Maasstäben) oder bestimmten Naturvorgängen (Tag, Pendelschlag) aufzuweisen. Dass sie allgemeiner bekannt sind durch Ueberlieferung unter den Menschen, ändert das Geschäft und den Begiff des Messens nicht, und erscheint diesem gegenüber nur als eine Zufälligkeit.

Im Folgenden werden wir zu untersuchen haben, unter welchen Umständen wir Grössen durch benannte Zahlen ausdrücken, d. h. ihren Werth finden können, und was wir damit an thatsächlichem Wissen erreichen.

Dazu müssen wir aber vorher den Begriff der Gleichheit und der Grösse nach ihrer objectiven Bedeutung erörtern.

Physische Gleichheit.

Das besondere Verhältniss, welches zwischen den Attributen zweier Objecte bestehen kann und welches von uns durch den Namen „Gleichheit" bezeichnet wird, ist durch das schon oben angeführte *Axiom* I charakterisirt: *Wenn zwei Grössen einer dritten gleich sind, sind sie unter sich gleich.*

Darin liegt gleichzeitig, dass das Verhältniss der Gleichheit ein wechselseitiges ist. Denn aus

$$a = c$$
$$b = c$$

folgt ebenso gut $a = b$, wie $b = a$.

37 Gleichheit zwischen den vergleichbaren Attributen zweier Objecte ist ein ausnahmsweise eintretender Fall, und wird also in thatsächlicher Beobachtung nur dadurch angezeigt werden können, dass die zwei gleichen Objecte unter geeigneten Bedingungen zusammentreffend oder zusammenwirkend einen besonderen Erfolg beobachten lassen, der in der Regel zwischen anderen Paaren ähnlicher Objecte nicht eintritt.

Wir wollen das Verfahren, durch welches wir die beiden Objecte unter geeignete Bedingungen versetzen, um den genannten Erfolg beobachten und sein Eintreffen oder Nichteintreffen feststellen zu können, als die *Methode der Vergleichung* bezeichnen.

Wenn dieses Verfahren der Vergleichung sicheren Aufschluss geben soll über Gleichheit oder Verschiedenheit eines bestimmten Attributs der beiden Objecte, so wird der Erfolg desselben ausschliesslich und allein von der Bedingung abhängen müssen, dass beide Objecte das betreffende Attribut in dem bestimmten Maasse besitzen, immer vorausgesetzt, dass das Verfahren der Vergleichung regelrecht ausgeführt ist.

Aus dem oben angeführten Axiom folgt zunächst, dass *der Erfolg der Vergleichung ungeändert bleiben muss, wenn die beiden Objecte mit einander vertauscht werden.*

Ferner folgt, dass wenn die beiden Objecte a und b sich als gleich erweisen, und durch frühere Beobachtung mittels derselben Methode der Vergleichung gefunden ist, dass a auch gleich einem dritten Objecte c sei, nun auch die entsprechende Vergleichung von b und c beide als gleich ergeben muss.

Das sind Forderungen, die wir an die betreffende Methode der Vergleichung zu stellen haben. *Nur soche Verfahrungsweisen sind im Stande, Gleichheit zu erweisen, welche die genannten Forderungen erfüllen.*

Dass „gleiche Grössen für einander gesetzt werden können," folgt zunächst aus diesen Voraussetzungen für denjenigen Erfolg, auf dessen Beobachtung wir die Feststellung ihrer Gleichheit stützen.

Aber mit der Gleichheit in dem bisher besprochenen Falle 38
kann naturgesetzlich die Gleichheit auch anderweitiger Wirkungen oder Verhältnisse der betreffenden Objecte zusammenhängen, so dass auch in diesen letzteren Beziehungen die betreffenden Objecte für einander gesetzt werden künnen. Wir pflegen dies sprachlich dann so auszudrücken, dass wir die Fähigkeit der Objecte den bei der ersten Art der Vergleichung entscheidenden Erfolg hervorzubringen, als ein Attribut derselben objectiviren, den gleichbefundenen Objecten gleiche Grösse dieses Attributs zuschreiben, und die anderweitigen Wirkungen, in denen sich die Gleichheit bewährt, als Wirkungen jenes Attributs, oder als erfahrungsgemäss nur von jenem Attribut abhängend bezeichnen. Der Sinn einer solchen Behauptung ist immer nur der, dass Objecte, die sich bei derjenigen Art der Vergleichung als gleich erwiesen haben, die über die Gleichheit dieses besondern Attributs entscheidet, sich auch in den bezeichneten anderweitigen Fällen gegenseitig ohne Aenderung des Erfolges ersetzen können.

Grössen, über deren Gleichheit und Ungleichheit durch dieselbe Methode der Vergleichung zu entscheiden ist, bezeichnen wir als „gleichartig." Indem wir das Attribut, dessen Gleichheit oder Ungleichheit hierbei bestimmt wird, durch Abstraction loslösen von Allem, was sonst an den Objecten verschieden ist, bleibt für die entsprechenden Attribute verschiedener Objecte nur der Unterschied der Grösse übrig.[1])

Ich erlaube mir, den Sinn dieser abstracten Sätze an einigen bekannten Beispielen zu erläutern.

Gewichte. Wenn ich zwei beliebige Körper auf beide Schalen einer richtigen Wage lege, wird im Allgemeinen die

---

[1]) Hrn. H. Grassmann's Bestimmung der Gleichheit: „Gleich ist dasjenige, von dem man stets dasselbe aussagen kann, oder allgemeiner, was in jedem Urtheile sich gegenseitig substituirt werden kann," würde verlangen, dass in jedem einzelnen Falle, wo man auf Gleichheit schliesst, diese höchst allgemeine Forderung, die missverständlicher Deutung ausgesetzt ist, angelegt werde.

Wage nicht im Gleichgewichte sein, sondern eine Schale wird sinken.

Ausnahmsweise werde ich gewisse Paare von Körpern a
39 und b finden, welche, auf die Wage gelegt, deren Gleichgewicht nicht stören.

Wenn ich alsdann a mit b vertausche, muss die Wage im Gleichgewicht bleiben. Das ist die bekannte Probe darauf, ob die Wage richtig ist, d. h. ob das Gleichgewicht an dieser Wage Gleichheit der Gewichte anzeigt.

Endlich bestätigt sich, dass, wenn das Gewicht von a nicht blos dem Gewichte von b, sondern auch dem von c gleich ist, dann auch $b = c$ ist. Das Gleichgewicht der Gewichte an einer richtigen Wage begründet also in der That eine Methode, eine Art der Gleichheit zu bestimmen.

Die Körper, deren Gewicht wir vergleichen, können übrigens aus den verschiedensten Stoffen bestehen, von verschiedenster Form und Volumen sein. Das Gewicht, das wir gleichsetzen, ist nur ein durch Abstraction ausgeschiedenes Attribut derselben. Wenn wir die Körper selbst als Gewichte, und diese Gewichte als Grössen bezeichnen, so dürfen wir dies nur, wo wir von allen anderen Eigenschaften derselben absehen können. Das hat seinen praktischen Sinn, so oft wir Vorgänge beobachten oder herbeiführen, bei deren Verlauf nur dies eine Attribut der mitwirkenden Körper in Betracht kommt, d. h. bei denen Körper sich gegenseitig ersetzen können, die sich an der Wage im Gleichgewicht halten. Dies ist z. B. der Fall, wenn wir das Beharrungsvermögen der betreffenden Körper messen. Dass aber Körper von gleichem Gewicht auch gleiches Beharrungsvermögen haben und sich auch in letzterer Beziehung einander ersetzen können, folgt nicht aus dem Begriff der Gleichheit, sondern nur aus unserer Kenntniss dieses besonderen Naturgesetzes für diese besondere Beziehung.

Abstände zweier Punkte.

Das einfachste geometrische Gebilde, welches einer Grössenbestimmung fähig ist, ist der Abstand eines Paares von Punkten. Um aber dem Abstand wenigstens für die Zeit der messenden

Vergleichung einen bestimmten Werth zu geben, müssen die Punkte feste Verbindung haben, wie z. B. zwei Zirkelspitzen. Die bekannte Methode der Vergleichung des Abstandes zweier 40
Paare besteht darin, dass wir untersuchen, ob sie zu congruenter Deckung gebracht werden können oder nicht. Dass diese Methode Gleichheit festzustellen geeignet ist, dass die Congruenz in jeder Lage, bei Vertauschung der beiden Punktpaare in jeder beliebigen Weise immer wieder stattfindet, dass zwei Punktpaare, die einem dritten congruent sind, auch unter sich congruent sind, bestätigt die Erfahrung. So können wir den Begriff gleicher Abstände oder Entfernungen bilden.

Von da aus kann man zum Begriff der geraden Linie und deren Länge fortschreiten. Man denke sich zwei festliegende Punkte, durch die die Linie gehen soll. Eine gerade Linie ist eine solche, in der kein Punkt seine Lage ändern kann, ohne mindestens einen seiner Abstände von den festliegenden Punkten zu ändern. Eine krumme Linie dagegen können wir um zwei ihrer Punkte drehen, wobei sich wohl die Lage, aber nicht der Abstand der übrigen Punkte von jenen beiden ändert. Die Länge zweier begrenzter gerader Linien setzen wir gleich, wenn ihre Endpunkte gleichen Abstand haben, also congruent gelagert werden können, wobei auch die Linien congruent zusammenfallen. Der Begriff der Länge giebt insofern etwas mehr, als der Begriff des Abstandes. Wenn wir zwei Punktpaare von verschiedenem Abstand a, b und a, c in a zusammenfallend, und in gerader Linie gelagert denken, so dass ein Stück dieser Linie beiden gemeinsam ist, so fällt entweder b in die Linie ac, oder c in die Linie ab. Dies giebt einen Gegensatz, der dem des grösser und kleiner entspricht; während der Begriff des Abstandes unmittelbar nur den des gleich oder ungleich giebt.

Zeitmessung setzt voraus, dass physische Vorgänge gefunden seien, die, in unverändert gleicher Weise und unter gleichen Bedingungen sich wiederholend, wenn sie in demselben Moment begonnen haben, auch wieder gleichzeitig enden, wie z. B. Tage, Pendelschläge, Ablaufen von Sand- und Wasseruhren. Die Berechtigung für die Annahme der unveränderten Dauer bei der Wiederholung liegt hierbei nur in dem Umstande, dass alle verschiedenen Methoden der Zeitmessung, sorgfältig

41 ausgeführt, immer wieder übereinstimmende Resultate liefern. Wenn zwei solche Vorgänge a und b gleichzeitig beginnen und gleichzeitig enden, so gehen sie nicht nur in der gleichen, sondern in derselben Zeit vor sich. In Bezug auf die Zeit ist zwischen beiden kein Unterschied, und deshalb auch keine Vertauschung möglich. Und wenn ein dritter Vorgang c, mit a gleichzeitig beginnend, in derselben Zeit sich beendet, thut er es auch mit dem gleichzeitig vorgehenden b.

Wir vergleichen *Helligkeiten* zweier sichtbarer Felder, indem wir sie an einander rücken, so dass jede andere Abgrenzung zwischen ihnen wegfällt ausser dem Unterschiede der Helligkeit, und nachsehen, ob noch eine erkennbare Grenze zwischen ihnen bleibt.

Wir vergleichen *Tonhöhen*, wenn es sich um kleine Unterschiede handelt, durch das Phänomen der Schwebungen, welche fehlen müssen, wenn die Höhen gleich sind. Wir vergleichen die *Intensitäten elektrischer Ströme* am Differentialgalvanometer, welches sie in Ruhe lassen müssen, wenn sie gleich sind u. s. w.

Es müssen also für die Aufgabe, Gleichheit in verschiedenen Beziehungen zu constatiren, höchst verschiedene physische Mittel aufgesucht werden, die aber alle den oben gestellten Forderungen genügen müssen, wenn sie eine Gleichheit beweisen sollen.

Das erste Axiom: „Wenn zwei Grössen einer dritten gleich sind, sind sie unter sich gleich," ist also nicht ein Gesetz von objectiver Bedeutung, sondern es bestimmt nur, welche physische Beziehungen wir als Gleichheit anerkennen dürfen.

Um Beispiele zu citiren, wo der Satz von der Gleichheit des Dritten geradezu einer mechanischen Ausführung zu Grunde liegt, erinnere ich an das Schleifen ebener Glasflächen. Wenn zwei solche unter fortdauernder Rotation der einen gegen einander abgeschliffen werden, können beide kugelig werden, die eine concav und die andere convex. Wenn drei abwechselnd gegen einander abgeschliffen werden, müssen sie schliesslich eben werden. Ebenso macht man die Kanten genauer metallener Lineale gerade, indem man je drei gegen einander abschleift.

Ueber additive physische Verknüpfung[1]) gleichartiger Grössen. 42

Die Vergleichung von Grössen, so weit wir sie bisher behandelt, giebt Aufschluss über die Frage, ob sie gleich oder ungleich sind, aber noch kein Maass für die Grösse ihres Unterschiedes, falls sie verschieden sein sollten. Sollen aber die betreffenden Grössen durch benannte Zahlen vollständig bestimmt werden können, so muss die grössere der beiden Zahlen als Summe der kleineren und ihres Unterschiedes darstellbar sein. Zu untersuchen ist also, unter welchen Bedingungen wir eine physische Verknüpfung gleichartiger Grössen als Addition ausdrücken dürfen.

Die Verknüpfungsweise, um die es sich hierbei handelt, wird im Allgemeinen von der Art der Grössen, die verknüpft werden sollen, abhängen. Wir addiren z. B. Gewichte, indem wir sie einfach in dieselbe Wagschale legen. Wir addiren Zeitperioden, indem wir die zweite genau in dem Augenblick beginnen lassen, wo die erste aufhört; wir addiren Längen, indem wir sie in bestimmter Weise, nämlich in gerader Linie, an einander setzen u. s. w.

1. Gleichartigkeit der Summe und der Summanden. Da die besprochene Verknüpfung Grössen einer bestimmten Art betreffen soll, so wird ihr Resultat nicht geändert werden dürfen, wenn ich eine oder mehrere der Grössen mit gleich grossen gleichartigen Grössen vertausche. Denn diese werden dann nur durch dieselbe Zahl mit derselben Benennung ersetzt, die sie schon selbst hatten. Aber auch das Ergebniss der Verknüpfung muss, wenn es die Summe der verknüpften Grössen darstellen soll, gleichartig den Theilen sein, da die Summe zweier benannten Zahlen wieder eine Zahl derselben Benennung ist, wie schon oben bemerkt. Also über das Gleichbleiben des Ergebnisses der Verknüpfung bei Vertauschung der
Theile muss durch dieselbe Methode der Vergleichung 43
entschieden werden, mit der wir die Gleichheit der zu vertauschenden Theile festgestellt haben. Das ist der

---

[1]) „Verknüpfung" ist ein Grassmann'scher Terminus, dort freilich überwiegend subjectiv gewendet, hier nuobjectiv.

thatsächliche Sinn der Forderung, dass die Summe gleichartiger Grössen den Summanden gleichartig sein muss.

So kann ich z. B. in einer Summe von Gewichten die einzelnen Stücke durch solche von anderem Material, aber gleichem Gewicht ersetzen. Die Summe behält dann gleiches Gewicht; ihre übrigen physikalischen Attribute aber können sich ändern.

2. Commutationsgesetz. Das Resultat der Addition ist unabhängig von der Reihenfolge, in der die Summanden verknüpft werden. Dasselbe muss gelten von physischen Verknüpfungen, die als Additionen zu betrachten sein sollen.

3. Associationsgesetz. Die Verbindung zweier gleichartiger Grössen kann auch physisch geschehen, indem statt beider eine ungetheilte Grösse derselben Art eingesetzt wird, die ihrer Summe gleich ist. Dadurch sind jene beiden dann vor allen andern additiv vereinigt.

So kann z. B. beim Wägen ein Fünfgrammstück statt fünf einzelner Grammstücke gesetzt werden.

Das Ergebniss der Verknüpfung also darf dadurch nicht geändert werden, dass ich statt einiger der zu verknüpfenden Grössen andere einführe, die der Summe derselben gleich sind.

Uebrigens lässt sich zeigen, dass, wenn die beiden ersten Forderungen allgemein erfüllt sind, auch die dritte erfüllt ist.

Man denke sich die Elemente in der Reihenfolge hinter einander geordnet, wie sie in einem ersten Falle mit einander verknüpft werden sollen, so dass jedes einzelne dem Ergebniss der Verknüpfung der ihm vorausgehenden angefügt wird, in derselben Weise, wie wir es oben für die Addition von [a + b + c + etc.] vorgeschrieben haben. Wenn nun in einem zweiten Falle verlangt wird, irgend welche von diesen Grössen vor den andern zu verknüpfen, so können wir diese nach dem Commutationsgesetz, welches der Voraussetzung nach gelten soll, in erste und zweite Stelle setzen, wo sie dann vor den andern zu verknüpfen sind, ohne dass wir das Resultat ändern. Alsdann
44 können wir nach der ersten unserer obigen Bedingungen das Ergebniss dieser Verknüpfung auch ersetzen durch ein anderes ungetheiltes Object, welches als Grösse gleicher Art betrachtet, gleich gross ist.

Nachdem dies geschehen, können wir wiederum die beiden nächst zu verknüpfenden Grössen oder Summen von Grössen an die beiden ersten Stellen bringen u. s. f., bis alle in vorgeschriebener Reihenfolge verknüpft sind. Bei keiner dieser Operationen ändern wir die Grösse des endlichen Ergebnisses der Verknüpfungen.

Eine physische Verknüpfungsweise von Grössen gleicher Art kann also als Addition angesehen werden, wenn das Ergebniss der Verknüpfung, als Grösse derselben Art verglichen, nicht geändert wird, weder durch Vertauschung der einzelnen Elemente unter sich, noch durch Vertauschung von Gliedern der Verknüpfung mit gleichen Grössen gleicher Art.

Wenn wir in eben beschriebener Weise die Verknüpfungsmethode der betreffenden Grössen gefunden haben, so ergiebt sich nun auch, welche grösser, welche kleiner sind. Das Product der additiven Verknüpfung, das Ganze, ist grösser als die Theile, aus denen es hergestellt ist. Bei den einfachsten Grössen, mit denen wir von frühester Jugend her zu thun hatten, wie Zeiten, Längen, Gewichten, haben wir nie gezweifelt, was grösser und was kleiner sei, weil wir eben von jeher additive Verknüpfungsmethoden derselben kannten. Hier ist aber zu überlegen, dass die Methode der Vergleichung, wie wir sie oben beschrieben haben, uns im Allgemeinen nur belehrt, ob die Grössen gleich oder ungleich seien. Wenn zwei Grössen x einander gleich sind, sind auch alle in gleicher Weise durch Rechnung gebildete Functionen derselben gleich. Von diesen werden einige bei steigendem x zunehmen, andere abnehmen. Welche von diesen Functionen eine additive physische Verknüpfung zulassen, ist erst durch besondere Erfahrung zu entscheiden. Lehrreich sind dann solche Fälle, wo zweierlei Arten der additiven Verknüpfung möglich sind. So bestimmen wir genau durch dieselbe Methode 45
der Vergleichung, ob zwei Drähte gleichen galvanischen Widerstand w, beziehlich gleiches Leitungsvermögen λ haben, denn es ist

$$\mathrm{w} = \frac{1}{\lambda}.$$

Widerstände addiren wir, wenn wir die Drähte hinter einander verbinden, so dass die durchgeleitete Elektricität nach einander jeden einzelnen durchströmen muss. Das Leitungsvermögen der Drähte addiren wir, wenn wir die Drähte neben einander legen, und alle ihre Anfänge unter einander, alle ihre Enden auch unter einander verbinden. So objectiviren wir hier als physikalische Grössen zwei verschiedene Functionen derselben Variablen. Hat ein Draht grösseren Widerstand, so hat er geringeres Leitungsvermögen und umgekehrt. Die Frage, was grösser, was kleiner sei, wird also bei beiden in entgegengesetztem Sinne beantwortet. Ebenso lassen sich elektrische Condensatoren (Leydener Flaschen) neben einander und hinter einander verbinden. Im ersteren Falle addiren sie die Capacität, im letzteren Falle die Spannung (Potential) für gleiche Ladung. Erstere wächst, wenn letztere abnimmt.

Wiederum dürfen wir uns nicht wundern, wenn die Axiome der Addition sich im Naturlaufe bewahrheiten, da wir als Addition nur solche physische Verknüpfungen anerkennen, die den Axiomen der Addition genügen.

Theilbarkeit der Grössen und Einheiten.

Bisher haben wir die Grössen noch nicht in Einheiten zu zerlegen gebraucht. Der Begriff der Grösse, sowie ihrer Gleichheit und ihrer Addition, konnte ohne eine solche Zerlegung gewonnen werden. Die höchste Vereinfachung der Darstellung der Grössen erhalten wir aber in der That erst, wenn wir sie in Einheiten auflösen und als benannte Zahlen ausdrücken.

Grössen, welche addirt werden können, sind im Allgemeinen auch zu theilen. Kann eine jede der vorkommenden Grössen als additiv nach dem für Grössen dieser Art gültigen Additionsverfahren aus einer Anzahl gleicher Theile zusammengesetzt an-
46 gesehen werden, so kann jede von ihnen nach dem Associationsgesetz der Addition überall, wo nur der Werth dieser Grösse entscheidet, durch die Summe ihrer Theile vertreten werden. So wird sie dann durch eine benannte Zahl ersetzt, andre Grössen der gleichen Art durch andere Anzahlen derselben Theile. Die Beschreibung der einzelnen Grössen gleicher Art kann dann

einem Zuhörer, der die als Einheit gewählten gleichen Theile kennt, durch blosse Angabe der Zahlen überliefert werden.

Sind die vorkommenden Grössen nicht ohne Rest durch die gewählten Einheiten auszudrücken, so theilt man die Einheiten wieder in bekannter Weise und kann auf diese Art eine Werthbestimmung jeder der vorkommenden Grössen bis zu beliebiger Genauigkeit geben. Vollkommene Genauigkeit ist allerdings nur für rationale Verhältnisse zu erreichen.

Irrationale Verhältnisse können an den reellen Objecten vorkommen; in Zahlen aber können sie nie vollständig genau dargestellt, sondern ihr Werth nur zwischen beliebig zu verengernde Grenzen eingeschlossen werden. Diese Einengung zwischen Grenzen genügt für alle Berechnungen solcher Functionen, deren Werthe bei immer kleiner werdenden Aenderungen der Grössen, von denen sie abhängen, ebenfalls immer kleinere Aenderungen erleiden, welche schliesslich unter jeden angebbaren endlichen Betrag fallen können. Namentlich gilt dies fur die Berechnung aller differentiirbaren Functionen der irrationalen Grössen. Dagegen lassen sich allerdings auch discontinuirliche Functionen bilden, zu deren Berechnung die Kenntniss der noch so eng gezogenen Grenzen, zwischen denen der irrationale Werth liegt, nicht genügt. Diesen gegenüber bleibt die Darstellung irrationaler Grössen durch unser Zahlensystem immer ungenügend. In der Geometrie und Physik aber sind wir solchen Arten der Discontinuität noch nicht begegnet.

Werthbestimmungen von Eigenschaften. (Physikalische Constanten, Coëfficienten.) Ausser den bisher besprochenen Grössen, welche direct als solche zu erkennen sind, weil sie additive Verbindung zulassen, giebt es aber noch eine Reihe von anderen, auch durch benannte oder unbenannte 47
Zahlen ausdrückbaren Verhältnissen, für welche noch keine additive Verbindung mit gleichartigen bekannt ist. Sie werden gefunden, so oft sich ein naturgesetzlicher Zusammenhang zwischen additiven Grössen bei Vorgängen zeigt, die durch die Besonderheiten irgend einer bestimmten Substanz, oder eines bestimmten Körpers, oder die vorausgegangene Art der Einleitung des betreffenden Vorgangs beeinflusst werden.

So z. B. zeigt das Brechungsgesetz des Lichtes an, dass

zwischen dem Sinus des Einfalls- und Brechungswinkels eines Lichtstrahls bestimmter Wellenlänge, der aus dem Leeren in eine gegebene durchsichtige Substanz eintritt, ein bestimmtes Verhältniss bestehe. Die Zahl, welche dieses Verhältniss ausdrückt, ist aber verschieden für verschiedene durchsichtige Stoffe, bezeichnet also eine Eigenschaft derselben, ihr Brechungsvermögen. Aehnliche Grössen sind das specifische Gewicht, Wärmeleitungsvermögen, elektrische Leitungsvermögen, Wärmecapacität u. s. w. Daran schliessen sich diejenigen Werthe (Integrationsconstanten der Dynamik), die während des ungestörten Ablaufs einer einmal eingeleiteten Bewegung eines begrenzten Körpersystems unverändert bleiben.

Es ist der Physik nach und nach gelungen, alle diese Werthe auf Einheiten zurückzuführen, die aus den drei fundamentalen Maasseinheiten der Zeit, der Länge und der Masse durch Multiplication, Potenzirung und ihre inversen Operationen zusammenzusetzen sind.

Der Unterschied zwischen diesen Werthen und den additiven Grössen wird in der Sprache der Physiker und Mathematiker nicht streng festgehalten. Auch die ersteren werden oft Grössen genannt, da sie durch benannte Zahlen auszudrücken sind; der Terminus *Coëfficient* bezeichnet ihre physikalische Natur verhältnissmässig besser. Der Unterschied ist aber nicht wesentlich; denn gelegentlich können neue Entdeckungen auf additive Verbindungen solcher Coëfficienten führen, wodurch sie in die Reihe der direct bestimmbaren Grössen einrücken würden. Einigermaassen entspricht der genannte Unterschied wohl dem,
48 den ältere Metaphysiker in dem Gegensatz der *extensiven* und *intensiven Grössen* anzuzeigen wünschten. Hr. P. *du Bois-Reymond* nennt die ersteren *lineäre Grössen*, die letzteren *nicht lineäre*.

Andererseits geht aber aus der gegebenen Ableitung hervor, dass man erst additive Grössen gebildet haben muss, ehe man Coëfficienten bestimmen kann. Denn die Gleichung, welche ein Naturgesetz ausdrückt, kann die Werthbestimmung eines Coëfficienten nur geben, wenn alle andern darin vorkommenden Grössen schon als Grössen bestimmt sind. Die Bestimmung von additiven Grössen muss also stets vorangehen, ehe man die Werthe nicht additiver finden kann.

Addition ungleichartiger Grössen.

Eine grosse Rolle in der Physik spielen solche Objecte, die bei verschiedenen Methoden der Vergleichung gleichzeitig zwei oder drei, auch mehrere verschiedenartige Grössen darstellen, welche alle bei derselben Art physischer Verknüpfung der Objecte addirt werden. Dahin gehört zunächst die sehr grosse Zahl der im Raume gerichteten Grössen, die in der Physik vorkommen, d. h. Grössen, die einen bestimmten Werth und zugleich eine bestimmte Richtung anzeigen, die man aber aus mehreren Componenten von fester Richtung (zwei in der Ebene, drei im Raume) zusammengesetzt sich vorstellen kann. Am einfachsten wird im Allgemeinen die Uebersicht der Verhältnisse, wenn man die Componenten, die in derselben Weise zur Resultante zu verknüpfen sind, wie das im Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte vorgeschrieben ist, drei rechtwinkeligen Coordinataxen parallel wählt. In diese Klasse gehören Verschiebungen eines Punktes im Raume, seine Geschwindigkeit, Beschleunigung, dieser entsprechend die ihn bewegende Kraft, ferner Rotationsgeschwindigkeiten und verschwindend kleine Drehungen, Strömungsgeschwindigkeiten von schweren Flüssigkeiten, Elektricität und Wärme, magnetische Momente u. s. w.

Bei additiven Verbindungen summiren sich die gleich gerichteten Componenten; diese Summen können wieder in eine Resultante zusammengefasst werden. Alle physischen Verknüpfungen solcher Grössen, bei denen der Erfolg nur von der 49
Grösse und Richtung der endlichen Resultante abhängt, können als beruhend auf solchen additiven Verknüpfungen angesehen werden, wie dies für zwei Dimensionen Gauss in der geometrischen Deutung der imaginären Grössen, für mehrere H. Grassmann als Addition geometrischer Strecken, und R. Hamilton in der Lehre von den Quaternionen durchgeführt hat. Dabei muss wieder das Commutationsgesetz erfüllt sein; so können wir unendlich kleine Drehungen eines festen Körpers um zwei verschiedene Axen in eine resultirende Drehung zusammensetzen, ebenso Rotationsgeschwindigkeiten, aber nicht endliche Drehungen, weil bei solchen es nicht mehr gleichgültig ist, ob man erst um die Axe a und dann um die Axe b dreht, oder umgekehrt.

Aber auch in der Mischung farbigen Lichtes kommt ein

ähnliches Verhältniss vor. Jede Quantität farbigen Lichtes kann in Beziehung auf ihren sinnlichen Eindruck dargestellt werden als die Vereinigung dreier Lichtquanta von passend gewählten Grundfarben. Mischung mehrerer Farben wirkt dann auf das Auge, wie drei Lichtquanta der drei Grundfarben vereinigt wirken würden, welche man für jede einzelne Grundfarbe erhält, wenn man die entsprechenden Quanta, die in sämmtlichen vereinigten Einzelfarben vorkommen, addirt. Hierauf beruht die Möglichkeit der geometrischen Darstellung der Gesetze der Farbenmischung durch Schwerpunktsconstructionen, wie sie Newton zuerst vorgeschlagen hat.

Multiplication benannter Zahlen.

Eine benannte Zahl $(a \cdot x)$, worin x die Art der Einheiten bezeichnen soll, a deren Anzahl, kann man mit einer reinen Zahl n multipliciren. Dies fällt einfach unter die oben angeführte Definition des Productes als der Summe von n gleichen Summanden a. Da die Summe gleichartiger Summanden eine ihnen gleichartige Grösse ist, so ist auch das Product $(n \cdot a)$ eine Grösse von derselben Benennung, wie a. Das Commutationsgesetz passt auf dieses Product, insofern

$$n \,.\, (a \,.\, x) = a. \,(n \,.\, x),$$

50 d. h. man kann auch a als reine Zahl betrachten, und neue benannte Summanden $(n \,.\, x)$ bilden.

Ebenso ist das Gesetz der Multiplication einer Summe unmittelbar gegeben:

$$(m + n) \,.\, (a \,.\, x) = m \,.\, (a \,.\, x) + n\,(a \,.\, x)$$
$$n \,.\, (a \,.\, x + b \,.\, x) = n \,.\, (a \,.\, x) + n\,(b \,.\, x).$$

Die Multiplication benannter Zahlen mit reinen Zahlen bleibt also ganz in dem Rahmen der Definitionen und Sätze, die oben für die Multiplication reiner Zahlen unter sich abgeleitet sind.

Anders ist es mit der Multiplication zweier oder mehrerer benannter Zahlen. Diese hat nur in bestimmten Fällen einen Sinn, wenn besondere physische Verknüpfungen unter den be-

treffenden Einheiten möglich sind, die den drei Gesetzen der Multiplication unterworfen sind:

$$a \,.\, b = b \,.\, a$$
$$a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c$$
$$a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$$

Das bekannteste Beispiel solcher multiplicativer Verbindungen aus der Geometrie ist der Werth des Inhalts von Parallelogrammen und Parallelepipeden, ausgedrückt durch das Product zweier oder dreier Längen, nämlich einer Seite und einer oder zweier Höhen. Die Physik bildet aber eine grosse Anzahl solcher Producte verschiedener Einheiten, und dem entsprechend auch Beispiele von Quotienten, Potenzen und Wurzeln derselben. Bezeichnen wir eine Länge mit l, eine Zeit mit t, eine Masse mit m, so ist die Benennung

einer Fläche	l^2
eines Volumens	l^3
einer Geschwindigkeit	$\frac{l}{t}$
einer Bewegungskraft	$\frac{m \,.\, l}{t^2}$
einer Arbeit	$\frac{m \,.\, l^2}{t^2}$
des Drucks auf eine Fläche	$\frac{m}{l \,.\, t^2}$ 51
der Spannung in einer Fläche	$\frac{m}{t^2}$
einer Dichtigkeit	$\frac{m}{l^3}$
eines magnetischen Quantum	$\frac{l}{t} \sqrt{m \,.\, l}$
einer magnetischen Kraft	$\frac{l}{t} \sqrt{\frac{m}{l}}$

u. s. w.

Die meisten dieser Verbindungen beruhen auf der Bestimmung von Coëfficienten; aber viele dieser Grössen können doch auch additive physische Verknüpfungen liefern, wie Geschwindigkeiten, Strömungen, Kräfte, Drucke, Dichtigkeiten u. s. w.

Alle diese multiplicativ definirten Einheiten sind aber ungleichartig denen, aus denen sie erzeugt sind, und bekommen einen Sinn nur durch die Kenntniss besonderer geometrischer oder physikalischer Gesetze.

Zu erwähnen ist hier die besondere Abart der Multiplication, welche H. Grassmann in seiner Ausdehnungslehre für gerichtete Grössen aufgestellt hat, und die auch in der Theorie der Quaternions zu Grunde gelegt ist. Diese stellt ein anderes Commutationsgesetz auf, nämlich

$$a \,.\, b = - b \,.\, a$$

und giebt in der That eine grosse Vereinfachung in der Bezeichnung, wenn auch nicht in der Berechnung der Werthe, welche durch Zusammenwirken verschieden gerichteter Grössen erzeugt werden.

Das Product zweier Strecken ist in dieser Rechnungsart der Inhalt des Parallelogramms, was beide als Seiten hat; aber die parallelogrammatische Fläche wird auf der einen Seite als positiv, auf der andern als negativ angesehen. Die eine Seite der Fläche ansehend, muss ich, um von der Seite a durch den Winkel zur Seite b überzugehen, den Winkel rechtsdrehend durchlaufen; die andere Seite ansehend, komme ich umgekehrt
52 linksdrehend von b nach a. Darauf beruht der Unterschied in der Folge (b . a) und (a . b).

Es genügt, hier diese Rechnungsformen erwähnt zu haben und ihre Stellung zu den Rechnungsformen der reinen Zahlenlehre bezeichnet zu haben, da die Aufgabe der vorliegenden Arbeit nur erfordert, die Bedeutung und Berechtigung der Rechnung mit reinen Zahlen und die Möglichkeit von deren Anwendung auf physische Grössen zu zeigen.

Dass wir irgend ein physisches Verhältniss als Grösse hinstellen, kann also immer nur auf empirischer Kenntniss gewisser Seiten seines physischen Verhaltens beim Zusammentreffen und Zusammenwirken mit andern beruhen. Ich fasse dabei die Congruenz zweier Raumgrössen, die an Körpern vorkommen, oder durch Körper abgegrenzt sind, im Sinne meiner früheren Arbeiten über die Axiome der Geometrie ebenfalls als ein physisches Verhältniss, welches empirisch zu constatiren ist. Wir

müssen erstens die Methode der Vergleichung der betreffenden Grössen, wodurch ihre Art charakterisirt ist, und zweitens entweder die Methoden der additiven Verknüpfung oder die Naturgesetze kennen, in denen sie als Coëfficienten vorkommen, um sie durch benannte Zahlen ausdrücken zu können.

Die grosse Vereinfachung und Uebersichtlichkeit der Auffassung, die wir durch Rückführung der bunten Mannigfaltigkeit der uns vorliegenden Dinge und Veränderungen auf quantitative Verhältnisse erreichen, ist tief im Wesen unserer Begriffsbildung begründet. Wenn wir den Begriff einer Classe bilden, fassen wir in ihm alles zusammen, was bei den Objecten, die in die Classe gehören, gleich ist. Wenn wir ein physisches Verhältniss als benannte Zahl auffassen, haben wir aus dem Begriff ihrer Einheiten auch alles entfernt, was ihnen als verschieden in der Wirklichkeit anhaftet. Sie sind Objecte, die wir nur noch als Exemplare ihrer Classe betrachten, und deren Wirksamkeit nach der untersuchten Richtung hin auch nur davon abhängt, dass sie solche Exemplare sind. In den aus ihnen gebildeten Grössen bleibt dann nur der zufälligste der Unterschiede, der der Anzahl stehen.

CXXX.

Die Störung der Wahrnehmung kleinster Helligkeitsunterschiede durch das Eigenlicht der Netzhaut.

Aus der Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane.
Bd. 1, S. 5 bis 17. 1890.

Es ist seit lange bekannt, dass Fechner's Gesetz, wonach die kleinsten unterscheidbaren Helligkeitsunterschiede der ganzen Helligkeit proportional sein sollen, allerdings in einer sehr weiten Ausdehnung für die mittleren Abstufungen der Helligkeit gilt, aber die Empfindlichkeit des Auges sowohl für höchste Lichtintensitäten, wie auch für niedrigste sich geringer erweist, als sie nach dem genannten Gesetze sein sollte. Wenn sehr starkes Licht in das Auge fällt, wissen wir, dass dabei objectiv erkennbare und langsam schwindende Veränderungen in der Netzhaut entstehen, die für einige Zeit die Empfindungsstärke der getroffenen Netzhautstelle herabsetzen, und dürfen wohl darin den Grund für die gleichzeitige Herabsetzung der Unterschiedsempfindlichkeit für Helligkeiten suchen. Für die niedrigsten Helligkeiten hat schon Fechner selbst die Vermuthung ausgesprochen, dass die Störung des Gesetzes durch die subjective Lichtempfindung der Netzhaut, das sogenannte Eigenlicht derselben, bedingt sei, und Volkmann hat darauf eine Methode gegründet, durch die er die Stärke des Eigenlichts messen wollte. Er hat dabei aber einen auffallend niedrigen Werth gefunden, nämlich den der Helligkeit einer Fläche von schwarzem Sammt, die aus neun Fuss Entfernung durch eine Stearinkerze beleuchtet ist. Dass dieser Werth viel

zu gering sei, ergab sich schon aus der Thatsache, dass auch im dunkelsten Felde ein langsam eintretender, im Sehnerven abwärts fliessender elektrischer Strom immer noch eine recht merkliche, gleichmässige Verdunkelung hervorbringt, sowie auch 6
daraus, dass die Flecken des Eigenlichts auf schwach beleuchteten Objecten, die man noch deutlich erkennen kann, und die viel heller sind als jene schwarze Sammtfläche, ganz deutlich hervortreten.

Neuerdings haben auch die sehr sorgfältig und zweckmässig durchgeführten Versuche der Hrn. A. König und E. Brodhun[1]) über die Unterschiedsempfindlichkeit für die Helligkeit von Spectralfarben sowie für das unzerlegte Licht eines weiss glühenden Zirkonplättchens gezeigt, dass auch der Gang der Curve der Empfindlichkeit deutlich und sicher abweicht von dem, der aus Fechner's und Volkmann's Hypothese sich ergiebt, wenn man unter der Voraussetzung einer gleichmässigen Stärke des Eigenlichts rechnet. Nun ist aber in Wahrheit das Eigenlicht nicht gleichmässig über den Grund der Netzhaut verbreitet, sondern wir sehen es stets unregelmässig fleckig; die Flecken sind theils gross, theils ganz feinkörnig und einem fortdauernden Wechsel ihrer Gestalt unterworfen. Ja, was man von dieser inneren Erregung der Netzhaut unter gewöhnlichen Umständen bei schwacher äusserer Beleuchtung überhaupt wahrnimmt, sind wohl nur die localen Unterschiede der Helligkeit in den Flecken, während man nur ausnahmsweise Gelegenheit hat, die mittlere Helligkeit des Grundes durch Vergleichung mit noch dunkleren Feldern abzuschätzen. Die einzigen Mittel solcher Art sind negative Nachbilder, deren Deutung aber bestritten wird, und die schon erwähnte Anwendung des absteigenden elektrischen Stromes.

Dass die Fleckigkeit des Eigenlichts wirklich das Haupthinderniss für die Wahrnehmung sehr schwach beleuchteter, namentlich kleinerer Objecte bildet, indem dieselben zwischen den Flecken des Eigenlichts verschwinden und mit solchen verwechselt werden, ist bei vielen Gelegenheiten zu erkennen,

---

1) A. König und E. Brodhun: Sitzungsber. der Akad. zu Berlin vom 26. Juli 1888 und 27. Juni 1889.

und ich möchte hier einige Erscheinungen beschreiben, die mich lange Zeit geneckt haben, bis ich ihre richtige Erklärung fand.

Mein Schlafzimmer ist durch dichte Vorhänge ziemlich stark verdunkelt, doch nicht so sehr, dass ich nicht um die Zeit des Sonnenaufgangs anfangen sollte, die Umrisse der Fenster
7 hinter den Vorhängen und die grösseren Gegenstände im Zimmer zu unterscheiden. In der Nacht dagegen, selbst wenn draussen der Sternhimmel hell ist, oder der Mond an der abgewendeten Seite des Hauses am Himmel steht, sehe ich durchaus nichts von den Umrissen der Fenster, die hierbei doch diejenige Fläche bilden, von welcher alles Licht herkommen müsste, wenn wahrnehmbares Licht im Zimmer wäre. Natürlich sehe ich auch nichts von den Gegenständen im Zimmer, sondern nur die Flecken meines Eigenlichts. Nun habe ich aber nach einiger Zeit bemerkt, dass ich, wenn ich die Arme bewegte, die Bewegung der sie bedeckenden weissen Hemdärmel sehen konnte. Da nach photometrischen Gesetzen jede beleuchtete Fläche weniger hell sein muss, als der hellste Theil der beleuchtenden Fläche, so schien es mir unmöglich, dass ich die von den Fenstervorhängen, welche selbst unsichtbar blieben, her beleuchteten Hemdärmel mittels von aussen kommenden Lichts sollte sehen können, und ich suchte nach anderen Erklärungen.

Ich dachte zuerst an Licht von Reibungselektricität. Aber alle Versuche durch absichtliche Reibung der Leinwand mit der Hand oder allerlei andern Körpern, die ich in der Nähe hatte, elektrisches Leuchten zu erzeugen, schlugen fehl.

Daneben war an Phosphorescenz zu denken, da die Leinwand möglicherweise Spuren von phosphorescirenden Kalksalzen enthalten konnte, und überhaupt schwache Spuren von Fluorescenz, die doch nur eine schnell vorübergehende Phosphorescenz ist, fast an allen organischen Stoffen vorkommen, wie ich aus früheren Versuchen über die Sichtbarkeit des Ultraviolett wusste. Das Aussehen der Erscheinung erinnerte in der That sehr an Phosphorescenz.

Andererseits waren auch die älteren Berichte von mehreren zuverlässigen Beobachtern zu bedenken, welche lebhaft vor-

gestellte Objecte im Gesichtsfelde gesehen zu haben versichern. Unmöglich wäre es ja nicht, dass der Vorstellungsprocess die inneren Enden unserer Sinnesnerven in Erregung setzte. Eine sehr unzweckmässige und bedenkliche Eigenthümlichkeit unserer Hirnthätigkeit wäre dies allerdings, wie die vielen pathologischen Fälle zeigen, wo dergleichen vorzukommen scheint.

Ich suchte zwischen beiden Annahmen zu entscheiden, indem ich die Augen schloss, und wieder meine Arme bewegte. Wenn die Vorstellung der Bewegung das dazu gehörige Gesichtsbild hervorrufen konnte, musste dies auch bei geschlossenen 8
Augen geschehen können. Und ich glaubte in der That zuweilen die bewegten Arme auch durch die geschlossenen Lider hindurch zu sehen, aber sie erschienen viel undeutlicher, und der Versuch misslang sehr oft, während ich sie bei geöffneten Lidern unzweifelhaft bemerkte.

Wie ich hier betreffs dieser Frage über Wirkung der Vorstellung gleich bemerken will, fand ich schliesslich, dass unter absichtlich fester Fixirung der Gesichtslinie die Erscheinung bei geschlossenen Augen nie eintrat, und mir ist es also höchst wahrscheinlich geblieben, dass, wenn zufällig um die Zeit ein heller Fleck des Eigenlichts in der Mitte der Netzhaut lag, ich bei dem Versuch die Arme zu sehen, mit dem Auge dem vorgestellten Orte derselben folgte, und indem mein heller Fleck mit den Augen wanderte, er mir den Eindruck eines reellen bewegten Objectes machte, wie ich es in solcher Weise bewegt zu sehen erwartete.

Ich muss allerdings gestehen, dass, wenn man gleichzeitig darauf zu achten hat, dass die Lider geschlossen und die Fixationsrichtung festgehalten wird, die Vorstellung des bewegten Armes nicht so ungestört und lebhaft ausfällt, als wenn man sich ihr ganz hingiebt. Das könnte allerdings einen Zweifel auf die von mir vorgetragene Erklärung der Erscheinungen bei geschlossenen Augen werfen.

Endlich aber fand ich, dass ich mit meinen Erklärungsversuchen grosse Umwege gemacht hatte. Denn als ich nun die Hand in Richtung der Fenster ausstreckte und dort hin und her bewegte, erkannte ich die Hand und selbst die Finger als dunkle Schatten viel deutlicher, als nach der dunklen Seite

des Zimmers gewendet den Arm. Ich überzeugte mich also, dass eine grosse, schwaches Licht aussendende ruhende Fläche vollkommen unter dem Eigenlicht der Netzhaut verschwinden kann, während sie doch genug Licht aussendet, um von ihr beleuchtete bewegte Objecte erkennbar zu machen. Dass man die verhältnissmässig schnell eintretenden Wechsel der Beleuchtung, welche Körper von bekannter Form und bekannter Art der Bewegung in dem formlosen Lichtchaos des dunklen Feldes hervorbringen, leichter als Bild eines Objects interpretirt als ruhende helle Flächen, erklärt sich ohne Schwierigkeit. In der That haben wir es hierbei mit verhältnissmässig schnell
9 eintretenden, durch einen bewussten Willensact veranlassten Erscheinungen zu thun, die dadurch deutlich von dem verhältnissmässig langsam und ohne bewusst gewordene Veranlassung eintretenden Wogen und Wallen des inneren Lichtes unterschieden sind.

Um zu zeigen, dass in der That die Fleckigkeit des Eigenlichts einen ähnlichen Gang der Unterschiedsempfindlichkeit hervorzubringen geeignet ist, wie er in den Beobachtungen der Hrn. König und Brodhun sich zeigt, habe ich die folgende Rechnung angestellt, welche bei dem Mangel ausreichender empirischer Daten nur eben den Gang der Function erläutern soll.

Versuch einer Theorie des Einflusses der fleckigen Vertheilung des Eigenlichts der Netzhaut auf die Grösse der Unterschiedsschwellen.

Es sei a die objective Lichtstärke, welche nöthig wäre, um dieselbe Stärke der Erregung in einer Stelle der Netzhaut hervorzubringen, wie sie im Eigenlicht derselben sich zu erkennen giebt. Da das letztere fleckig erscheint, wird a auf verschiedenen Stellen der Netzhaut verschiedene Werthe haben müssen. Der Flächenraum derjenigen Stellen dieser Membran, deren Eigenlicht dem Intervall a bis $(a + da)$ entspricht, sei $\varphi \, . \, da$, worin φ im allgemeinen eine Function von a sein wird.

Die Empfindungsstärke dE für den Helligkeitsunterschied dr bei der objectiven Lichtstärke r betrachten wir als Summe

aller Einzelwirkungen, die den einzelnen Helligkeitsstufen da entsprechen und setzen nach Fechner's Gesetz

$$dE = dr \cdot \int_0^a \frac{\varphi \cdot da}{a + r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Um diese Integration auszuführen, müssen wir für einige Integrale neue Bezeichnungen einführen.[1] Es sei a der höchste vorkommende Werth von a. Wir setzen

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= \int_0^a \varphi \cdot da \\
A_0 \cdot J_0 &= \int_0^a \varphi \cdot a \cdot da \\
A_2 &= \int_0^a \varphi \cdot (J_0 - a)^2 \cdot da \\
A_2 \cdot J_2 &= \int_0^a \varphi \cdot (J_0 - a)^2 \cdot a \cdot da \\
A_4 &= \int_0^a \varphi \cdot (J_0 - a)^2 (J_2 - a)^2 \cdot da \\
A_4 \cdot J_4 &= \int_0^a \varphi \cdot (J_0 - a)^2 (J_4 - a)^2 \cdot a \cdot da
\end{aligned}\right\} \quad (2).$$

u. s. w., oder allgemein

$$A_n = \int_0^a \varphi \cdot (J_0 - a)^2 (J_2 - a)^2 \cdots (J_{n-2} - a)^2 \cdot da,$$

$$A_n \cdot J_n = \int_0^a \varphi \cdot (J_0 - a)^2 (J_2 - a)^2 \cdots (J_{n-2} - a)^2\, a \cdot da.$$

[1]) In den folgenden mathematischen Entwickelungen sind bei diesem Abdruck einige Aenderungen vorgenommen worden (1894).

Hieraus ergiebt sich unmittelbar

$$\left.\begin{array}{l}
\int_0^a \varphi \cdot (J_0 - a) \cdot da = 0 \\[2ex]
\int_0^a \varphi \cdot (J_0 - a)^2 \cdot (J_2 - a) \cdot da = 0 \\[2ex]
\int_0^a \varphi \cdot (J_0 - a)^3 \cdot (J_2 - a)^2 \cdot (J_4 - a) \cdot da = 0 \\[2ex]
\text{u. s. w., oder allgemein} \\[2ex]
\int_0^a \varphi \cdot (J_0 - a)^2 \cdot (J_2 - a)^2 \cdot\cdot (J_{n-2} - a)^2 \,.\, (J_n - a)\, da = 0
\end{array}\right\} \quad (2a).$$

Die erste der Gleichungen (2) sagt aus, dass A_0 der der Flächenraum ist, der mit den verschiedenen Werthen der Helligkeit a bedeckt, und dass J_0 der Mittelwerth von a, genommen über die ganze Fläche ist. Da a und φ und r wegen ihrer physikalischen Bedeutung nur positive Grössen sein können, folgt dasselbe für alle A_n und J_n.

Bezeichnen wir die Grösse

$$\frac{J_n - a}{J_n + r} = x_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

so ist nothwendig jedes x_n ein echter Bruch, und wir können identisch setzen

$$\frac{1}{a + r} = \frac{1}{(J_n + r)\,(1 - x_n)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3a).$$

Dieser Bruch würde einmal in eine convergente Reihe nach Potenzen von x_n entwickelt werden können, nämlich

$$\frac{1}{a + r} = \frac{1}{J_n + r}\left\{1 + x_n + x_n^2 + x_n^3 + \ldots\ldots\right\}$$

und diese könnte mit $\varphi \cdot da$ multiplicirt und Glied für Glied integrirt werden; aber man kann dafür auch eine Reihe mit

halb so viel Gliedern bilden, indem man nach je zwei Gliedern der Reihe den Rest bildet, nach dem Schema

$$\frac{1}{1-x_n} = 1 + x_n + \frac{x^2_n}{1-x_n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

oder wenn wir dieses in Gleichung (3a) einsetzen und für x_n dann wieder den Werth aus Gleichung (3) entnehmen

$$\frac{1}{a+r} = \frac{1}{J_n+r}\left[1 + \frac{J_n - a}{J_n + r} + \frac{(J_n-a)^2}{(J_n+r)^2\,(1-x_n)}\right] \quad (5).$$

Nun ist aber nach Gleichung (3a)

$$\frac{1}{1-x_n} = \frac{J_n+r}{a+r}.$$

Wir erhalten also

$$\frac{1}{a+r} = \frac{1}{J_n+r} + \frac{J_n-a}{(J_n+r)^2} + \frac{(J_n-a)^2}{(J_n+r)^2\,(a+r)} \quad (5a).$$

Wenn man diese Gleichung mit multiplicirt mit $\varphi \cdot da$ und dem Product

$$\frac{(J_0-a)^2\,(J_2-a)^2\cdots(J_{n-2}-a)^2}{(J_0+r)^2\,(J_2+r)^2\cdots(J_{n-2}+r)^2}$$

und dann zwischen den früher vorgeschriebenen Grenzen 0 und a integrirt, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen (2) und (2a)

$$\left.\begin{aligned}\int_0^a \frac{(J_0-a)^2\cdot(J_2-a)^2\cdots(J_{n-2}-a)^2\cdot\varphi\cdot da}{(J_0+r)^2\cdot(J_2+r)^2\cdots(J_{n-2}+r)^2\,(a+r)} = \\ \frac{A_n}{(J_0+r)^2\cdots(J_{n-2}+r)^2\,(J_n+r)} + \int_0^a \frac{(J_0-a)^2\cdots(J_n-a)^2\cdot\varphi\cdot da}{(J_0+r)^2\cdots(J_n+r)^2\cdot(a+r)}\end{aligned}\right\}(6).$$

Das Integral auf der rechten Seite unterscheidet sich hierin von dem Integral der linken Seite nur dadurch, dass n an Stelle von $n-2$ getreten ist. Man kann daher die Integration stets um ein weiteres Glied fortführen.

Setzen wir nun $n = 0$, so ergiebt sich, da kein kleinerer Index als 0 vorhanden ist

$$\int_0^a \frac{\varphi \cdot da}{a + r} = \frac{A_0}{J_0 + r} + \int_0^a \frac{(J_0 - a)^2 \cdot \varphi \cdot da}{(J_0 + r)\,(a + r)} \quad \ldots \quad (7).$$

Indem wir jetzt die Gleichung (6) wieder auf das Integral der rechten Seite anwenden, d. h. $n = 2$ setzen, erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^a \frac{\varphi \cdot da}{a + r} = \\ \displaystyle\frac{A_0}{J_0 + r} + \frac{A_2}{(J_0 + r)^2 (J_2 + r)} + \int_0^a \frac{(J_0 - a)^2 \cdot (J_2 - a)^2 \cdot \varphi \cdot da}{(J_0 + r)^2 \cdot (J_2 + r)^2 \cdot (a + r)} \end{array}\right\} (7a)$$

u. s. w. in inf. Diese Reihe besteht aus lauter positiven Gliedern und ist nothwendig convergent. Die Convergenz ist um so schneller, je grösser r, die Helligkeit des äusseren objectiven Lichts ist. Das hier berechnete Integral hat in Gleichung (1) den Werth dE/dr bekommen, worin wir dE als eine gleich deutlich wahrnehmbare Abstufung der Empfindung, also als eine Constante zu betrachten haben.

Reduciren wir unsere Reihe auf ihr erstes Glied, so wird

$$\frac{dr}{dE} = y = \frac{J_0 + r}{A_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

was der ursprünglichen Hypothese von Fechner für constantes Eigenlicht der Netzhaut entspricht Die die Werthe von dr darstellenden Curve würde eine gerade Linie sein.

Behalten wir zwei Glieder der Reihe, setzen also

$$\frac{dr}{dE} = y = \frac{1}{\dfrac{A_0}{J_0 + r} + \dfrac{A_2}{(J_0 + r)^2 (J_2 + r)}} \quad \ldots \ldots \quad (9),$$

so wird

$$A_0\, y = \frac{A_0 \cdot (J_0 + r)^2 (J_2 + r)}{A_0 \cdot (J_0 + r)(J_2 + r) + A_2}$$

$$= (J_0 + r) - \frac{A_2 (J_0 + r)}{A_0 (J_0 + r)(J_2 + r) + A_2}$$

$$= (J_0 + r) - \frac{A_2}{A_0 (J_2 + r) + \frac{A_2}{J_0 + r}} \quad \ldots\ldots \text{(9a)}.$$

Das letzte Glied in diesem Kettenbruch wird zu vernachlässigen sein, wenn r auch nur mässig gross ist. Dann reducirt sich der Werth von y auf

$$y = \frac{J_0 + r}{A_0} - \frac{A_2}{A_0^2 (J_2 + r)} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(10)}.$$

Wenn wir y und r als rechtwinkelige Coordinaten betrachten, ist dies die Gleichung einer Hyperbel:

$$A_0\, y\, (J_2 + r) = (J_0 + r)(J_2 + r) - \frac{A_2}{A_0} \quad \ldots \text{(10a)}.$$

Daraus ergeben sich bei Fortlassung des constanten Gliedes sogleich die Gleichungen der beiden Asymptoten:

1) $J_2 + r = 0.$

Diese ist der Axe $r = 0$ parallel und liegt von dieser um J_2 entfernt auf der Seite der negativen r.

2) $A_0\, y = J_0 + r.$

Diese fällt mit der Geraden des einfachen Fechner'schen Gesetzes zusammen, liegt aber als Asymptote ausserhalb der Hyperbel. Die y sind also, da das constante Glied auf der rechten Seite der Gleichung (10) negativen Werth hat, für die zweite Annäherung alle etwas kleiner, als das Fechner'sche Gesetz sie giebt für gleichmässige Verbreitung des Eigenlichts, und nur für $r = \infty$ fallen sie mit der Asymptote zusammen.

Fig. 1 stellt die Form der Hyperbel dar; AB und CC entsprechen den beiden Asymptoten derselben, die Werthe der y sind vertical aufgetragen, die der r horizontal. Im Punkte O schneiden sich die Axen beider Coordinaten, d. h. die Linien $r = 0$ und $y = 0$. Die Hyperbel an der durch O gezogenen

Senkrechten aber nicht nothwendig in O selbst, wie die Figur es andeutet.

Die Neigung der Asymptote AB scheint nach den schon erwähnten Beobachtungen der Herren A. König und E. Brodhun für alle Farben ziemlich dieselbe zu sein, während die Lage der zweiten Asymptote und der Abstand des Scheitels der Hyperbel vom Scheitelpunkt der Asymptoten (d. h. Mittelpunkt der Hyperbel) variiren würden, so weit eben die Hyperbeln überhaupt einen annähernden Ausdruck für den Gang der Function zu geben vermögen.

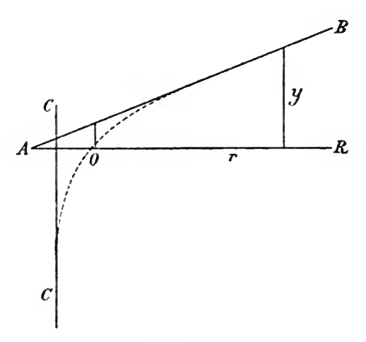


Fig. 1.

Ich gebe hier noch in Fig. 2 die nach den Beobachtungen von den genannten Beobachtern construirten Curvenformen für das spectrale Roth (Wellenlänge 670 $\mu\mu$), wobei die Ordinaten im zehnfachen Maassstabe der Abscissen aufgetragen sind. Die Curve K gilt für das trichromatische Auge des Hrn. A. König, B für das dichromatische Auge des Hrn. E. Brodhun. Die Punkte und kleinen Kreise entsprechen den wirklich ausgeführten Beobachtungen. Die Aehnlichkeit mit hyperbolischen
14 Bögen ist augenfällig, namentlich in der Curve B. Aber man würde geneigt sein, die zweite Asymptote der Curve nicht gerade abwärts, sondern schräg geneigt zu ziehen.

Abweichend von der Deutung, welche die genannten Beobachter ihren Curven gegeben haben, würde nach den unserer Formel zu Grunde gelegten Voraussetzungen die mittlere Stärke des Eigenlichts der Strecke AO (Fig. 1) entsprechen, welche nach der unten gegebenen Rechnung gegen 74 der photometrischen Einheiten betragen würde, nach denen die Beobachter gerechnet haben. Dass die Strecke, welche sie als

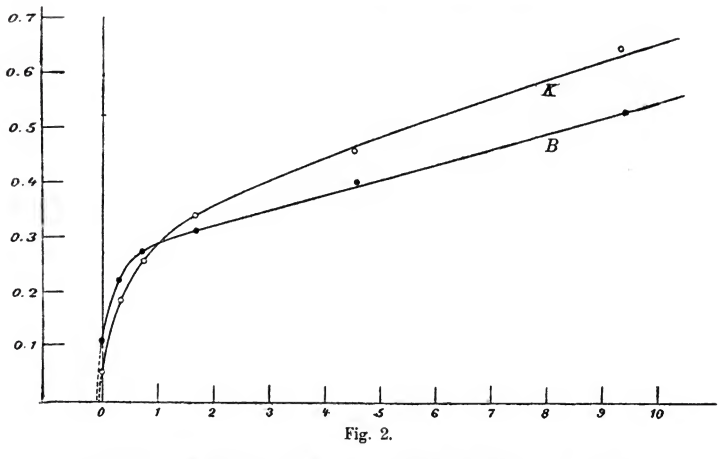


Fig. 2.

Stärke des Eigenlichts deuten, verhältnissmässig zu klein ist, selbst im Vergleich zu den Flecken des Eigenlichts, ist für meine Augen unzweifelhaft. Es wäre noch erst zu ermitteln, ob etwa das Lebensalter hierin grosse Verschiedenheiten bedingt. Ich selbst kann keinen grösseren Einfluss des Lichtstaubs auf meine Sehschärfe erkennen, als ich seit jeher gekannt habe.

Abweichungen für hohe Lichtstärken.

Die Abweichungen von Fechner's Gesetz, die für hohe Werthe der Lichtstärke r entstehen, können wir in der Formel



ausdrücken, indem wir dem ersten und grössten Gliede der
15 Gleichung (10) noch einen mit r steigenden Factor im Zähler hinzusetzen. Setzen wir also:[1])

$$\frac{dr}{dE} = \frac{(J_0 + r)(1 + \varepsilon r)}{A_0} - \frac{A_2}{A_0^2 (J_2 + r)} \quad \ldots . (11).$$

Darin soll ε eine verhältnissmässig kleine Grösse sein, welche für alle Farben gleichen Werth zu haben scheint, so weit bisher die messenden Beobachtungen reichen. Da die letzteren nur für die schwächeren Grade der Blendung ausführbar sind, indem bei höheren Graden der Zustand des Auges zu schnell sich ändert, so lässt sich in der mathematischen Formulirung höchstens ein Correctionsglied angeben, was die kleinen Correctionen der Beobachtungen einigermassen richtig darstellt.

Ich gebe in der folgenden Tabelle[2]) einen Vergleich der Ergebnisse dieser Formel mit den auf spectrales Roth bezüglichen Beobachtungen von Hrn. A. König.[3]) Als Einheit der Lichtstärke ist hierbei diejenige gebraucht, in der eine mit Magnesiumoxyd über einer Magnesiumflamme überzogene Fläche erscheint, die in einem Abstande von 1 m von einem Zehntel Quadratcentimeter schmelzenden Platinas bestrahlt wird (W. Siemens' Platinlampe), wenn der Beobachter dabei, um den Einfluss des Wechsels der Pupillenweite zu beseitigen, durch ein Diaphragma von 1 Quadratmillimeter Oeffnung blickt. Bei der Rechnung ist $A_0 = 60{,}8825$ der Einheiten der Lichtstärke r gesetzt, $J_0 = 74{,}3933$, $J_2 = 35{,}193$, $A_2 = 32{,}019$. A_0^2 und $1/\varepsilon = 150000$. Um ein Maass für die relative Präcision der Beobachtungen zu geben, die bei Bestimmungen der kleinsten wahrnehmbaren Unterschiede sich nie sehr weit treiben lässt, habe ich in der vorletzten Columne für die grösseren Lichtstärken, bei denen die verschiedenen Farben nach dem Urtheil der beiden Beobachter keine regelmässigen Differenzen der Unterschieds-

---

[1]) Diese Gleichung ist hier gegen das Original geändert (1894).

[2]) In dem vorliegenden Abdruck sind für die Berechnung dieser Tabelle den vorkommenden Constanten zum Theil andere numerische Werthe beigelegt (1894).

[3]) A. König und E. Brodhun: Sitzungsber. der Akad. zu Berlin. 1888. 26. Juli. S. 922.

schwellen zeigen, noch die Mittel der Werthe für die sechs
durchgemessenen Spectralfarben hingesetzt. Die unterste Reihe
der Tabelle bezieht sich auf die Reizschwelle. Hier ist eine
grössere Abweichung vorhanden; aber auch die Abweichung 16
der darüber stehenden Zahl ist vielleicht nicht zufällig, sondern
durch die Vernachlässigung der kleineren Glieder unserer Reihe
bedingt.

Die letzte Columne giebt aus den nach der Formel berechneten Werthen das Maass der von mir als „Klarheit" definirten Grösse.[1])

$(r + dr)$ Höhere Lichtstärke	Unterschiedsschwelle dr für Roth von der Wellenlänge 670 $\mu\mu$		Mittelwerthe für 6 beobachtete Spectral-farben	Maass der Klarheit. $= \frac{r}{dr}$
	beobachtet	berechnet		
200000		7158,2	8500	26,94
100000		2684	2830	36,26
50000	1050	1068	1150	45,82
20000	320	367,4	371,2	53,44
10000	156	173,5	169,75	56,64
5000	88	84,66	82,5	58,06
2000	33	33,96	36,5	57,89
1000	16,9	17,78	18,02	55,24
500	10,1	9,298	9,57	52,78
200	4,40	4,303	4,50	45,48
100	2,92	2,576	2,59	37,82
50	1,88	1,638		29,53
20	0,89	1,011		18,78
10	0,655	0,655		14,26
5	0,459	0,491		9,18
2	0,343	0,372		4,38
1	0,258	0,325		2,07
0,5	0,188	0,342		0,46
0,06	0,060	0,312		—

[1]) H. v. Helmholtz: Handbuch der Physiologischen Optik. II. Aufl. S. 394.

In der letzten Columne zeigt sich das Maximum der Klarheit bei der Lichtstärke 5000, aber von 500 bis 20000 weicht es höchstens um ein Zehntel von diesem Maximum ab, also innerhalb eines Gebiets, dessen obere Grenze die untere 40 mal an Lichtstärke übertrifft.

17 Bei dieser Lage des Maximum hat das mit A_2 multiplicirte Glied der Gleichung (11) kaum noch Einfluss, und man kann die Lage des Maximum allein aus dem ersten Gliede bestimmen. Nach der Definition ergiebt sich der Werth der Klarheit K:

$$K = \frac{r}{dr} = \frac{A_0 \cdot r}{(J_0 + r)(1 + \varepsilon r)} = \frac{A_0}{1 - \varepsilon J_0}\left[\frac{1}{1 + \varepsilon r} - \frac{J_0}{J_0 + r}\right].$$

Um das Maximum zu bestimmen, müssen wir den Differentialquotienten von K nach r gleich Null setzen.

$$0 = \frac{dK}{dr} = \frac{A_0}{1 - \varepsilon J_0}\left[\frac{J_0}{(J_0 + r)^2} - \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon r)^2}\right]$$

Dies giebt das Maximum für

$$r = \sqrt{\frac{J_0}{\varepsilon}}$$

Dieser Rechnung nach würde das Maximum der oben berechneten Reihe bei $r = 3341$ liegen und den Werth 58,23 haben. Der Werth der Empfindlichkeit ist hier merklich kleiner, als man bei anderen Vergleichsmethoden erreicht zu haben glaubte, vielleicht weil die Felder nicht sehr gross waren.

CXXXI.

Versuch einer erweiterten Anwendung des Fechner'schen Gesetzes im Farbensystem.

Aus der Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane. Bd. 2. S. 1 bis 30. 1891.

Die Gesammtheit der von unserem Auge empfundenen 1
Farben ist nach Riemann's Ausdruck eine dreifache Mannigfaltigkeit, d. h. jede einzelne Farbe kann durch drei unabhängig veränderliche Grössen bestimmt werden, und nicht durch weniger. Die Möglichkeit, das System der Farben durch räumliche oder flächenhafte Anordnungen übersehbar zu machen, beruht auf diesem Verhältniss, da auch ein Ort im Raume drei Variable zu seiner Festlegung verlangt. Bekannt ist, wie leicht und verständlich sich Newton's Mischungsgesetz der Farben in solcher Weise darstellen lässt. Wir übertragen dabei die der Anschauung weniger zugänglichen Verhältnisse der Farben, auf die uns viel geläufigeren der Zusammenfügung von geometrischen Strecken, beziehlich auf Schwerpunktsconstructionen.

Wie man nun im Raume als Mittel zur Bestimmung eines Ortes die allerverschiedenartigsten messbaren Raumgrössen benutzen kann, bald Linienlängen, bald Winkel, oder auch gelegentlich Flächeninhalte und Volumina, so kann man auch sehr verschiedenartige Grössen benutzen, um eine Farbe zu definiren. Die bisher am meisten ausgebildete Methode, welche sich auf Newton's Mischungsgesetz stützt, bezweckt eigentlich nur die Herstellung eines Lichtgemisches physikalisch zu defi-

niren, welches dem Auge den verlangten Eindruck geben würde. Daneben wäre es eine vollständig berechtigte Aufgabe, dahin zu streben, dass man nach Maassen, die aus der Art der Empfindung gewonnen sind, die Beziehungen der Farben zu
2 einander zu bezeichnen sucht. Die Aufgabe in dieser Richtung zu lösen, hat bekanntlich Hr. E. Hering versucht.

Für eine directe Ausmessung des Gebietes der Empfindungen haben wir bisher nur eine einzige auf Thatsachen gegründete Methode, nämlich die Untersuchung der eben noch wahrnehmbaren Unterschiede, beziehlich die der gleich deutlichen kleinen Unterschiede. Die bisher von E. H. Weber, Fechner und ihren Nachfolgern angestellten Messungen beziehen sich, so viel ich weiss, alle nur auf Veränderungen, die ausschliesslich in einer einzigen Richtung vorgingen. Das Gebiet der Farbenempfindungen bietet die Gelegenheit, solche Studien auch für eine nach drei Dimensionen sich erstreckende Mannigfaltigkeit zu machen. Während Fechner sich auf die Aenderungen der Lichtstärke allein bei ungeänderter Mischung des Lichtes beschränkt hat, so würden noch Untersuchungen hinzukommen können über die Grösse der unterscheidbaren Abstufungen in den Farbentönen und in der Sättigung der Farben ohne oder auch mit gleichzeitiger Aenderung der Helligkeit, und über die Abhängigkeit dieser Abstufungen von den physikalisch definirbaren Veränderungen des erregenden Lichtes.

Das empirische Material für die Aufstellung der Gesetze dieses Gebiets ist allerdings noch sehr unvollständig. Die älteren Versuche, wie die von Aubert am Farbenkreisel angestellten, beziehen sich auf unvollständig definirte Farben und Helligkeiten. Erst durch die neueren, namentlich von den Hrn. Arthur König, C. Dieterici und E. Brodhun ausgeführten Systeme von Messungen an Spectralfarben von wohlbestimmter Wellenlänge sind quantitative Data gewonnen worden, welche für den bezeichneten Zweck benutzt werden können, und schon einige beachtenswerthe Ergebnisse zu liefern im Stande sind. Diese will ich mir erlauben hier auseinander zu setzen, so weit sie eben reichen.

Da ich zu dieser Untersuchung durch die Umarbeitung meines *Handbuches der physiologischen Optik* geführt wurde, lag

mir bei dieser Gelegenheit die Aufgabe ob, so weit möglich zu versuchen, Zusammenhang herzustellen zwischen allerlei vereinzelten Thatsachen, die sich auf die Lehre von der *Deutlichkeit der Abstufungen* und der *Helligkeit* beziehen. Dies konnte natürlich zur Zeit nur durch Einführung einzelner hypothetischer Annahmen erreicht werden, die noch nach vielen
Richtungen hin geprüft werden können und geprüft werden 3
müssen, ehe man ihnen volles Zutrauen schenken kann. Da indessen ein solcher Versuch doch einmal gemacht werden muss, um die erste Orientirung in einem neuen Gebiete zu gewinnen und namentlich um diejenigen Punkte zu erkennen und zu bezeichnen, deren genaue Untersuchung zur Entscheidung der wesentlichsten Fragen nothwendig ist: so will ich diese meine Hypothesen nicht zurückhalten, selbst auf die Gefahr hin, sie vielleicht bald widerlegt zu sehen.

Eigene Versuche mit Farbenscheiben.

Die Versuche mit Farbenscheiben sind zwar zu scharfen Messungen nicht gut brauchbar. So weit sie aber reichen, sind sie leicht anzustellen, leicht in sehr mannigfaltiger Weise zu verändern, und jedenfalls zu einer ersten Orientirung in einem neuen Gebiete sehr nützlich. Schon *Aubert* hat vereinzelte Versuche mit ihnen über die kleinsten wahrnehmbaren Farbenunterschiede angestellt.

Ich habe zunächst denselben Weg eingeschlagen, und zwar ging ich aus von dem Grundphänomen, welches in der Photometrie benutzt wird, wenn es sich darum handelt, zwei etwas verschieden gefärbte Lichter ihrer Helligkeit nach zu vergleichen. Wenn man die Lichtstärke des einen von ihnen allmählich verändert, so werden sie selbstverständlich niemals ganz gleich, aber man gelangt doch zu einer Einstellung, bei welcher der genannte Unterschied ein Minimum der Deutlichkeit erreicht. Man betrachtet gewöhnlich das Verhältniss der Lichtstärken, welches dieser Einstellung entspricht, als das Verhältniss *gleicher Helligkeit*.

Ich habe es mir nun zunächst zur Aufgabe gestellt, diese Einstellung auf das Minimum der Erkennbarkeit des Unter-



schiedes bei einer Reihe von Mischfarben, die aus denselben Farbenelementen durch Mischung auf der Farbenscheibe erhalten wurden, durchzuführen. Die eine Mischfarbe, und zwar die etwas dunklere, blieb dabei unverändert, die andre erlitt kleine Veränderungen in ihrer Helligkeit und Mischung, indem man sehr schmale schwarze Sectoren sich einschieben liess, um sie ein wenig dunkler zu machen, bis man die Grenzen der Ringe, in denen sich diese Farben zeigten, möglichst schwer
4 erkennbar gemacht hatte, wobei sie dann auch in der That gleich hell erschienen. Die dazu erforderlichen Verhältnisse wurden dann notirt.

Die Farbenmischungen füllten abwechselnd fünf concentrische Ringe auf der Scheibe. Die Kreisscheiben waren aus farbigen Papieren von möglichst gesättigter Farbe, aber nicht glänzender Oberfläche geschnitten; sie waren längs eines Radius gespalten nach der Methode von Maxwell, um die Winkel beliebig ändern zu können. In nebenstehender Figur sind die hervorstehenden Ränder der gespaltenen Scheiben abgebildet, wie sie auf deren vorderer Fläche sichtbar waren. Am oberen Umfange der Figur ist jeder vorliegenden Scheibe ein etwas kleinerer Radius gegeben, um sichtbar zu machen, wie sie zwischeneinanderliegen. In Wirklichkeit waren die Scheiben hier durch congruente Kreislinien von gleichem Radius begrenzt.

5 Die Scheibe von etwas hellerer Farbe *R* und die schwarze haben einen einfachen radialen Einschnitt, erstere bei *bb*, letztere bei *dd*. Dagegen hat die Scheibe von dunklerer Farbe *B* eine mit zinnenförmigen Vorsprüngen versehene Grenzlinie zwischen *aa* und *cc*. Ersteres ist ein Radius, letzteres aber ist eine Parallele zu diesem Radius, so dass die Winkelwerthe der Bögen zwischen *aa* und *cc* für die inneren Kreise grösser werden, als für die äusseren. Die schwarze Scheibe wurde ebenfalls so eingelegt, dass ihre Grenzlinie *dd* nicht genau die Lage eines Radius hatte, sondern parallel dem dicht daneben liegenden Radius *aa* lag, und somit der schwarze Streifen, der im Grunde der zinnenartigen Ausschnitte hervorsah, überall dieselbe Breite hatte, und überall die Höhe der Zinnen um den gleichen Bruchtheil verkleinerte. Die Lage des Radius *b* konnte beliebig

um fast den ganzen Umfang verschoben werden, mit Ausschluss des von den Zinnen eingenommenen Streifens, so dass man jede der beiden Farben *R* und *B* fast rein erscheinen lassen konnte, oder auch alle möglichen Abstufungen ihrer Mischung. Zu der durch die beiden zwischen den Radien *bb* und *aa*

liegenden Sectoren bestimmten Farbenmischung kam dann in den bis *cc* reichenden Vorsprüngen des Feldes *B* ein kleiner Bogen von dieser Farbe hinzu, dafür wurde ein gleicher Bogen von *R* weggenommen. In den Ausschnitten der Zinnen dagegen wurde nur ein schmaler Streifen *aa dd* von der Farbe *R* durch Schwarz weggenommen. Wenn die Farbe *B* etwas dunkler war, war da, wo sie zwischen *aa* und *cc* statt *R* auftrat, etwas

Helligkeit verloren; um diesen Verlust für die andere Mischung zu compensiren, musste auch hier etwas von der Farbe R fortgenommen werden. Die Breite dieses schwarzen Streifens konnte verändert werden. Die Grenzen zwischen den äusseren Ringen, wo die Winkelwerthe der Zinnen am kleinsten sind, sind natürlich am undeutlichsten. Ich fand es vortheilhaft, gleichzeitig mehrere Grenzen von verschiedenen kleinen Abstufungen der Deutlichkeit vor Augen zu haben, um bei den Vergleichungen diejenige herauszusuchen, die eben der Grenze des Wahrnehmbaren am nächsten stand.

Wenn ein festes Verhältniss der Helligkeit zwischen den beiden Farben B und R auch unter diesen Umständen bestände, so müsste sich auch ein festes Verhältniss zwischen den beiden kleinen Bögen ac und ad finden lassen, welches in den Ringen
6 von verschiedenem Farbenton immer wieder gleiche Helligkeit herstellte, unabhängig von dem Verhältniss der beiden grossen Sectoren R und B.

Nähme man also z. B. an, dass Lichter gleicher Helligkeit, aber verschiedenen Farbentons durch Mischung von zwei Grundfarben nach der Formel

$$H = A \cdot x + B \cdot y$$

gegeben werden könnten, wo A, B Constanten sind, H eine Function der Helligkeit h, und x, y Quanta zweier beliebig gewählter Elementarfarben: so würde für eine benachbarte Farbe in der Reihe gleich heller Mischungen

$$0 = A \cdot dx + B \cdot dy$$

werden, und das Verhältniss von $dx : dy$ würde, unabhängig von den Werthen x und y, wie der Helligkeit h immer dasselbe sein; dasselbe würde von dem Verhältniss der Breite der beiden schmalen Farbenstreifen auf und zwischen den Zinnen unserer Scheibe gelten.

Diese Vermuthung bestätigt sich nun aber nicht bei Ausführung des Versuchs. Es zeigt sich vielmehr, dass *der zum Theil mit Schwarz gedeckte Vorsprung der helleren Farbe um so breiter gemacht werden muss, je mehr von seiner Farbe schon der Farbe des Grundes eingemischt ist.* Es wird also bei der von mir beschriebenen

Methode der Vergleichung zweier Helligkeiten — wir wollen sie die photometrische Methode nennen — die Wirkung eines Zusatzes einer Farbe auf die Helligkeit wesentlich durch den schon vorhandenen Vorrath dieser selben Farbe in der Mischung geschwächt.

Ich führe zunächst einige Beispiele solcher Versuche an:

1. **Grün** und **Roth**, Breite $ac = 4{,}5$ mm. Gleiche Helligkeit und das Minimum des Unterschieds erhielt ich
   a) für rothen Grund bei 2,5 mm Breite des Grün;
   b) für halb roth, halb grünen Grund bei 2,75 mm Grün;
   c) für grünen Grund bei 3,75 mm Grün.

Der Kreis von 50 mm Radius war eben noch wahrnehmbar, jedoch etwas deutlicher bei halb grünem, halb rothem Grunde.

2. **Blau** und **Roth**, Breite $ac = 4$ mm. Gleich helle Ringe 7
   a) auf blauem Grunde für 1,25 mm Roth gegen 4 mm Blau;
   b) auf halb rothem, halb blauem Grunde 1,75 mm Roth;
   c) auf rothem Grunde 3 mm Roth.

Bei *a* und *b* war der Kreis von 60 mm Radius schwach zu erkennen, bei *c* nur der von 50 mm.

3. **Blau** und **Grün**, Breite der Ausschnitte 5,5 mm. Gleich helle Ringe
   a) auf blauem Grunde, bei 1,5 mm Grün gegen 5,5 mm Blau;
   b) auf halb blauem, halb grünem Grunde 1,75 mm Grün;
   c) auf grünem Grunde 2,25 mm Grün.

Sichtbar war der Kreis von 50 mm Radius, aber sehr schwach, am schwächsten bei *c*.

Es zeigt sich ohne Ausnahme, dass der Streifen von veränderlicher Breite auf gleichfarbigem Grund breiter genommen werden muss als auf gemischtem Grunde, und auf diesem breiter als auf dem Grunde der ungemischten andern Farbe.

Die Reihe der Helligkeiten der drei gewählten Farben ist offenbar:

$$\text{Grün} > \text{Roth} > \text{Blau}.$$

Bei den stärkeren Helligkeitsdifferenzen mit Blau sind die

Ringe auf dem helleren Grunde weniger sichtbar; bei der schwächeren Differenz Roth-Grün sind die Ringe auf den reineren Farben weniger sichtbar, als auf dem Gemisch.

Da aber die gebrauchten Pigmentfarben überhaupt gemischtes Licht aus fast allen Gegenden des Spectrums geben, ist es nicht auffallend, dass sie sich theilweise immer gegenseitig schwächen, und dass die zackige Figur jeder Farbe auf dem farbigen Felde der andern Farbe nicht ganz so deutliche Ringe giebt, wie sie auf schwarzem Grunde geben würde. Aber sehr gross ist der Unterschied in der Empfindlichkeit nicht. Bei halb hell, halb schwarz getheiltem Grunde würden helle Streifen die Breite von etwa 2 mm für den Radius 60 mm haben müssen, um sicher erkannt zu werden. Dass die erforderlichen Farbenstreifen bei unseren Versuchen 2 bis 3 mal so breit
8 waren, giebt also noch keineswegs einen sicheren Beweis dafür, dass die Empfindlichkeit gegen Farbenabstufungen erheblich geringer ist, als die für Helligkeitsstufen.

Es folgt nun aus diesen Versuchen, dass, wenn wir auf diesem Wege von einer sehr gesättigten Farbe ausgehend eine Reihe gleich heller gemischter Farben suchen, indem wir immer nur zwei sehr nahe Glieder der Reihe mit einander vergleichen, das gesammte Quantum des gemischten Lichts in der Reihe solcher Farben nicht unverändert bleiben kann. Wählen wir die Einheiten für die Lichtquanta der beiden Endfarben so, dass sie in gleicher Helligkeit erscheinen, so werden wir von möglichst gesättigtem Roth anfangend, durch Wegnahme eines kleinen Quantum Roth die Helligkeit viel weniger schwächen, als wir durch den Zusatz eines gleichen Quantum Blau sie verstärken, da letzteres noch auf kein merkliches Quantum schon vorhandenen Blaus stösst. Wir müssten also weniger Blau zusetzen, als wir Roth wegnehmen. Dadurch wird die Summe der Lichtquanta kleiner werden. Dies wird beim Fortschritt zu Mischungen mit immer mehr Blau so weiter gehen müssen, bis endlich die beiden Farben nahe gleiche Quantität in der Mischung haben; dann wird man anfangen müssen, Blau in grösserer Menge hinzuzusetzen, als man Roth wegnimmt. Das Gesammtquantum wird wieder steigen, bis wir beim reinen Blau angekommen sind.

Wir haben es hier offenbar mit einem ähnlichen Einfluss zu thun, wie er sich bei Abstufungen der Intensität ohne gleichzeitige Anwesenheit einer andern Farbe auf demselben Felde geltend macht. Gleiche kleine Zuwachse der Lichtmenge machen um so weniger Eindruck, je grösser die schon auf dem Felde vorhandene Lichtmenge gleicher Art ist. In jenen Fällen messen wir den Eindruck ab an der Deutlichkeit der Wahrnehmung des Schattens, hier vergleichen wir zwei die Helligkeit steigernde Abstufungen zweier Farben auf demselben Grunde mit einander.

Vergleichung der Helligkeit sehr verschiedener Farben.

Bei der hier vollzogenen Vergleichung zweier nahehin gleicher, sehr gesättigter Farben wird das Auge, auch wenn es abwechselnd beide Felder anblickt, fortdauernd unter dem Eindruck der hervortretenden Farbe sein, und die Empfindlich- 9
keit für diese wird also in beiden zu vergleichenden Feldern dauernd geschwächt. Dadurch unterscheidet sich dieser Fall von dem andern, wo die Helligkeit zweier sehr verschieden gefärbter Felder verglichen wird. Diese letztere Vergleichung ist allerdings sehr unsicher. Ich selbst fühle mich wenigstens fast ganz unfähig dazu; aber es giebt andere Beobachter, die für solche Vergleichungen einen ziemlichen Grad von Bestimmtheit erreichen, und dies ist, wie es scheint, besonders bei den Dichromaten der Fall.

Um das Gesetz auch an grösseren Farbendifferenzen zu prüfen, ersuchte ich Hrn. E. Brodhun, der durch sein dichromatisches Farbensystem in dieser Hinsicht begünstigt ist, und grosse Uebung und Erfahrung in dergleichen Versuchen erworben hat, directe Helligkeitsvergleichungen am Farbenkreisel zu machen. Er verglich zunächst die Helligkeit von zwei rothen und zwei blauen Papieren mit Grau, welches auf dem Farbenkreisel aus einem hellen Grau und Schwarz gemischt wurde. Dann stellte er Farbengleichungen her zwischen einem Roth und einem Blau einerseits, Grau und Schwarz andererseits, und verglich den durch diesen Versuch gefundenen

Werth des Grau mit dem aus den ersten Bestimmungen berechneten. Es fand sich

1) Helles Roth $R_h = \frac{160}{360}$ Grau,

2) dunkles Roth $R_d = \frac{110}{360}$ „

3) helles Blau $B_h = \frac{60}{360}$ „

4) dunkles Blau $B_d = \frac{25}{360}$ „

Farbengleichungen, beobachtet:

I.	121 Gr. = 127 B_h + 233 R_h,	berechnet	= 125 Gr.
II.	118 Gr. = 95 B_d + 265 R_h,	„	= 125 Gr.
III.	98 Gr. = 94 B_h + 266 R_d,	„	= 97 Gr.
IV.	97 Gr. = 70 B_d + 290 R_d,	„	= 94 Gr.

Die ersten beiden Beispiele sind freilich im Sinne des angeführten Gesetzes ausgefallen, die letzteren aber entgegengesetzt. Der Mittelwerth der Abweichungen fällt allerdings noch auf die Seite der ersteren. Sein Betrag ist 1,75, mit einem wahrscheinlichen Fehler von 1,24. Aber dieser Betrag ist, wie schon unsere oben angeführten Versuche zeigen, und wir nachher noch deutlicher sehen werden, viel kleiner, als er nach dem Fechner'schen Gesetze zu erwarten wäre.

Uebrigens hat Hr. Brodhun[1]) in seiner Dissertation (S. 35) eine Vergleichung der direct geschätzten Helligkeit der verschiedenen Farben eines Spectrum mit den früher von ihm[2]) bestimmten Farbenwerthen der einzelnen Spectralfarben angestellt, welche sich ergeben, wenn man sie aus den Endfarben des Spectrum für sein dichromatisches Auge durch Mischung herstellt. Dabei hat er die so bestimmte Helligkeit J ziemlich gut durch eine lineare Formel:

$$J = 1{,}018 \,.\, W + 0{,}03915 \,.\, K$$

---

1) E. Brodhun: „Beiträge zur Farbenlehre." Inaug.-Dissertation. Berlin, 1887.

2) A. König und C. Dieterici: „Die Grundempfindungen und ihre Intensitätsvertheilung im Spectrum." Sitzungsber. d. Akademie zu Berlin, 29. Juli 1886.

darstellen können, allerdings mit Abweichungen, die bis zu 6 % steigen; aber keinen regelmässigen Gang zeigen. Darin sind W und K die Quanta der weniger brechbaren und brechbareren Farben, berechnet nach einer Einheit, welche die beiden im Weiss vereinigten Quanta dieser Endfarben gleich gross setzt. Brodhun's Formel zeigt, dass die beiden zu Weiss zu verbindenden Farbenquanta sehr ungleiche Helligkeit haben, indem das Einheitsquantum von W etwa 26 mal heller ist, als das von K. Ich nenne solche Einheiten verschiedenfarbigen Lichts Einheiten von gleichem Farbenwerth.

Wenn wir dagegen mit w und k Einheiten bezeichnen, die bei gleicher Anzahl grösseren Lichtstärken gleiche Helligkeit geben, wie sie nach den in Brodhun's Dissertation beschriebenen Versuchen sich finden lassen; so ergiebt sich, dass das violette k 26 mal grösseren Farbenwerth, als die wahrscheinlich gelbliche Farbe w besitzt.

Aus den Untersuchungen der Hrn. A. König und 11
E. Brodhun[1]) geht andererseits hervor, dass nach Einheiten gleicher Helligkeit gemessen, gleiche Quanta w und k auch für die Intensitäten, welche eine gewisse Grenze (die des Purkinje'schen Phänomens) übersteigen, übereinstimmenden Gang in den Abstufungen ihrer Unterschiedsempfindlichkeit zeigen, worauf bei unsern hier vorliegenden Untersuchungen noch grösseres Gewicht fällt, als auf die gleiche Helligkeit.

Farbenunterschiede der Spectralfarben.

Für die Verwerthung der Beobachtungen über die kleinsten erkennbaren Unterschiede der Farbentöne des Spectrum liegen bisher ausreichende Beobachtungen nur für das dichromatische Auge des Hrn. Brodhun vor. Darin liegt allerdings ein gewisser Vortheil für die principiellen Fragen. Denn die Erweiterung des Fechner'schen Gesetzes auf ein Gebiet von mehreren Dimensionen wird sich für zwei Dimensionen ja leichter vollziehen lassen, als für drei, abgesehen von dem schon erwähnten Umstande, dass sowohl die Farbengleichungen als auch namentlich die Vergleiche der Helligkeit von Dichromaten sicherer und schärfer vollzogen werden, als von Trichromaten.

---

[1]) Sitzungsber. d. Akademie zu Berlin, 26. Juli 1888 u. 27. Juni 1889.

Die für die Ersteren dabei vorliegende Aufgabe ist eben einfacher.

Die Beobachtungen von Hrn. E. Brodhun über die Empfindlichkeit des Auges für Unterschiede der Wellenlänge des Lichtes sind in den *Verhandlungen der physiologischen Gesellschaft zu Berlin*, 1885—1886, Nr. 17 u. 18 veröffentlicht. Die nebeneinander stehenden Felder, in denen die beiden zu vergleichenden Farben sich zeigten, wurden auch auf Gleichheit der Helligkeit eingestellt, so dass sie sich nur durch den Farbenton unterschieden. Hierin ist also das Verfahren von E. Brodhun ganz ähnlich dem meiner oben beschriebenen Versuche an Farbenscheiben. Der Beobachter suchte auf vollkommene Gleichheit einzustellen. Der Fehler jeder Einstellung wurde am Apparat abgelesen und aus den gewonnenen Zahlen schliesslich der mittlere Fehler der Einstellungen als Maass für die Unsicherheit der Vergleichung berechnet.

Ich lasse hier die von Brodhun gegebenen Zahlen für eine Reihe von Wellenlängen folgen, für die er das Mischungs-
12 verhältniss aus der warmen und kalten Farbe (W und K) nach Einheiten von gleicher färbender Kraft angegeben hat, und füge den Werth von dem Verhältniss

$$p = \frac{W}{W + K}$$

hinzu.

Tabelle I.

λ	W	K	p
560	8,594	0,104	0,98805
545	7,932	0,178	0,97805
535	6,971	(0,291)	0,95997
530	(6,4276)	0,409	0,94018
515	4,608	1,228	0,78957
500	2,562	2,809	0,47700
487	1,319	5,988	0,18051
475	0,656	10,920	0,05669
465	0,250	13,775	0.01815

Die beiden eingeklammerten Zahlen sind durch Interpolation gefunden.

Die Bestimmungen des mittleren Fehlers $\delta\lambda$ für Einstellungen desselben Beobachters auf gleiche Farbe beziehen sich grösstentheils auf andere dazwischen liegende Wellenlängen. Es wurden deshalb durch Interpolationen zweiten Grades sowohl die Werthe von p, als auch die für $dp\,/\,d\lambda$ für diese zwischenliegenden Werthe berechnet. Unter $\delta\lambda$ sind in Tabelle II die von Brodhun gefundenen mittleren Fehler angegeben, unter

$$\delta p = \frac{dp}{d\lambda} \cdot \delta\lambda$$

die entsprechenden Fehler im Werthe von p.

Dies gab folgende Tabelle, die so weit hergesetzt ist, als gleichzeitig Werthe von p und $\delta\lambda$ zu ermitteln waren:

Tabelle II. 13

λ	Mittlerer Fehler $\delta\lambda$	p	$\frac{dp}{d\lambda}$	δp
550 $\mu\mu$	3,65	0,98367	0,000895	0,00327
540 „	2,17	0,97134	0,001808	0,00392
530 „	1,03	0,94018	0,005075	0,00523
520 „	0,47	0,85688	0,01170	0,00550
510 „	0,35	0,69616	0,01976	0,00692
500 „	0,15	0,47700	0,02407	0,00361 weiss
490 „	0,15	0,24236	0,02134	0,00320
480 „	0,28	0,09438	0,009526	0,00267
470 „	0,59	0,02993	0,003884	0,00229

Die Zahlenverhältnisse p beziehen sich auf Lichteinheiten gleicher färbender Kraft; um sie für die Vergleichung der Unterschiedsempfindlichkeit brauchbar zu machen, welche bei gleicher Helligkeit der verglichenen Farben ausgeführt ist, müssen wir die genannten Zahlen noch umrechnen auf Einheiten gleicher Helligkeit. Wenn wir dem W seinen Werth lassen, wird statt K zu setzen sein

$$\frac{1}{n} \cdot K, \text{ wo } n = \frac{a}{b} = 26 \text{ ist.}$$

Wie wir vorher setzten

$$\frac{W}{W+K}=p$$

oder

$$\frac{W}{K}=\frac{p}{1-p},$$

so wird das mit P zu bezeichnende Verhältniss in den andern Einheiten:

$$\frac{W}{W+\frac{1}{n}\,K}=P$$

oder

$$\frac{n\,W}{K}=\frac{P}{1-P}=\frac{np}{1-p}$$

14 und also

$$P=\frac{np}{np+(1-p)}$$

$$1-P=\frac{1-p}{np+(1-p)}$$

$$\frac{dP}{d\lambda}=\frac{n\,.\,\frac{dp}{d\lambda}}{[np+(1-p)]^2}$$

Tabelle III.

λ	P	$\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{d\lambda}\cdot\delta\lambda$	$\frac{1}{1-P}\cdot\frac{dP}{d\lambda}\cdot\delta\lambda$	δP
550	0,99935	0,000130	0,20332	0,000130
540	0,99862	0,000166	0,15795	0,000160
530	0,99756	0,000227	0,09272	0,000226
520	0,99250	0,000286	0,04424	0,000284
510	0,98350	0,000540	0,02968	0,000422
500	0,95954	0,000586	0,01392	0,000562
490	0,89266	0,001871	0,01556	0,001670
480	0,73033	0,008412	0,02280	0,006144
470	0,44512	0,043921	0,03513	0,01955

Bei den hier besprochenen Messungen wurde immer gesucht eine Lichtstärke zu erreichen, welche oberhalb der Grenze liegt, bei der sich Purkinje's Phänomen einstellt. Dies ist nach den in der Arbeit der Hrn. A. König und E. Brodhun über das Psychophysische Gesetz angegebenen Zahlen bei der dort mit 100 bezeichneten Lichtstärke der Fall. Die Bruchtheile der Lichtstärke, die bei dieser Helligkeit noch wahrgenommen werden konnten, waren bei unserem Beobachter Brodhun für

$\lambda = 670\,\mu\mu$	605	575	505	470	430
$\frac{dr}{r} = 0{,}0271$	0,0239	0,0226	0,0195	0,0203	0,0268.

Diese Zahlen der unteren Reihe bezeichnen aber nicht mittlere Fehler der Einstellung, sondern die kleinsten Werthe, bei welchen man in 10 auf einander folgenden Versuchen den Unterschied noch erkennen konnte. Nach der Theorie der Fehlervertheilung in der Wahrscheinlichkeitsrechnung muss die Abweichung vom Mittel mehr als 2,72 mal so gross als der wahrscheinliche Fehler, oder 1,82 mal grösser als der mittlere Fehler der Beobachtungen sein, damit es wahrscheinlicher werde, dass in 10 Beobachtungen hinter einander die vorhandene Abweichung immer erkannt wird, als dass sie einmal nicht erkannt wird. Danach würde sich der mittlere Fehler dr / r bei den Vergleichungen der genannten Helligkeitsstufen annähernd im Werthe von 0,012 ergeben haben.

Die letzte Columne unserer Tabelle ergiebt die Werthe von δP, d. h. den mittleren Fehler in der Bestimmung der beiden Farbenquanta, welcher im Verhältniss zur gesammten Lichtmenge beider Farben

$$P + (1-P) = 1$$

gemacht worden wäre. Dieser ergiebt sich, wie wir sehen, durchgehends mit Ausnahme etwa der letzten Zahl viel kleiner, als der Fehler dr/r bei einer Intensitätsvergleichung, wenn $r = 1$. Ja die ersten dieser Zahlen würden eine Empfindlichkeit des Auges gegen Farbenabstufungen nachweisen, die fast hundert Mal grösser ist, als die bei Intensitätsvergleichungen, wenn man die Differenz als Bruchtheil der ganzen vorhandenen Lichtsumme

berechnen wollte. Dies gilt in erhöhtem Grade für die Reihe der Werthe von δp in der Tabelle II, wo aber allerdings die gesammte Helligkeit für die kleineren Wellenlängen eine geringere ist. Daraus folgt zunächst: Durch das gleichzeitige Vorhandensein einer zweiten stark abweichenden Farbe im Felde, wird die Erkennbarkeit kleiner Abstufungen von Intensitätsstufen farbigen Lichtes viel weniger beeinträchtigt, als durch das Vorhandensein eines gleich hellen Quantum derselben Farbe.

Ein der Hering'schen Farbentheorie entsprechender Gang der Unterschiedsempfindlichkeit zeigt sich hierbei gar nicht. Denn die Weissempfindung müsste nach ihm in allen Farben
16 der berechneten Reihe in Tabelle III gleich gross sein, der Unterschied also ausschliesslich von den Abstufungen der Reihe Gelb bis Blau abhängen, deren Nullpunkt zwischen 500 und 490, näher beim ersteren, läge. Auf einer Seite dieses Punktes wäre die Gelbempfindung schwach, auf der andern die Blauempfindung. An beiden Enden der Reihe würden die letztgenannten beiden Empfindungen nahehin ihr Maximum erreichen. Gleiche Abstufungen dP würden gleichen Abstufungen der gelbblauen Elementarwirkung der Farbenreihe entsprechen. Die mittleren Fehler δP der Tabelle III würden dabei eine grosse Empfindlichkeit für die Abstufungen einer intensiv gelben Elementarwirkung, eine geringe für die intensiv blaue zeigen. Dagegen zeigt sich nichts dem Fechner'schen Gesetze Aehnliches für diese angebliche Gelb-Blau-Empfindung, weder in Tabelle II noch in Tabelle III, keine Verkleinerung der wahrnehmbaren Stufen am Nullpunkt der Reihe, keine Steigerung nach den beiden Enden hin. Wenn es solche Elementarempfindungen giebt, die auch negative Werthe annehmen können, müsste also offenbar ein ganz anderes psychophysisches Gesetz für die Wahrnehmbarkeit ihrer Stufen existiren, als das in den Hauptzügen von E. H. Weber und Fechner angegebene.

Wenn man dagegen die Empfindungen der dichromatischen Farbenreihe als zusammengesetzt aus den Empfindungen zweier Grundfarben ansieht, die den Endfarben des Spectrum ent-

sprechen, so würden zur Vergleichung mit Fechners Gesetze die Verhältnisse

$$\frac{dP}{P} \text{ und } \frac{dP}{1-P}$$

zu bilden sein, von denen mindestens eines grösser sein müsste als 0,012, wenn die Wahrnehmung des Farbenunterschiedes auf einen Intensitätsunterschied zurückgeführt werden sollte. Diese Verhältnisse sind in der vorletzten und drittletzten Spalte der Tabelle III angegeben. Die Abstufungen des Violett sind in der That alle gross genug, um wahrgenommen zu werden, oder kommen der wahrscheinlichen Grenze wenigstens ganz nahe, während die Abstufungen des Roth, soweit die Beobachtungen reichen, zu kleine Verhältnisse des $\delta P/P$ bieten, mit Ausnahme der letzten Zahl. Leider ist diese die einzige,
wobei $P < {}^1/_2$, d. h. der violette Antheil der Farbe heller ist 17
als der gelbe (beziehlich rothe). Für den Rest des Spectrum fehlen die Beobachtungen der Mischungsverhältnisse der beiden Farben, da die Mengen des eingemischten Roth hier wohl zu schwach für eine sichere Bestimmung waren. Nach färbender Kraft gemessen ist nämlich schon in der letzten Beobachtung für $\lambda = 470\ \mu\mu$, die Stärke des Roth nur 1,3 % von der des Violett. Dass dort aber noch wahrnehmbare Farbenunterschiede vorkommen, ist bekannt; auch gehen Brodhun's Bestimmungen der mittleren Fehler $\delta\lambda$ noch bis zur Wellenlänge 440 $\mu\mu$, indem sie an Grösse auch hier wieder zunehmen, wie am rothen Ende. Aber die Data zur Berechnung des P und dP fehlen hier, weil quantitative Bestimmungen dieser kleinen Einmischungen der andern Grundfarbe in das Violett nicht mehr ausgeführt sind.

Allerdings sind die Werthe $dP/(1-P)$ des mittleren Fehlers für die Abstufungen des Violett durchaus nicht constant, wie sie es wenigstens annähernd nach Fechner's Gesetz für die Intensitätsabstufungen einer isolirten Farbe sein sollten. Aber schon die bisherigen Untersuchungen haben Anhaltspunkte ergeben, welche es sehr wahrscheinlich machen, dass die Endfarben des Spectrum nicht ungemischte Elementarempfindungen hervorrufen. Am violetten Ende gesellt sich in der That zu dem direct einfallenden violetten Licht noch weissliches

Fluorescenzlicht der Netzhaut, und davon unabhängig haben die durch A. König und C. Dieterici angestellten Vergleichungen der Farbenwerthe der verschiedenen Spectralfarben in trichromatischen und dichromatischen Augen zu einer Schätzung der Grösse dieser Einmischung geführt, welche das Violett des Spectrum von Seiten der andern Grundfarbe erleidet. Diese würde 0,1 vom Farbenwerth des Violett betragen.

Dazu kämen noch die Beträge, welche die innere Erregung der Netzhaut nach Fechner's Ansicht zu der Erregung durch das äussere Licht hinzufügt, und welche für die Berechnung der Empfindungsstufen bei sehr kleinen äusseren Lichtmengen berücksichtigt werden müssen. In den gesättigteren Farben des Spectrum sind in der That die Spuren andrer eingemischter Farben klein genug, dass ihre Wahrnehmbarkeit durch das Eigenlicht merklich beeinflusst werden kann. Dadurch wird es sich erklären lassen, dass, wo die Einmischungen des Violett
18 in die warme Grundfarbe sehr klein sind, die Empfindlichkeit für die Aenderungen des Farbentons nicht ganz so gross sich findet, wie sie nach der ursprünglichen Form des Fechner'schen Gesetzes zu erwarten wäre.

Unter diesen Umständen schien es nicht aussichtslos zu sein, das Fechner'sche Gesetz in diesem Gebiete als Führer zu benutzen und zu versuchen, ob man es den Erscheinungen gegenüber überall durchführen könne in dem Sinne, dass man, so weit nicht die Empfindlichkeit durch Blendung verringert wird, die Grösse der Empfindungsstufe für jede Grundfarbe nur von der Menge der vorhandenen gleichartigen Farbe abhängig annimmt, dagegen sie als unabhängig von den Mengen der gleichzeitig das Feld deckenden andern Grundfarben betrachtet.

Da wir aber bei unsern Versuchen an der Grenze der beiden verglichenen Felder immer Abstufungen je zweier Grundfarben haben, und zwar Zunahme in gleichem Sinne bei Bestimmung der Helligkeitsstufen gleichbleibender Farbe, dagegen in entgegengesetztem Sinne bei der der Farbenstufen gleicher Helligkeit: so müssen wir noch eine zweite Voraussetzung machen über die Wahrnehmbarkeit je zweier zusammentreffender Abstufungen verschiedenartiger Grundempfindungen an derselben Grenze.

Wenn man die mögliche Form eines solchen Gesetzes überlegt, so ist klar, dass der Empfindungsunterschied dE an der Grenze zweier Felder nur dann ganz verschwinden kann, wenn keine von den drei Grundempfindungen daselbst eine Abstufung zeigt. Bezeichnen wir die Empfindungsunterschiede für die letzteren einzeln genommen mit dE_1, dE_2 und dE_3, so muss dE eine solche Function der letzteren sein, dass $dE = 0$ nur dann möglich wird, wenn gleichzeitig:

$$dE_1 = dE_2 = dE_3 = 0.$$

Dies können wir bekanntlich erreichen dadurch, dass wir $(dE)^2$ gleich einer nothwendig immer positiven Function von dE_1, dE_2 und dE_3 setzen. Da wir übrigens es hier mit verschwindend kleinen Aenderungen zu thun haben, ist es von vornherein wahrscheinlich, dass diese Function eine homogene Function zweiten Grades sein wird.

Setzen wir also: 19

$$dE^2 = A\,.\,(dE_1)^2 + B\,.\,(dE_2)^2 + C\,.\,(dE_3)^2 + 2\,.\,a\,.\,dE_2\,.\,dE_3 \\ + 2\,.\,b\,.\,dE_1\,.\,dE_3 + 2\,.\,c\,.\,dE_1\,.\,dE_2.$$

Da im Falle, wo die Quanta zweier Grundempfindungen gleich Null sind, die Abstufung nur von der dritten abhängt, und die ganze Wahrnehmung auf der Wahrnehmung dieser einen beruht, und dieser gleich sein muss, werden wir die Coëfficienten

$$A = B = C = 1$$

setzen müssen. Damit dann der Werth von dE^2 stets positiv, d. h. dE reell bleibe, müssen a, b, c ächte Brüche sein, und

$$1 + 2\,abc > a^2 + b^2 + c^2.$$

Wenn a, b, c von Null verschieden sind, so würde dies anzeigen, dass es nicht gleichgiltig ist, ob dE_1, dE_2, dE_3 in der gleichen oder entgegengesetzten Richtung steigen. Ersteres ist bei Vergleichungen der Helligkeitsabstufungen der Fall, letzteres bei denen der Farben gleicher Helligkeit. Positive Werthe von a, b, c würden die Wahrnehmbarkeit der Heiligkeitsabstufungen begünstigen, die der Abstufungen des Farbentons benachtheiligen. Negative Werthe umgekehrt. Die Thatsachen scheinen dafür zu

sprechen, dass keines von beiden der Fall ist. Dann würde die Formel ihre einfachste Gestalt annehmen, nämlich:

$$dE^2 = dE_1{}^2 + dE_2{}^2 + dE_3{}^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Diese letzte Formel würde auch aussagen, da dE_1, dE_2 und dE_3 Wirkungen differenter physiologischer Processe sind, dass die physiologischen Erregungen ungestört für sich bestehen, ohne eine gegenseitige Einwirkung auf einander auszuüben, ehe sie zum Bewusstsein kommen, und dass sie erst in diesem die Aufmerksamkeit kräftiger durch ihr Zusammenwirken erregen.

Wir werden zunächst nachweisen müssen, dass die bisher bekannten Thatsachen sich mit dem aufgestellten Gesetz in Uebereinstimmung befinden. Das gilt namentlich für die von den Hrn. A. König und E. Brodhun aufgefundenen Gesetze der Intensitätsschwellen für die verschiedenen Farben.

Wenn dE die Stärke der Unterschiedsempfindung für die Zunahme dx der Farbe x bedeuten soll, so kann man ihren Werth näher als durch die ursprüngliche Form von Fechner's Gesetz ausdrücken durch die Gleichung

$$dE = \frac{k \,.\, dx}{(a + x)\, F_h}$$

wo F_h eine Function der Helligkeit ist, die der Stärke der Blendung entspricht. Die Constante a macht sich nur bei den kleinsten Lichtstärken geltend, und muss für Violett am kleinsten genommen werden. Bei grossen Lichtstärken wird sie einflusslos.

Ueber die Blendungsfunction F_h lehren die Versuche von A. König und Brodhun, dass, wenn man zwei Mischungen von höherer Lichtintensität aus den Grundfarben x, y, z hergestellt hat, welche beide gleich hell sind: gleich deutliche Unterschiede der beiden Empfindungsstärken auch gleichen kleinen Bruchtheilen der Lichtmengen entsprechen, und dass sie sowohl gleich hell bleiben, als auch gleiche Unterschiedsempfindlichkeiten zu zeigen fortfahren, wenn man beide Lichtmengen in gleichen Verhältnissen vergrössert.

Daraus folgt, dass das F_h in allen Fällen dieselbe Function einer homogenen Function der x, y, z sein muss. Für die erste



Annäherung genügt eine lineare Function, so weit bisher die Messungen gehen.[1]) Also setzen wir

$$\left.\begin{aligned} dE_1 &= \frac{k \,.\, dx}{(\alpha + x)\,[1 + lx + my + nz]} \\ dE_2 &= \frac{k \,.\, dy}{(\beta + y)\,[1 + lx + my + nz]} \cdots\cdots \\ dE_3 &= \frac{k \,.\, dz}{(\gamma + z)\,[1 + lx + my + nz]} \end{aligned}\right\} \quad (2).$$

Hierin müssen l, m, n verhältnissmässig kleine Grössen sein, welche erst bei hohen Werthen der mit ihnen multiplicirten x, y und z Einfluss gewinnen. Andrerseits müssen lx, my und nz gleich helle Quanta der drei Grundfarben bedeuten. Denn für jede der drei Grundfarben müssen bei gleicher Helligkeit gleiche Werthe der Empfindlichkeit dE gleichen Brüchen $dx \,/\, x$ u. s. w. entsprechen, was in der That der Fall ist, wenn gleiche Werthe von lx, my und nz gleichen Helligkeiten entsprechen bei 21
hinreichend hohen Graden der Helligkeit.

Es sind hiernach die Blendungscoëfficienten l, m, n diejenigen Grössen, welche die Lichteinheiten gleicher Helligkeit von sehr unähnlichen Farben bestimmen.

Nebenbei erwähne ich hier, dass mich dieses Verhältniss veranlasst die Definition der Helligkeit so aufzustellen: Gleich hell sind differente Farben, welche gleiche Blendung und gleiche Unterschiedsempfindlichkeit haben. Letztere entscheidet namentlich bei niederen Lichtstärken, wo die Blendung aufhört.

Auf Feldern von gleicher Unterschiedsempfindlichkeit kann man zarte Schatten, von Modulirung der Oberfläche herrührend, und kleine Objecte gleich gut unterscheiden. Man kann gleich viel auf ihnen sehend erkennen, und das ist es eigentlich, was wir von gleicher Helligkeit verlangen.

---

[1]) S. Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane, Bd. I, S. 15 ff. Abgedruckt auf S. 404 ff. des vorliegenden Bandes.

Gesetz der Intensitätsabstufungen abgeleitet.

Wenn wir eine zusammengesetzte Farbe in ihrer Lichtstärke ändern, steigern wir alle ihre Bestandtheile um denselben Bruchtheil $d\varepsilon$, und wir haben also zu setzen

$$dx = x \, . \, d\varepsilon, \qquad dy = y \, . \, d\varepsilon, \qquad dz = z \, . \, d\varepsilon.$$

Dann wird nach unserer Grundformel

$$dE = \frac{k \, . \, d\varepsilon}{1 + lx + my + nz} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{1 + \frac{a}{x}}\right)^2 + \left(\frac{1}{1 + \frac{b}{y}}\right)^2 + \left(\frac{1}{1 + \frac{c}{z}}\right)^2} \, .$$

Bei hinreichend hohen Werthen der Lichtstärken, wo die Brüche

$$\frac{a}{x}, \ \frac{b}{y} \text{ und } \frac{c}{z}$$

verschwinden, wird dies

$$dE = \frac{k \, . \, d\varepsilon}{1 + lx + my + nz} \sqrt{3}$$

den Versuchen bei hohen Lichtstärken entsprechend.

Bei niederen Lichtstärken dagegen werden die vernachlässigten Brüche Einfluss gewinnen, die Empfindlichkeit ver-
22 kleinern, und diejenige Farbe wird bei geringsten Helligkeiten überwiegenden Einfluss behalten, für welche die entsprechende Constante a, b oder c den kleinsten Werth hat. Das ist der Erfahrung gemäss Violett oder Blau.

Der die Blendung ausdrückende Factor zeigt durch seine Form schon ein Zusammenwirken der physiologischen Processe an, die den Grundfarben entsprechen. Aber dies ist nicht nothwendig ein neues Empfindungselement in den Nerven, sondern könnte auch auf einem zu starken Verbrauch der Blutbestandtheile durch die gereizten Nerven beruhen, wodurch auch den örtlich zwischengelagerten, nicht gereizten Nervengebilden das Nahrungsmaterial entzogen wird, eine Hypothese derjenigen ähnlich, die Hr. H. Ebbinghaus für Erklärung des Helligkeitscontrastes gebildet.

Uebrigens fühlt man die Blendung ja auch als Schmerz, vielleicht herrührend von Iriskrampf oder Gefässkrampf, und die Reflexwirkung in der Iris ist ein Zeichen weiter sich ver

breitender Innervationen. Aber hierbei addiren sich auch wie bei der Blendung Wirkungen auf verschiedene Stellen der Netzhaut, die im Gesichtsbilde getrennt bleiben.

Aehnlichste Farben.

Wenn wir dieses Gesetz zunächst anwenden auf nur zwei Grundfarben, deren Quanta wir mit x und y bezeichnen, und uns zunächst beschränken auf Lichtstärken, die innerhalb des Geltungsbereiches von **Fechner's** Gesetz liegen, so wird

$$dE_1 = k \cdot \frac{dx}{x}$$

$$dE_2 = k \cdot \frac{dy}{y}$$

also
$$dE = k \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{x}\right)^2 + \left(\frac{dy}{y}\right)^2}$$

Wenn wir nun eine der beiden Farben als fest gegeben betrachten und zwar so, dass wir setzen

für die erste $\quad x = r \cdot p$

$\quad y = r \cdot (1 - p),$

für die zweite $\quad x = (r + dr)\ (p + dp)$ 23

$\quad y = (r + dr)\ (1 - p - dp)$

und wir annehmen, dass bei beiden das Verhältniss der Mischung, also sowohl p, wie $(p + dp)$ unverändert bleibe, so ist

$$dE^2 = k^2 \left[\frac{(pdr + r\,.\,dp)^2}{p^2\,r^2} + \frac{[(1-p)\,dr - r\,.\,dp]^2}{(1-p)^2\,.\,r^2}\right]$$

oder

$$dE^2 = k^2 \left\{\left(\frac{dr}{r} + \frac{dp}{p}\right)^2 + \left(\frac{dr}{r} - \frac{dp}{1-p}\right)^2\right\}$$

Die Grösse von dE^2 kann, wenn dp, d. h. der Farbenton unverändert bleibt, doch noch geändert werden, wenn man dr, d. h. die Intensität der zweiten Farbe, ändert. Ein Minimum wird dE^2, d. h. die beiden Farbenmischungen werden am ähnlichsten, bei Aenderung von dr allein, wenn

$$2\,\frac{dr}{r} + \frac{dp}{p} - \frac{dp}{1-p} = 0$$

oder

$$\log\left\{r^2\,.\,p\,.\,(1-p)\right\} = \log\,(x\,.\,y) = \text{Const.} \ldots \quad (2\text{a})$$

Setzen wir diesen Werth von dr in den Werth von dE^2, und bezeichnen wir dieses Minimum mit $dE_0{}^2$, so erhalten wir

$$dE_0{}^2 = \frac{k^2}{2}\left[\frac{dp}{1-p} + \frac{dp}{p}\right]^2$$

$$= \frac{k^2}{2}\left[d \log\left(\frac{x}{y}\right)\right]^2 \ldots\ldots\ldots \quad (2b)$$

In diesem letzteren Ausdruck ist wichtig, dass der gefundene Werth der Empfindlichkeit unabhängig von den Maasseinheiten ist, nach denen man x und y misst. Denn wenn nach einem andern Maass gemessen y durch ny zu ersetzen wäre, so wäre

$$\log\left(\frac{x}{ny}\right) = \log\left(\frac{x}{y}\right) - \log n$$

und da n eine Constante:

$$d \log\left(\frac{x}{ny}\right) = d \log\left(\frac{x}{y}\right).$$

24 Wenn wir in einem rechtwinkeligen Coordinatensystem die Quanta der Farbe x als Ordinaten und die Quanta von y als Abscissen auftragen, so stellt die Gleichung (2a) eine Curve dar, in der die Farben kleinsten Unterschiedes neben einander liegen. Diese Curve ist eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten in der Entfernung sich den Coordinataxen anschliessen. Es ist dies in Uebereinstimmung mit den oben beschriebenen Versuchen am Farbenkreisel. Dagegen würden die aus x und y auf dem Farbenkreisel gebildeten Mischfarben in einer geraden Linie liegen. Zu diesen letzteren gehören auch die bei Vergleichung sehr unterschiedener Farben von Brodhun, beziehlich von Hrn. E. Hering für gleich hell geschätzten Farben, soweit nicht Purkinje's Phänomen in Betracht kommt.

Correctionen wegen der Abweichungen von Fechner's Gesetz.

Wenn wir die kleinen Abweichungen von Fechner's Gesetz berücksichtigen wollen, so müssen wir für dE_1 und dE_2 die oben in den Gleichungen (2) angegebenen Werthe nehmen,

können aber für den gegenwärtigen Zweck den auf die Blendung bezüglichen Factor vernachlässigen, indem wir ihn gleich Eins setzen.

Erkennbarkeit von Farbenstufen.

Da bei Berechnung der Brodhun'schen Versuche die Werthe der wahrnehmbaren Unterschiedsstufen bis zu sehr kleinen Lichtstärken hin gebraucht werden, so will ich hier noch die allgemeinsten Grundlagen der Rechnung entwickeln, ohne eine der bisher vorgeschlagenen Annäherungsformeln zu Grunde zu legen; ich beschränke mich dabei aber auf das dichromatische Auge. Die Uebertragung auf das trichromatische lässt sich indessen auch, ohne dass neue Principien in Frage kommen, theoretisch durchführen.

Ich will, wie früher, die Lichtstärken zweier Grundfarben mit x und y bezeichnen, und es sei X eine Function von x, Y eine solche von y, so gewählt, dass die Werthe der Unterschiedsschwellen

$$\left.\begin{aligned} dE_x &= \frac{dx}{x} \cdot X \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ dE_y &= \frac{dy}{y} \cdot Y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

seien. Diese Werthe X und Y sind also solche, welche inner- 25
halb des normalen Gebiets des Fechner'schen Gesetzes fast constant sind, für sehr kleine und sehr grosse Lichtstärken aber steigen.

Zunächst wollen wir die Quanta der Endfarben des Spectrum, ξ und η, welche in Brodhun's Mischungsversuchen die Elemente der Mischung bildeten, nach Newton's Gesetz durch die ihnen zu Grunde liegenden Grundfarben ausdrücken, welche letzteren wir nach Helligkeitswerthen gemessen denken. Dann würden erstere, nach eben solchen Einheiten gemessen, darzustellen sein durch

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (1 + a) \,.\, x - ay \quad \ldots\ldots \\ \eta &= -\beta \,.\, x + (1 + \beta) \,.\, y \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

oder, wenn wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \frac{\alpha}{1+\alpha+\beta} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta' &= \frac{\beta}{1+\alpha+\beta}, \;\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (4a)$$

ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(1+\beta)\,\xi + \alpha\eta}{1+\alpha+\beta} = (1-\alpha')\,\xi + \alpha'\,\eta \;\ldots \\ y &= \frac{(1+\alpha)\,\eta + \beta\xi}{1+\alpha+\beta} = (1-\beta')\,\eta + \beta'\,\xi \;\ldots \end{aligned}\right\} \quad (4b)$$

Wenn wir nun die Quanta ξ und η durch eine Variable P, die das Mischungsverhältniss wie bisher ergiebt, und durch einen die Lichtstärke bestimmenden Factor R ausdrücken, also setzen

$$\xi = R \,.\, P \text{ und } \eta = R\,(1-P),$$

so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} x &= R\,[(1-2\alpha')\,P + \alpha'] \;\ldots\ldots\ldots \\ y &= R\,[(1-2\beta')\,(1-P) + \beta'] \;\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (4c)$$

Für die zweite zu vergleichende Farbe setzen wir statt R und P beziehlich $(R+\varrho)$ $(P+\omega)$. Dann wird nach unserer Hypothese der Empfindungsunterschied an der Grenze zu setzen sein, gleich:

$$dE^2 = X^2 \left\{\frac{[(1-2\alpha')\,P+\alpha']\,\varrho + R\,(1-2\alpha')\,\omega}{R\,[(1-2\alpha')\,P+\alpha']}\right\}^2$$
$$+\; Y^2 \left\{\frac{[(1-2\beta')\,(1-P)+\beta']\,\varrho - R\,(1-2\beta')\,\omega}{R\,[(1-2\beta')\,(1-P)+\beta']}\right\}^2$$

26 Darin setze ferner zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha'}{1-2\alpha'} &= \frac{\alpha}{1-\alpha+\beta} = a \;\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\beta'}{1-2\beta'} &= \frac{\beta}{1+\alpha-\beta} = b \;\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (4d)$$

Dann ergiebt sich

$$dE^2 = X^2 \left\{\frac{\varrho}{R} + \frac{\omega}{P+a}\right\}^2 + Y^2 \left\{\frac{\varrho}{R} - \frac{\omega}{1-P+b}\right\}^2 \ldots \quad (5)$$

Wenn wir ω, also die Mischung der zweiten Farbe, constant

lassen und nur ϱ, d. h. ihre Lichtstärke ändern, ist die Bedingung des Minimum

$$0 = \frac{\varrho}{R}\left[X^2 + Y^2\right] + \omega\left[\frac{X^2}{P+a} - \frac{Y^2}{1-P+b}\right] \dots \quad (6)$$

und der Betrag des Minimum dE_0

$$dE_0^2 = \frac{\varrho\omega}{R}\left\{\frac{X^2}{P+a} - \frac{Y^2}{1-P+b}\right\} + \omega^2\left\{\frac{X^2}{(P+a)^2} + \frac{Y^2}{(1-P+b)^2}\right\} \quad (6a)$$

was durch Einsetzung des Werthes von ϱ / R aus Gleichung (6) sich verwandelt in

$$dE_0 = -\frac{\omega \,.\, XY}{\sqrt{X^2+Y^2}} \cdot \left[\frac{1}{P+a} + \frac{1}{1-P+b}\right] \dots \quad (6b)$$

oder

$$\omega = \frac{dE_0}{1+b+a} \cdot \sqrt{\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2}} \cdot (P+a)(1-P+b) \quad (6c)$$

Die Werthe der Functionen X und Y werden in unserem Falle am besten durch Interpolation aus den von König und Brodhun beobachteten Werthen bestimmt, da wir zum Theil dabei zu sehr kleinen Lichtintensitäten herabgehen müssen, für welche die bisher gegebenen empirischen Formeln nicht sicher genügen. Es tritt nur die Schwierigkeit ein, dass der Werth der gemeinsamen Helligkeit, bei welcher die beiden Farben verglichen worden sind, nicht angegeben ist, und also nicht sicher auf die in der Untersuchung von König und Brodhun über die Unterschiedsschwellen angewendeten Lichteinheiten gleicher Helligkeit 27
reducirt werden kann, vielleicht auch nicht einmal durchgängig derselbe gewesen ist. Nur der Umstand, dass die Autoren keine auffallende Abhängigkeit der Unterschiedsempfindlichkeit von der Lichtstärke gefunden haben, lässt darauf schliessen, dass im Allgemeinen die genannte Lichtstärke höher als 100 ihrer Scala gewesen ist. Diesen Werth habe ich weiter unten in der Rechnung angenommen. Erhebliche Unterschiede in den Resultaten erhält man übrigens nicht, selbst wenn man sie zwischen 200 und 50 jener Scala variirt.

In der citirten Abhandlung ist die objective Lichtstärke der dunkleren Fläche in Einheiten gleicher Helligkeit mit r bezeichnet, die Unterschiedsschwelle für den kleinsten sichtbar werdenden Unterschied mit dr. Gegeben sind daselbst die Werthe von r, dr und berechnet auch

$$\frac{dr}{r + dr}.$$

Das von mir im folgenden gebrauchte dr / r ist nach König's Bezeichnung zu schreiben

$$\frac{1}{2}\, dr \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r + dr}\right].$$

Ich behalte die Bezeichnung dr für die nach König und Brodhun's Methode gefundenen Schwellen bei Intensitätsvergleichungen, dagegen δr für die Werthe der mittleren Fehler bei Vergleichungen des Farbentons, und setze $k \,.\, \delta r = dr$. Dementsprechend bezeichnen wir auch die in beiden Beobachtungsreihen entsprechenden Empfindungsschwellen mit dE und δE und betrachten dE als Einheit der Empfindungsschwelle. Dann ist

$$1 = X \cdot \frac{dx}{x}$$

$$1 = Y \cdot \frac{dy}{y}$$

und danach sind X und Y aus den Beobachtungen zu berechnen.

Der Factor k ist nothwendig grösser als 1, weil sich die dr auf Beobachtungen beziehen, bei denen der Unterschied in 10 Fällen nie übersehen ist, die δr aber sich auf den mittleren Fehler beziehen, der überhaupt nicht mehr gesehen wurde. Damit
28 es wahrscheinlicher wird, dass in 10 Fällen die Differenz nie übersehen wird, als dass dies einmal geschieht, müsste, wie schon oben erwähnt, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$k > 1{,}8238$$

sein.

Der Werth der Constanten b hat fast gar keinen Einfluss auf das Resultat. Ich habe für sie den von König und Dieterici

aus der Vergleichung dichromatischer und trichromatischer Augen hergeleiteten Werth 0,1 in Farbenwerth oder $a = 1/260$ in Helligkeitswerth angesetzt. Durch passende Wahl von b kann man unwahrscheinlich grosse Werthe der Empfindlichkeit am rothen Ende in die Reihe der übrigen bringen. Der dazu erforderliche Werth ist sehr klein

$$a = 0{,}00065.$$

Es zeigte sich schliesslich mit Berücksichtigung aller Correctionen, dass die Genauigkeit von Hrn. Brodhun's Messungen zwar hinreicht, einen zuverlässig erscheinenden Mittelwerth zu geben, aber nicht um einen regelmässigen Gang der einzelnen Werthe längs des Spectrum zu sichern. Namentlich ist zwischen $\lambda = 510\ \mu\mu$ und $500\ \mu\mu$ ein Sprung, der sich bei allen Arten von Formeln und Curvenconstructionen bemerkbar machte.

Tabelle IV.

Wellenlänge	$\frac{\delta P}{1-P+\alpha'}$	$\frac{\delta P}{P+\beta'}$	Summe beider $= \sigma$	X	Y	$\sqrt{\frac{1}{X^2}+\frac{1}{Y^2}} = s$	$\frac{s}{\sigma}$
550	0,1017	0,00013	0,1018	0,0267	0,1435	0,1460	1,4
540	0,1074	0,00016	0,1075	0,0267	0,1283	0,1310	1,2
530	0,0732	0,00023	0,0734	0,0267	0,1129	0,1160	1,6
520	0,0407	0,00029	0,0410	0,0268	0,0869	0,0909	2,2
510	0,0286	0,00054	0,0291	0,0268	0,0701	0,0750	2,6
500	0,0137	0,00058	0,0143	0,0271	0,0515	0,0618	(4,3)
490	0,0154	0,00187	0,0173	0,0278	0,0431	0,0513	3,0
480	0,0227	0,00841	0,0311	0,0297	0,0378	0,0481	1,5
470	0,0351	0,0435	0,0786	0,0343	0,0328	0,0469	(0,6)
						Mittel	(2,05)
						oder	1,93

Die Grösse s/σ in der letzten Columne dieser Tabelle sollte 29
constant sein und den Werth $k = 1{,}82$ haben, wenn die Beobachtungen der oben aufgestellten Hypothese, die zur Gleichung (6b) geführt hat, genau entsprächen. Die stark aus der Reihe der übrigen fallenden Zahlen, welche ich eingeklammert habe,

entsprechen Stellen, in denen die Interpolationsrechnung, durch welche der Differentialquotient $dP : d\lambda$ zu suchen war, unsicher wurde. Im Allgemeinen konnte ich aus je zwei Paaren benachbarter Intervalle den Werth jenes Differentialquotienten berechnen, nur nicht für $\lambda = 470$ $\mu\mu$, wo die Beobachtungen über Mischung der beiden Farben abbrechen. So bleibt die dort gefundene Zahl ohne Controlle, und bei 500 $\mu\mu$ war eine verhältnissmässig grosse Abweichung zwischen den beiden interpolirten Zahlen, welche auf eine Unregelmässigkeit im Verlauf der Curven hindeutet, die durch die hier wirkende Absorption des gelben Flecks der Netzhaut bedingt sein mag.

Wenn sich herausstellen sollte, dass die starke Abweichung bei 470 $\mu\mu$ nicht auf einem Fehler beruht, so würde sogar eine ganz abweichende Hypothese in Frage kommen können, nämlich, ob nicht immer nur die deutlichste Empfindung wirkt, und was unter der Schwelle bleibt, gar nicht in Betracht kommt. In sämmtlichen andern Beobachtungen bleibt nämlich der eine Eindruck sicher unter der Schwelle.

Ich habe schliesslich das Mittel der Zahlen für s / σ gegeben, einmal eingeklammert mit Einschluss der eingeklammerten Einzelwerthe, einmal frei ohne dieselben. Beide Zahlen schliessen sich hinreichend nahe an die theoretisch geforderte Zahl $k = 1{,}82$ an, dass dies in der That unsere Hypothese von der Unabhängigkeit der Empfindungsunterschiede der einzelnen Grundempfindungen von einander zu bestätigen geeignet ist.

Dies zeigt zugleich einen Weg an, auf dem es möglich erscheint, zu einer sicheren Bestimmung der Grundempfindungen zu gelangen. In den uns vorliegenden Beobachtungen von Brodhun kommen wir nur der einen (warmen) Grundempfindung des dichromatischen Auges sehr nahe. Diese kann sich nur sehr wenig von der Farbenempfindung des äussersten Roth des Spectrum unterscheiden, höchstens noch ein wenig gesättigter sein als letztere.

Dass die bisher vorliegenden Beobachtungen noch nicht besser übereinstimmende Resultate geben, erklärt sich daraus, dass die dabei concurrirenden Messungen zu verschiedenen Zeiten, zu andern unabhängigen Zwecken und mit verschiedenen Instrumenten angestellt worden sind, wobei sich mancherlei

Umrechnungen der Zahlen und Interpolationen einschoben. Aussichtsreicher erscheint es mir, den directen Weg einzuschlagen und die Unterschiedsempfindlichkeiten von Mischungen theils der Endfarben des Spectrum, theils dieser mit Grün zu untersuchen.

Das trichromatische Auge habe ich vorläufig noch nicht berücksichtigt, da die bisher dafür gegebenen Daten noch unsicherer und unvollständiger sind als für das dichromatische, und zu hoffen ist, dass man mit geringerer Mühe durch neue Versuche, als durch die hier noch weitläufigeren Rechnungen Resultate wird erlangen können.

Zum Schlusse möchte ich noch bemerken, dass die hier gegebenen Formeln für die kleinsten Unterschiede auch ergeben:

1) dass die Unterschiede der Farben bei sehr geringer Intensität ihres Lichtes verschwinden müssen;
2) dass sie auch bei sehr hoher Intensität verschwinden, wenn man den die Blendung ausdrückenden Factor berücksichtigt;
3) dass die Linien kleinsten Farbenunterschiedes (kürzeste Linien im Farbenfelde), die von einer gegebenen Farbe zum Nullpunkte des objectiven Lichts zu ziehen sind, nicht den Linien gleicher Mischung folgen, und dass also zwischen Farben einerseits grosser, andererseits kleiner Helligkeit nicht immer die von gleichen Mischungsverhältnissen einander am ähnlichsten sehen werden.

CXXXII.

Versuch, das psychophysische Gesetz auf die Farbenunterschiede trichromatischer Augen anzuwenden.

Aus
„Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane".
Bd. III. S. 1—20 u. S. 517. 1891.

1 Ich habe im zweiten Bande dieser Zeitschrift[1]) versucht, eine erweiterte Form des psychophysischen Gesetzes anzugeben, in der es auf Mannigfaltigkeiten von mehr als einer Dimension anwendbar erscheint. Eine solche liegt im Farbensystem vor, indem die messende Bestimmung der Art einer Farbenempfindung bei dichromatischen Augen durch zwei unabhängige Variable, bei den häufiger vorkommenden trichromatischen Augen sogar erst durch drei Variable zu gewinnen ist. In dem bezeichneten Aufsatze sind die Folgerungen, welche aus der Hypothese fliessen, mit den Beobachtungsthatsachen zunächst nur so weit verglichen worden, als sie sich auf die Bestimmungen der kleinsten wahrnehmbaren Helligkeitsunterschiede bei verschiedenen Farben und auf die kleinsten wahrnehmbaren Farbenunterschiede für ein dichromatisches Auge beziehen. Die Rechnung für ein solches Auge ist natürlich viel einfacher, wenigstens, wenn man dabei die gewöhnlich bisher gemachte

---

[1]) H. v. Helmholtz: *Versuch einer erweiterten Anwendung des Fechner'schen Gesetzes im Farbensystem.* Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane. Bd. II, S. 1. 1891. Abgedruckt auf S. 407 des vorliegenden Bandes.

Annahme zu Grunde legt, dass darin eine der Grundempfindungen der Trichromaten überhaupt nicht zu Stande kommt, sondern gänzlich fehlt. Die auf diese Annahme und unsere oben bezeichnete Hypothese gegründete Rechnung stimmte nicht gerade besonders genau mit den Beobachtungen überein, aber doch immerhin genügend, dass man die stehenbleibenden Differenzen sich aus den Ungenauigkeiten der ursprünglich
zu verschiedenen unabhängigen Zwecken angestellten Beobach- 2
tungen, aus der Unsicherheit der sie ergänzenden Interpolationsrechnungen und der Unbestimmtheit des angewendeten Helligkeitsgrades erklären konnte.

Nun würde die von mir formulirte hypothetische Erweiterung des psychophysischen Gesetzes, wenn sie sich durchgängig bewährt, Eines für die Theorie der Farbenempfindungen leisten können, wozu bisher noch gar kein sicherer Anhalt gegeben war, nämlich die Feststellung der wirklichen drei physiologisch einfachen Farbenempfindungen.

Es ist bekannt, dass Newton's Farbenmischungsgesetz die ganze Mannigfaltigkeit der möglichen Farbenempfindungen zwar auf drei nebeneinander bestehende Erregungsweisen des Sehnervenapparates zurückzuführen erlaubt, aber ganz oder fast ganz unbestimmt lässt, welche Farbenempfindungen diesen drei elementaren Erregungen entsprechen. Denken wir uns nach Newton's Regel die Spectralfarben und ihre Mischungen in eine Farbentafel eingetragen, so würden die Orte der drei Grundfarben in der Young'schen Theorie nur der einzigen Beschränkung unterliegen, dass das zwischen ihnen construirte Dreieck sämmtliche Spectralfarben in sich fassen muss; wenn wir dagegen mit Hrn. E. Hering negative Erregungswerthe zulassen wollten, würden gar keine Beschränkungen in der Wahl der drei Urempfindungen gegeben sein.

Dieses Problem erschien mir wichtig genug, um seine Lösung, so gut es eben mit den bisher vorliegenden, in vieler Beziehung unzureichenden Beobachtungen angeht, zu versuchen, auch wenn man nur hoffen durfte, eine vorläufige angenäherte Lösung zu erhalten. Gleichzeitig wird sich ja dabei zeigen müssen, ob auch die Beobachtungen über die Farbenempfindlichkeit des trichromatischen Auges sich so weit unserer psycho-

physischen Hypothese fügen, als es bei den bestehenden Fehlergrenzen der Beobachtungen zu erwarten ist.

In letzterer Beziehung erinnere ich hier zunächst an die zur Zeit noch bestehenden Unzulänglichkeiten der Beobachtungen. Grosse Genauigkeit ist überhaupt bei allen Messungen der Grenze, wo irgend eine Erscheinung noch wahrnehmbar ist, ehe sie ganz verschwindet, der Regel nach nicht zu erreichen. Hier handelt es sich um die Wahrnehmung des Farbenunterschiedes benachbarter Spectralfarben. Dabei, wie in fast allen
3 ähnlichen Fällen, spielen allerlei uncontrollirbare Abänderungen in dem Zustande unserer Nervenapparate und psychischen Thätigkeiten mit, welche sich schliesslich in dem abweichenden Gange der Messungsergebnisse zu erkennen geben.

Die Vergleichungen des Farbentons sind zwar in den letzten Messungsreihen der Hrn. A. König und E. Brodhun[1]) zwischen gleich hell erscheinenden Farben durchgeführt worden, und wir dürfen wohl annehmen, dass sie sich zu diesem Zwecke die günstigsten Helligkeiten herzustellen gesucht haben. Solche würden in den Gültigkeitsbereich des normalen Fechner'schen Gesetzes fallen, wo die wahrnehmbaren Helligkeitsstufen der absoluten Lichtstärke proportional sind. Aber selbst, wenn sie dies für die sämmtlichen Spectralfarben haben einhalten können, ist es fraglich, ob nicht Abweichungen von dieser einfachsten Form des Fechner'schen Gesetzes da eintreten konnten, wo einer oder zwei der elementaren Farbeneindrücke in der Gesammtfarbe sehr schwach vertreten waren, z. B. bei sehr gesättigten Farben, deren schwache andersfarbige Einmischungen den Farbenunterschied bedingen. Hier konnten sich die Abweichungen von dem genannten Gesetz geltend machen, welche bei geringen Helligkeiten eintreten. In der That werden wir Abweichungen dieser Art zwischen Rechnung und Beobachtung begegnen. Wären Angaben über die absoluten Lichtstärken der verglichenen farbigen Felder gegeben

[1]) E. Brodhun: *Verhandl. der physiol. Gesellschaft zu Berlin*, 1885—1886. Nr. 17 und 18. — Eine ausführlichere Mittheilung über diese Beobachtungsreihen befindet sich auf S. 97 des III. Bandes der Zeitschrift für Psychologie.

worden, so würden wir die von dem genannten Umstand bedingte grössere Unempfindlichkeit gegen die betreffenden Farbenunterschiede berechnen können; sehr gross können allerdings diese Abweichungen unter den Verhältnissen des Farbendreiecks, die wir finden werden, nicht sein, da fast alle Spectralfarben sich als stark gemischt aus den Grundfarben ergeben werden.

Die Zahlenwerthe, welche die thatsächliche Unterlage für die bezeichnete Rechnung bilden, sind bei verschiedenen, von einander unabhängigen Untersuchungen gewonnen worden, die ohne Rücksicht auf den gegenwärtig vorliegenden Zweck durchgeführt wurden. Wäre letzteres der Fall gewesen, so hätten einige Erleichterungen der Rechnung und eine wesentliche Sicherung ihrer Genauigkeit eintreten können. Namentlich 4
wird die Rechnung erschwert und die Genauigkeit der Ergebnisse beeinträchtigt dadurch, dass die Bestimmungen der Mischungsverhältnisse der Farben einerseits und die Bestimmungen der Sehschärfe für Farbenunterschiede andererseits nicht durchgängig für dieselben Wellenlängen gemacht sind, so dass die Zahlen für die Mischungsverhältnisse, die in der Rechnung gebraucht werden, zum Theil schon durch Interpolation gefunden werden mussten. Vollends konnten die gleichzeitig gebrauchten Werthe der nach den Wellenlängen genommenen Differentialquotienten der Farbenwerthe im Spectrum überhaupt nur durch Interpolation gefunden werden, und gerade an einigen Stellen, wo diese Differentialquotienten sich sehr schnell ändern, wären engere Intervalle für die Beobachtungen höchst wünschenswerth.

Da die von Hrn. A. König gefundenen Zahlen, welche selbst schon die Umrechnung von dem prismatischen Spectrum des Gaslichtes auf das Interferenzspectrum des Sonnenlichtes mit Hülfe einer empirischen Formel erlitten hatten, unverkennbare kleine Unregelmässigkeiten der nach ihnen construirten Intensitätscurven der Elementarfarben erkennen liessen, schien es am besten, eine graphische Interpolation zu Grunde zu legen, wie eine solche übrigens der genannte Autor in den von ihm und C. Dieterici veröffentlichten Curven selbst angewendet hat. Diese Interpolation ist von Hrn. Dr. Sell, der

den grössten Theil der höchst langwierigen Rechnungen durchgeführt hat, gemacht worden, und zwar zu einer Zeit, wo weder er noch ich übersehen konnten, welchen Einfluss auf die erhofften Rechnungsergebnisse die Führung der Curve haben würde.

Für 18 Wellenlängen lagen ausreichende Beobachtungen vor. Wenn man annehmen durfte, dass durchgängig die einfache erste Form des Fechner'schen Gesetzes als gültig betrachtet werden durfte, waren sechs Parameter zu suchen, mit deren Hülfe sich für alle diese Wellenlängen nahehin gleiche Werthe für das Maass der Empfindlichkeit des Auges hätten ergeben müssen. Die Gleichungen, aus denen die Parameter gefunden werden mussten, waren sechsten Grades nach jedem von ihnen, also nur durch allmähliche Annäherungsrechnungen lösbar. Es liessen sich jedoch Regeln über den Sinn der Aenderungen der Werthe der Empfindlichkeit für die einzelnen
5 Wellenlängen bei Aenderungen der einzelnen Parameter finden, welche als Leitfaden für die Rechnungen dienen konnten.

Die Rechnung konnte schliesslich überhaupt nur so weit fortgesetzt werden, bis die übrigbleibenden Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung keinen regelmässigen Gang mehr erkennen liessen, oder wenigstens keinen, der sich nicht schon aus den bekannten Abweichungen vom Fechner'schen Gesetze hätte erklären lassen. Die grosse Arbeit, welche es gemacht hätte, die Differenzen durch Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate noch zu verkleinern, schien mir gegenüber der ungenügenden Genauigkeit der zu Grunde liegenden Beobachtungen, welche künftig unschwer werden verbessert werden können, nicht gerechtfertigt.

Da diese Untersuchung einen Zusammenhang nachzuweisen sucht zwischen Grössen, für die ein solcher bisher durchaus nicht bekannt war, und die, wenn die von uns vorausgesetzte Abhängigkeit oder eine analoge zwischen ihnen nicht bestände, ebensogut im Verhältnisse von 1 : 100 oder 1 : 1000 hätten stehen können, statt einander annähernd gleich zu sein, so wird es immerhin als ein vorläufiges Resultat zu betrachten sein, wenn dieselben, trotz aller besprochenen ungünstigen Verhältnisse, nur im Verhältniss von 1 : 2,2 von ihrem Mittelwerthe abweichen.

Berechnungsweise. In meinem früheren Aufsatz habe ich die Rechnung nur für das dichromatische Auge durchgeführt. Sie muss also hier zunächst auf das trichromatische Auge erweitert werden.

Ich benutze dieselben Bezeichnungen, wie früher. Es sei wieder dE die Deutlichkeit eines sehr kleinen Unterschiedes einer zusammengesetzten Empfindung, die entsprechenden Deutlichkeitsgrade der Einzelempfindungen seien dE_1, dE_2 und dE_3. Ich folge weiter der dort aufgestellten und motivirten Hypothese, dass

$$dE^2 = dE_1^2 + dE_2^2 + dE_3^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

sei.

Für die hier durchzuführende Rechnung begnügen wir uns, wie schon bemerkt, mit der einfachsten Form des Fechnerschen Gesetzes und setzen demnach:

$$\left.\begin{aligned} dE_1 &= k \,.\, \frac{dx}{x} \\ dE_2 &= k \,.\, \frac{dy}{y} \\ dE_3 &= k \,.\, \frac{dz}{z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Es ergiebt sich also

$$dE = k \,.\, \sqrt{\left(\frac{dx}{x}\right)^2 + \left(\frac{dy}{y}\right)^2 + \left(\frac{dz}{z}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad (2a)$$

Um die Wahrnehmbarkeit der Farbenabstufungen auf die der Helligkeitsabstufungen zurückzuführen, wenden wir diese Gleichung zunächst auf den Fall an, wo nur die Lichtstärken zweier Farben gleicher Qualität verglichen werden, also die Intensitäten aller drei Grundfarben in der einen Lichtmenge die in der anderen um einen gleichen Bruchtheil übertreffen. Wir setzen daher

$$dx = \varepsilon \,.\, x, \quad dy = \varepsilon \,.\, y, \quad dz = \varepsilon \,.\, z,$$

worin ε einen kleinen ächten Bruch bezeichnet. Dies ergiebt

$$dE = k \,.\, \varepsilon \,.\, \sqrt{3} = k \,.\, \varepsilon \,.\, 1{,}7320 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Der Werth von k ist, wie ich schon in meinem vorigen Aufsatze erwähnt habe, je nach der Methode der Beobachtung verschieden gross zu nehmen. Ich habe dort schon erwähnt, dass der aus den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung hergeleitete theoretische Werth von k bei solchen Beobachtungen, wo man ε als den mittleren Fehler bestimmt hat, 1,8238 mal so gross zu nehmen ist, als wenn ε den kleinsten Fehler bedeutet, den man in 10 Fällen immer noch wahrnehmen konnte.

Ersteres ist bei König's und Brodhun's Messungen der Empfindlichkeit für Farbenunterschiede, letzteres bei denen der beiden genannten Beobachter für Helligkeitsstufen geschehen.

Den[1]) ersten, grössern dieser Werthe von k wollen wir mit k', den zweiten kleinern mit k'' bezeichnen; dann ist also

$$k' = 1{,}8238 \cdot k''.$$

In einer Arbeit von Hrn. Uhthoff[2]) ist das Verhältniss
7 von k' / k'' empirisch bestimmt. Es schwankt zwischen den Werthen 1,25 und 2,44 und beträgt im Mittel 2,025, was mit der theoretischen Ableitung des Werthes ausreichend stimmt.

Bestimmung ähnlichster Farbenpaare. Wenn wir ein Paar zusammengesetzter Farben haben, von denen die eine die Quanta der Grundfarben x, y, z enthält, die andere die wenig davon verschiedenen $(x + dx)$, $(y + dy)$, $(z + dx)$, und die Lichtstärke der ersten Farbe gesteigert werden kann im Verhältniss $1 : (1 + \varepsilon)$, so dass ihre Componenten werden

$$x.(1 + \varepsilon), \quad y.(1 + \varepsilon), \quad z.(1 + \varepsilon),$$

so ist das Maass für den Empfindungsunterschied zwischen der zweiten und dritten dieser Farben

$$\frac{dE^2}{k^2} = \left(\frac{dx - \varepsilon x}{x}\right)^2 + \left(\frac{dy - \varepsilon y}{y}\right)^2 + \left(\frac{dx - \varepsilon z}{z}\right)^2.$$

---

[1]) Die Unterscheidung der beiden Werthe von k durch verschiedene Bezeichnung ist erst in dem vorliegenden Abdruck eingeführt und dem entsprechend sind einzelne Textänderungen vorgenommen worden (1894).

[2]) W. Uhthoff, Ueber die Unterschiedsempfindlichkeit des normalen Auges gegen Farbentöne im Spectrum. *Gräfe's Archiv.* Bd. XXXIV (4). pag. 14.

Bei veränderlichen Werthen von ε wird dies ein Minimum, wenn

$$0 = -2\left[\frac{dx - \varepsilon x}{x} + \frac{dy - \varepsilon y}{y} + \frac{dz - \varepsilon z}{z}\right]$$

oder

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 3\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

Und wenn wir dem ε diesen Werth geben, erhalten wir den Werth des Minimums von dE^2

$$\frac{dE^2}{k^2} = \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)^2 + \left(\frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}\right)^2 + \left(\frac{dz}{z} - \frac{dx}{x}\right)^2\right\}. \quad (3b)$$

$$\frac{dE}{k} =$$

$$\frac{\delta\lambda}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{d\lambda} - \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{d\lambda} - \frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{d\lambda} - \frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{d\lambda}\right)^2}.$$

Die x, y, z hängen nun mit den Elementarfarben R, G, V, welche zur Angabe des Farbenwerthes der verschiedenen Spectralfarben von den Hrn. A. König und C. Dieterici gebraucht sind, nach Newton's Gesetz durch lineare homogene
Gleichungen zusammen, deren Coëfficienten aber zunächst noch 8
unbekannt sind. Bezeichnen wir diese Werthe mit

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 . R + b_1 . G + c_1 . V \\ y &= a_2 . R + b_2 . G + c_2 . V \quad \ldots\ldots\ldots \\ z &= a_3 . R + b_3 . G + c_3 . V \end{aligned}\right\} (4)$$

so ist zunächst zu bemerken, dass je einem der Coëfficienten in jeder Horizontalreihe ein willkürlicher Werth gegeben werden kann, da

$$\frac{dx}{x}, \frac{dy}{y} \text{ und } \frac{dz}{z}$$

ihre Werthe nicht ändern, wenn jeder der Grössen, x, y, z ein willkürlicher constanter Factor hinzugefügt wird. Sonst ist

die Wahl der Coëfficienten im Sinne von Young's Theorie nur der einen Beschränkung unterworfen, dass die Werthe von R, G, V, welche den Spectralfarben angehören, keine negativen Werthe von x, y, z geben dürfen. Das wird nie der Fall sein können, wenn sämmtliche Coëfficienten a, b, c positive Werthe haben. Wenn aber negative Werthe vorkommen, wird man prüfen müssen, ob alle Spectralfarben positive x, y, z ergeben.

Uebrigens wird man von jedem System von Coëfficienten der $[x, y, z]$, was der letzteren Bedingung Genüge leistet, zu anderen der $[x_1, y_1, z_1]$ übergehen können, indem man setzt

$$x_1 = x + f \cdot y + g \cdot z$$
etc.

Wenn die f und g positiv sind, wird auch das neue System für die Spectralfarben keine negativen Werthe ergeben.

Es kommt nun zunächst darauf an, sechs Verhältnisse der Constanten in den Gleichungen (4) so zu bestimmen, dass die Werthe von dE aus den Gleichungen (3b) alle einander möglichst gleich werden. Dann würde nachher der berechnete Grad der Empfindlichkeit zu vergleichen sein mit dem, der für Helligkeitsunterschiede mittels der Gleichung (3) gefunden ist.

Die Werthe der Constanten, die uns bis jetzt in unseren Berechnungsversuchen am besten zu genügen schienen, waren

$$\left.\begin{aligned} x &= 0{,}7964 \,.\, R - 0{,}3515 \,.\, G + 0{,}555 \,.\, V \ldots \\ y &= 0{,}2612 \,.\, R + 0{,}3483 \,.\, G + 0{,}3930 \,.\, V \ldots \\ z &= 0{,}250 \,.\, R + 0{,}125 \,.\, G + 0{,}625 \,.\, V \ldots \end{aligned}\right\} \text{(4a).}$$

9 Die im Folgenden angegebenen Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{dR}{d\lambda}, \ \frac{dG}{d\lambda}, \ \frac{dV}{d\lambda},$$

sowie auch einige der Werthe von R, G, V wurden, wie oben bemerkt, durch graphische Interpolation theils gefunden, theils ausgeglichen.

Die $\delta\lambda$ sind die von König gefundenen mittleren Fehler, welche in je fünfzig[1]) Versuchen, das Spectrometer auf gleiche Farben einzustellen, begangen wurden.

Tafel I.
Data für die Rechnung.

Wellen-länge	R	G	V	$\frac{dR}{d\lambda}$	$\frac{dG}{d\lambda}$	$\frac{dV}{d\lambda}$	$\delta\lambda$
640 $\mu\mu$	2,66	0,22	0	— 0,116	— 0,023	0	2,37 $\mu\mu$
630 „	3,95	0,54	0	— 0,129	— 0,044	0	1,35 „
620 „	5,35	1,12	0	— 0,160	— 0,078	0	0,67 „
610 „	6,60	2,17	0	— 0,107	— 0,123	0	0,55 „
600 „	7,51	3,60	0	— 0,081	— 0,165	0	0,45 „
590 „	8,27	5,48	0	— 0,067	— 0,208	0	0,42 „
580 „	8.90	7,65	0	— 0,055	— 0,200	0	0,38 „
570 „	9,37	9,98	0	— 0,039	— 0,199	0	0,51 „
560 „	9,56	11,45	0,22	0	— 0,100	0	0,58 „
550 „	9,21	12,00	0,3	+ 0,068	0	— 0,0138	0,77 „
540 „	8,30	11,55	0,49	+ 0,121	+ 0,083	— 0,0233	0,80 „
530 „	6,54	10,36	0,75	+ 0,202	+ 0,139	— 0,0326	0,77 „
520 „	4,62	8,45	1,10	+ 0,171	+ 0,228	— 0,0400	0,71 „
510 „	3,0	5,75	1,55	+ 0,162	+ 0,271	— 0,0536	0,64 „
500 „	1,50	3,32	2,2	+ 0.114	+ 0,168	— 0,0887	0,35 „
490 „	0,78	2,24	3,6	+ 0,051	+ 0,059	— 0,208	0,31 „
480 „	0,4	1,88	7,9	+ 0,043	+ 0,028	— 0,52	0,38 „

Dies sind die durch die Beobachtungen gegebenen Grundlagen der Rechnung. Die folgende Tafel II. giebt die Ergebnisse der Rechnung. Nach unsern oben gemachten Erörterungen beziehen sich die Zahlen in der letzten Columne dieser Tafel auf den grössern mit k' bezeichneten Werth von k.

[1]) Hier stand im ersten Abdruck dieser Abhandlung irrthümlicherweise „zehn“ (1894).

10 Tafel II.[1])

Wellen-länge	x	y	z	$\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{d\lambda}$	$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{d\lambda}$	$\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{d\lambda}$	$\frac{dE}{k'}$
640 $\mu\mu$	2,05	0,73	0,69	— 0,0413	— 0,0496	— 0,0455	(0,0139)
630 „	2,98	1,18	1,10	— 0,0294	— 0,0402	— 0,0346	0,0103
620 „	3,88	1,70	1,47	— 0,0261	— 0,0391	— 0,0359	0,0064
610 „	4,52	2,38	1,92	— 0,0094	— 0,0298	— 0,0221	0,0080
600 „	4,75	3,10	2,32	— 0,0014	— 0,0250	— 0,0175	0,0077
590 „	4,68	3,95	2,76	+ 0,0043	— 0,0226	— 0,0156	0,0083
580 „	4,43	4,86	3,18	+ 0,0060	— 0,0171	— 0,0122	0,0065
570 „	3,99	5,79	3,59	+ 0,0098	— 0,0136	— 0,0097	0,0090
560 „	3,77	6,43	3,96	+ 0,0093	— 0,0054	— 0,0032	0,0065
550 „	3,31	6,47	3,99	+ 0,0142	+ 0,0017	+ 0,0021	0,0077
540 „	2,86	6,26	3,82	+ 0,0210	+ 0,0078	+ 0,0064	0,0091
530 „	2,00	5,51	3,40	+ 0,0469	+ 0,0155	+ 0,0140	(0,0202)
520 „	1,37	4,51	2,90	+ 0,0196	+ 0,0300	+ 0,0159	0,0073
510 „	1,24	3,31	2,44	+ 0,0043	+ 0,0338	+ 0,0167	(0,0132)
500 „	1,33	2,38	2,16	— 0,0129	+ 0,0219	— 0,0027	0,0089
490 „	1,83	2,38	2,72	— 0,0523	— 0,0202	— 0,0404	0,0071
480 „	4,04	3,86	5,27	— 0,0654	— 0,0475	— 0,0590	0,0049

Mittel: 0,0091

11 Um eine anschauliche Uebersicht über die bisher erreichte Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Theorie zu geben, habe ich in Fig. 1 die Werthe des $\delta\lambda$ dargestellt, wie sie König's letzte Beobachtungen ergeben haben. Diese sind durch die ausgezogene Curve verbunden. Die punktirte Curve dagegen giebt die Werthe von $\delta\lambda$, wie sie nach der Theorie sein müssten, um ein constantes dE bei den gemachten Annahmen über die Grundfarben zu erreichen. Man sieht, dass eine ziemlich ähnlich verlaufende Curve, wie die der beobachteten Werthe, durch die gegebene Theorie erreicht werden kann. Auch würden weitere Verbesserungen der Constanten a, b, c wohl noch

[1]) In dieser Tafel sind im vorliegenden Abdruck mehrere Rechnungsfehler des Originals verbessert (1894).

merklich bessere Uebereinstimmung haben erreichen lassen, als es bisher gelungen ist. Die auffallendste Abweichung ist bei $\lambda = 530\ \mu\mu$, wo ein einzelner ganz kleiner Werth von $\delta\lambda$, in Fig. 1 mit p bezeichnet (beziehlich grosser Werth von dE),

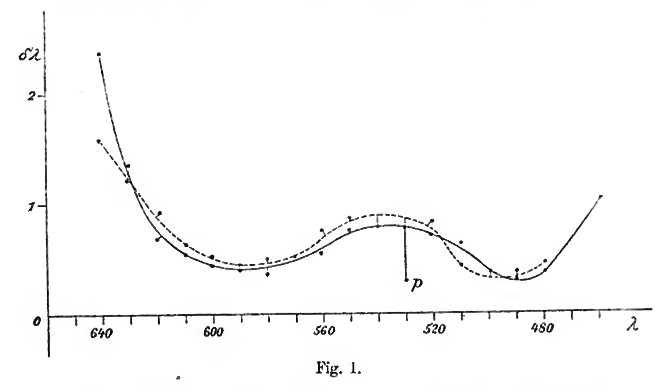


Fig. 1.

mitten zwischen solchen erscheint, die dem dort bestehenden Maximum von $\delta\lambda$ entsprechen. Es liegt diese Stelle im Grün nahe bei der Linie E, und dort musste ein besonders weites Intervall (von $\lambda = 536\ \mu\mu$ bis $516{,}5\ \mu\mu$) durch Interpolation ausgefüllt werden, wodurch die Werthe der Differentialquotienten an jener Stelle erheblich unsicher werden. Der hier vorliegende jähe Sprung zwischen den drei benachbarten Werthen lässt sich durch keine Combination der Constanten a, b, c beseitigen. Es ist hauptsächlich das Glied

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{d\lambda}$$

was hier die Abweichung verursacht, und diese wird um so grösser, da x hier einem Minimum ganz nahe ist und das x im Nenner deshalb sehr klein ausfällt.

Uebrigens könnte es wohl sein, dass eine der Curven der Farbenwerthe der Spectralfarben eine Ecke hätte mit plötzlicher Aenderung des Differentialquotienten. Unsere Inter-

polationsrechnungen, die von der Annahme einer continuirlichen Krümmung der Curven ausgehen, müssen an einer solchen Stelle irre führen.

Sonst ist noch zu bemerken, dass überall, wo die Lichtstärke einer der drei Farben gegen die der anderen sehr zurücktritt, die verminderte Empfindlichkeit für die Unterschiedsschwellen schwachen Lichtes sich geltend macht. Dort wird,
12 wenn nicht gleichzeitig der Differentialquotient nach λ sehr klein wird, zu erwarten sein, dass die Empfindlichkeit für die Farbenunterschiede in der Beobachtung sich geringer ($\delta\lambda$ dagegen grösser) zeigen wird, als sie der Theorie nach sein sollte. Das ist also ausser bei der schon angegebenen Stelle zwischen 530 $\mu\mu$ und 510 $\mu\mu$, wo das eingemischte Roth sehr schwach ist, auch für die grüne Elementarfarbe am rothen Ende des Spectrum der Fall, und dem entspricht hier die Abweichung der Curven voneinander, welche Fig. 1 bei 640 $\mu\mu$ zeigt.

Die gefundenen Grundfarben.

Das Verhältniss der durch unsere Rechnung wenigstens provisorisch gefundenen Grundfarben zu den Spectralfarben macht sich am besten in einem Farbendreieck anschaulich. Ein solches ist in Fig. 2 construirt. Die Farbenwerthe der neuen Grundfarben sind einander gleich gesetzt und dieselben daher in den Ecken des gleichseitigen Dreiecks $x\ y\ z$ angebracht,
13 wobei nach den auf S. 446 gegebenen Werthen Weiss (nämlich das des Sonnenlichts) im Mittelpunkt des Dreiecks bei W liegt. Die Curve $R\ G\ V$ entspricht der Reihe der Spectralfarben. Diese liegen alle ziemlich entfernt von den Ecken des Dreiecks, sind also, wie es schon die oben gegebenen Zahlenwerthe anzeigten, stark gemischt, auch die Endfarben Roth und Violett.

Das spectrale Roth würde nach den auf S. 446 angegebenen Werthen eine weissliche und ein wenig gelbliche Modification der Grundfarbe x sein; letztere also würde etwa ein höchst gesättigtes Carminroth darstellen. Das spectrale Violett wäre eine weissröthliche Abänderung der Grundfarbe z, und diese letztere wäre also etwa mit dem Ultramarinblau im Farbenton

zu vergleichen. Beide Farbenbestimmungen stimmten demnach mit Hrn. E. Hering's Vermuthungen. Endlich würde die Grundfarbe y im Farbenton der Stelle zwischen $\lambda = 540\,\mu\mu$ und $560\,\mu\mu$ entsprechen, wo $x = z$ ist; das wäre im gelblichen

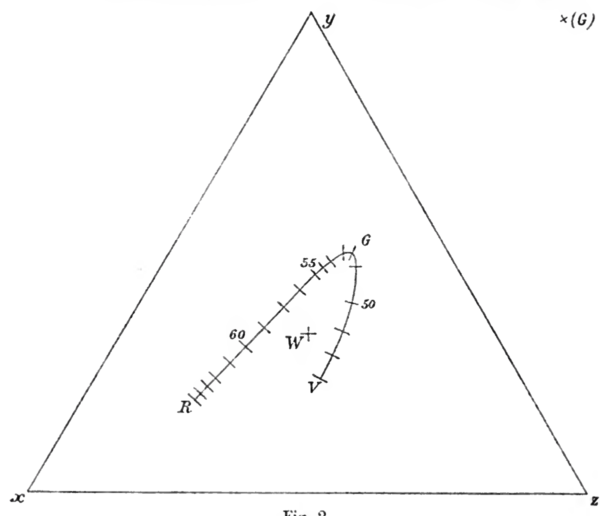


Fig. 2.

Grün, und zwar grüner, als die Complementärfarbe des Violett, etwa dem Grün der Vegetation entsprechend.

Die starke Wölbung der Curve bei G entspricht dem spectralen Grün bei Fraunhofer's Linie E. Das (G) ausserhalb des Dreiecks bezeichnet das von A. König und C. Dieterici ursprünglich als Elementarfarbe für ihre Mischungsversuche gewählte Grün G. Diese Farbe war übrigens auch schon ausserhalb ihres nach der Analogie der farbenblinden Augen construirten Farbendreiecks 𝔑, 𝔊, 𝔅 gelegen.

Da das spectrale Grün dem Rande des Farbendreiecks verhältnissmässig nahe liegt, bekommt es eine unter den

übrigen Farben, die im Farbenton der Mischung zweier Grundfarben entsprechen, ziemlich hervortretende Farbensättigung. Die bei $\lambda = 530\,\mu\mu$ hervortretende Unregelmässigkeit der Empfindlichkeitscurve fällt gerade in diese starke Krümmung der Farbencurve im Grün, was die Unsicherheit der dort gemachten Messungen und Interpolationen erklärlich machen mag.

Uebrigens zeigt diese Curve an, dass alle einfachen Farben die sämmtlichen lichtempfindlichen Nervenelemente des trichromatischen Auges gleichzeitig und mit nur mässigen Intensitätsunterschieden erregen. Wenn wir also diese Erregungen auf die Anwesenheit dreier photochemisch zu verändernder Substanzen in der Netzhaut hypothetisch zurückführen, so müssen
14 wir schliessen, dass diese alle drei nahehin gleiche Grenzen der Lichtempfindlichkeit haben und nur untergeordnete Abweichungen von mässigem Betrage im Gange der photochemischen Wirkung für die verschiedenen Wellenlängen zeigen. Aehnliche Abänderungen durch Zumischung anderer Substanzen, Substitutionen analoger Atomgruppen u. s. w. kommen ja auch bei anderen photochemisch veränderlichen Substanzen vor, wie sie in der Photographie gebraucht werden, z. B. bei den verschiedenen Haloidsalzen des Silbers.

Vergleich mit dichromatischen Augen.

Die hier gefundenen Grundfarben stimmen nicht mit denen überein, welche die Hrn. A. König und C. Dieterici aus der Vergleichung farbenblinder Augen mit normalsichtigen hergeleitet haben. Indessen liegt in den Thatsachen hierbei kein nothwendiger Widerspruch. Nur die besondere, von Th. Young ausgegangene und von den meisten Bearbeitern der Theorie, auch von mir selbst, von E. Hering, A. König und C. Dieterici früher angenommene Erklärungsweise, dass bei den Dichromaten einfach eine der Grunderregungen des trichromatischen Auges nicht zu Stande komme, tritt in Widerspruch mit dem bezeichneten Ergebniss. Aber es ist eine allgemeinere Hypothese über das Wesen der Dichromasie möglich, bei welcher die Nothwendigkeit aufhört, dass die fehlende Farbe eine der Grundfarben sei, und doch die Regel festgehalten wird, dass alle Farbenpaare, welche für das normale

trichromatische Auge gleich aussehen, auch für das dichromatische gleich aussehend bleiben.

Um dies durch ein einfaches Beispiel anschaulich zu machen, nehme man an, dass die Lichteinwirkungen, welche sonst die Empfindung Grün erregen, die grünempfindenden Nerven nicht, wohl aber die roth- und blauempfindenden in bestimmtem festen Verhältniss erregen. Alle Empfindungen eines solchen Auges würden aus Roth und Blau gemischt erscheinen; es wäre dichromatisch. Aber die Farben, welche auf der Farbentafel in denjenigen Geraden liegen, die durch den Ort der grünen Grundempfindung gezogen werden, werden im Allgemeinen nicht gleich erscheinen, wie es unter der älteren Annahme der Fall sein würde, wo einfach Ausfall der grünen Erregung angenommen wurde. Denn statt der wechselnden Menge des Grün im trichromatischen Auge würde hier eine wechselnde Menge einer bestimmten Purpurfarbe zu dem schon vorhandenen, verschieden gemischten Purpur hinzukommen und diesen in der Mehrzahl der Fälle verändern. In diesem Falle würde in der That der Schnittpunkt derjenigen Linien des dichromatischen Feldes, welche dichromatisch gleich erscheinende Farben enthalten, ausserhalb des Farbendreiecks jenseits der grünen Ecke desselben liegen müssen.

Dies Verhältniss bliebe ungeändert, wenn wir hierzu noch weiter annehmen wollten, dass jede Erregung des Roth, auch die eben neu angenommene, in bestimmtem Verhältniss auch die grün empfindenden Nerventheile erregte, und also eine bestimmte Art Gelb zur Empfindung brächte, und jede Erregung des Blau ebenso eine bestimmte Art Grünblau. Dann wären sämmtliche Empfindungen eines solchen Auges aus Gelb und Grünblau zu mischen, während der Schnittpunkt der dichromatischen Linien gleichen Aussehens dadurch nicht geändert würde.

Allgemeinere Form der Dichromasie.

Bezeichnen wir, wie bisher, mit x, y, z die Farbenwerthe der verschiedenen Lichter für das trichromatische Auge und damit zugleich das Maass für die ihnen entsprechenden physiologischen Processe im Sehnervenapparat, welche nebenein-

ander bestehen und sich addiren bei der Erzeugung der Farbenempfindung. Dagegen wollen wir mit ξ, η, ζ die entsprechenden physiologischen Processe im dichromatischen Auge bezeichnen.

Die erste Regel, die sich aus den Beobachtungen ergeben hat, ist die, dass farbige Lichter, die den normalen Trichromaten gleich aussehen, es auch für die Dichromaten thun. Also wenn x, y und z gleichen Werth für zwei aus verschiedenen Spectralfarben gemischte Lichter haben, haben für beide auch ξ, η und ζ gleiche Werthe, d. h. die letzteren Grössen sind Functionen von x, y, z, und nur von diesen.

Die zweite Regel ist die, dass Newton's Mischungsgesetz auch für die Farben des dichromatischen Systems anwendbar ist, was zu einer Gleichung von der Form führt

$$\xi_{(x+x_1)} = \xi_{(x)} + \xi_{(x_1)},$$

woraus folgt, dass die ξ, η, ζ nur lineare Functionen von x, y, z sein können, und zwar homogene lineare, da $\xi = \eta = \zeta = 0$
16 sein muss, wenn $x = y = z = 0$. Da aber ξ, η, ζ nur zwei Variable vertreten sollen, so wird zwischen ihren Werthen eine Gleichung stattfinden müssen, die wiederum nur eine lineare sein kann. Wir kommen also zu drei Gleichungen folgender Form:

$$0 = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= p_1 x + p_2 y + p_3 z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta &= q_1 x + q_2 y + q_3 z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (5a)$$

Die Coëfficienten p und q dieser letzeren Gleichungen müssen positiv sein, da ξ und η für alle positiven Werthe von x, y und z positiv sein müssen. Dagegen muss einer der Coëfficienten der Gleichung (5) nothwendig das entgegengesetzte Vorzeichen von den beiden anderen haben, da ξ, η, ζ in Th. Young's Theorie nothwendig positive Grössen für alle physiologisch möglichen Farbenempfindungen sein müssen.

Es sei γ dieser Coëfficient mit abweichendem Zeichen. Schreiben wir

$$-\frac{\alpha}{\gamma} = a \text{ und } -\frac{\beta}{\gamma} = b,$$

wo also a und b positiv sind, so ergiebt Gleichung (5)

$$\zeta = a\xi + b\eta \dots\dots\dots\dots\dots \quad (5b)$$

Setzen wir weiter

$$\zeta_1 = a\xi \text{ und } \zeta_2 = b\eta$$
$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2,$$

so können wir die Empfindung ξ mit der ihr proportionalen $\zeta_1 = a\xi$ zusammenfassen in die Empfindung einer Mischfarbe von bestimmter Zusammensetzung ζ_1 und ξ, und ebenso $\zeta_2 = b\eta$ mit η. Der ganze vorhandene Farbenwerth des dichromatischen Auges erscheint dann als Mischung in veränderlichem Verhältniss von diesen beiden bestimmt zusammengesetzten Farben. Dadurch wäre dann auch das Aussehen der dichromatischen Farben bestimmt.

Um die besprochenen Verhältnisse in einer analytisch geometrischen Darstellung des Farbensystems anschaulich zu machen, verfahren wir am einfachsten,[1]) wenn wir die Werthe der Grundfarben des trichromatischen Systems x, y, z als 17
rechtwinklige Coordinaten eines die betreffende Farbe enthaltenden Punktes gebrauchen. Nach Young's Hypothese, welche nur positive Werthe der physiologisch möglichen Farbenwerthe zulässt, ist dann das System aller Farben in der rechtwinkligen positiven Ecke dieses Coordinatensystems angeordnet. Als Farbentafel kann jede Ebene gelten, die die drei positiven Coordinataxen schneidet, z. B. die Ebene

$$x + y + z = Const. \dots\dots\dots\dots \quad (5c)$$

in der das Farbendreieck ein gleichseitiges wird.

Unter diesen Annahmen würde die Gleichung

$$\xi = p_1 . x + p_2 . y + p_3 . z = 0 \dots\dots\dots \quad (6)$$

eine Ebene darstellen, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten (die Spitze der Farbenecke) geht, aber ganz ausserhalb der positiven Ecke liegt, da bei den vorausgesetzten positiven Werthen der Coëfficienten p nothwendig eine oder zwei der Coordinaten negative Werthe haben müssen, um das Trinom zu Null zu machen.

---

[1]) S. mein *Handbuch der Physiologischen Optik,* 2. Aufl., S. 336—338.

Dasselbe würde gelten für die andere Gleichung

$$\eta = q_1 . x + q_2 . y + q_3 . z = 0 \dots\dots\dots \quad (6a)$$

Sollen die beiden Gleichungen gleichzeitig gelten, so würde dadurch die Schnittlinie der beiden Ebenen, beziehlich wenn wir die Gleichung der Farbentafel (5c) hinzunehmen, der Punkt, wo die Schnittlinie die Farbentafel schneidet, gegeben sein.

Setzen wir dagegen die Gleichung

$$B . \xi = A . \eta \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (6b)$$

oder

$$(Bp_1 - Aq_1) . x + (Bp_2 - Aq_2) . y + (Bp_3 - Aq_3) . z = 0 \quad (6c)$$

so ist dies wieder die Gleichung einer Ebene, und zwar einer solchen, welche die beiden früher genannten $\xi = 0$ und $\eta = 0$ in derselben Schnittlinie schneidet, da diese beiden letzteren Gleichungen zusammen auch (5b) erfüllen.

18 Die Gleichung (6b) aber können wir auch schreiben

$$\xi : \eta = A : B$$

und mit Hülfe von Gleichung (5) ergiebt sich dann für die Punkte der durch die Gleichung (6b) dargestellten Ebene weiter

$$\frac{\zeta}{\xi} = a + \frac{b . B}{A}$$

$$\frac{\zeta}{\eta} = b + \frac{A}{B},$$

d. h., die drei Farbenempfindungen haben in jeder Ebene von der Form der Gleichung (6b) constantes Verhältniss zu einander. Die ganze Ebene ist gleichfarbig, und *alle in einem dichromatischen Farbensystem gleichfarbigen Ebenen gehen durch eine gemeinsame Schnittlinie*, die aber nothwendig ausserhalb oder an der Grenze der positiven Farbenecke liegt. In *der nach Newton construirten Farbentafel schneiden sich alle gleichfarbigen Linien eines dichromatischen Systems in einem Punkte ausserhalb oder an der Grenze des trichromatischen Farbendreiecks.*

Zu bemerken ist, dass in diesem Punkte auch $\zeta = 0$ werden, also jede Lichtempfindung fehlen würde, was aber thatsächlich nur dann in Betracht kommt, wenn der Punkt an der Grenze oder in einer Ecke des Farbengebietes liegt. Letzeres würde

der älteren Annahme über die Natur der Dichromasie entsprechen.

In unseren Betrachtungen ist keinerlei Beschränkung für die Lage des Schnittpunktes gegeben. Daher fällt bei dieser Verallgemeinerung der Theorie der Dichromasie auch die Trennung in zwei scharf getrennte Klassen Grünblinde und Rothblinde weg, welche ja auch den Beobachtungen gegenüber nicht ganz gesichert erschien.

Damit ist auch nachgewiesen, dass der Mangel an Uebereinstimmung zwischen der fehlenden Farbe der dichromatischen Systeme und je einer der von uns gefundenen Grundfarben keinen unlöslichen Widerspruch einschliesst.

Die Messungen der Hrn. König und Dieterici haben für zwei Klassen von Dichromaten die fehlenden Farben auf die von ihnen gewählten Elementarfarben R, G, V zurückgeführt.

Diejenige Grundfarbe, welche normale Trichromaten mehr 19
haben als Grünblinde, ist von den beiden Autoren bezeichnet als:

$$\mathfrak{G} = {}^1/_5 R + {}^4/_5 G,$$

dagegen die andere, welche normale Trichromaten mehr haben als Rothblinde, als

$$\mathfrak{R} = \frac{20 R - 3 G + 2 V}{19},$$

während[1]) die dritte den beiden Klassen der Dichromaten und den normalen Trichromaten gemeinsame Grundempfindung $\mathfrak{B} = V$ ist.

Um nun zu ermitteln, ob diese Grundfarben $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{G}$ ausserhalb oder innerhalb des nach den Unterschiedsempfindlichkeiten berechneten neuen Farbendreiecks liegen, muss man die Werthe der x, y, z als Funktionen der $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}$ ausdrücken. Wenn man zwei von diesen letztern Grössen gleich Null setzt und die dritte übrigbleibende dann negative Werthe einer der

[1]) Von hier an bis zum Schlusse dieses Abschnittes ist im vorliegenden Abdruck der Text des Originals mit Rücksicht auf die S. 517 des 3. Bandes der Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane bereits veröffentlichte „Berichtigung" völlig umgestaltet (1894).

x, y, z ergiebt, so liegt die betreffende Farbe ausserhalb des Dreiecks $[x, y, z]$.

Aus den eben angeführten Werthen für $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{B}$ folgt

$$\begin{aligned} R &= 0{,}9157 . \mathfrak{R} + 0{,}1807 . \mathfrak{G} - 0{,}963 . \mathfrak{B} \\ G &= -0{,}2289 . \mathfrak{R} + 1{,}2048 . \mathfrak{G} + 0{,}241 . \mathfrak{B} \\ V &= \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in die obigen Gleichungen ($4a$) ein, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} x &= 0{,}810 . \mathfrak{R} - 0{,}280 . \mathfrak{G} + 0{,}470 . \mathfrak{B} \\ y &= 0{,}159 . \mathfrak{R} + 0{,}466 . \mathfrak{G} + 0{,}376 . \mathfrak{B} \\ z &= 0{,}200 . \mathfrak{R} + 0{,}196 . \mathfrak{G} + 0{,}604 . \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Daraus geht hervor, dass, wenn $\mathfrak{R} = \mathfrak{B} = 0$ und nur die Farbe $\mathfrak{G}$ übrig bleibt, diese in der That einen negativen Werth des x hat, und ausserhalb des Farbendreiecks $[x, y, z]$, jenseits seiner grünblauen Seite liegt, während die beiden andern Grundfarben $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{B}$ im Innern des Dreiecks liegen. Das Roth indessen liegt der Grundfarbe x nahe genug, dass bei kleinen Aenderungen der zu Grunde liegenden Beobachtungszahlen es leicht an den Rand des Dreiecks oder in seine rothe Ecke rücken könnte, wie es die hier vorgetragene Theorie fordert.

Vergleichung der Empfindlichkeit für Helligkeitsunterschiede mit der für Farbenunterschiede.

Der kleinste erkennbare Bruchtheil für Helligkeitsunterschiede bei weisser Beleuchtung in den Beobachtungen von Hrn. A. König unter ähnlichen äusseren Einrichtungen, ähnlicher Grösse des Gesichtsfeldes u. s. w., wie bei den Farbenvergleichungen betrug 0,0173. Die Gleichung (3) ergiebt alsdann,[1]) da hier der kleinere Werth k'' von k zu nehmen ist

$$\begin{aligned} dE &= k'' . 0{,}0173 . \sqrt{3} \\ &= k'' . 0{,}0300. \end{aligned}$$

Nach dem Mittel aus der letzten Columne von Tafel II war aber bei König's auf Farbenunterschiede bezüglichen Beobachtungen

[1]) Im Nachfolgenden ist hier ein Rechnungsfehler des Originals verbessert und dementsprechend auch die erforderliche Textumänderung vorgenommen worden (1894).

$$dE = k' \,.\, 0{,}0091,$$

oder wenn wir das Verhältnis zwischen den beiden Werthen von k berücksichtigen

$$dE = k'' \,.\, 1{,}8238 \,.\, 0{,}0091$$
$$= k'' \,.\, 0{,}0166.$$

Der nach der aufgestellten Theorie zur Wahrnehmung erforderliche Unterschied der erregten beiden Gesammtempfindungen müsste also für Farbenunterschiede merklich kleiner sein als für Helligkeitsunterschiede nach derselben Scale gemessen. Indessen würde bei der geringen Präcision der Data, die der Rechnung zu Grunde liegen, eine bessere Uebereinstimmung doch höchstens als ein günstiger Zufall betrachtet werden können.

Eine weitere Prüfung des hier aufgestellten Gesetzes wird wohl besser durch directe Mischung je zweier Spectralfarben in verschiedenem Verhältniss auszuführen sein, bei denen das Mischungsverhältniss unmittelbar am Apparat abgelesen werden kann, und bei denen auch mannigfachere Vergleichungen herzustellen sind, als sie zwischen unmittelbar benachbarten Spectralfarben eintreten.

Die Rechnung für das dichromatische Auge wäre ebenfalls mit den hier gefundenen Grundfarben x, y, z durchzuführen. Indessen lässt die Umformung der Formel schon übersehen, dass dabei noch eine neue Constante eintritt, über die frei zu verfügen ist, und man wird mit deren Hülfe also jedenfalls eine bessere Uebereinstimmung mit der Formel herstellen können, als mit der kleineren Zahl von Constanten. Die mühsame Rechnung in diesem noch ziemlich provisorischen Zustande unserer Kenntnisse des Gegenstandes durchzuführen, schien mir überflüssig.

CXXXIII.

Kürzeste Linien im Farbensystem.

Aus den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
Sitzung vom 17. Dec. 1891. S. 1071 bis 1083.

1071 Wir wollen im Folgenden von einer geometrischen Darstellung des Farbensystems ausgehen, welche Lambert's Farbenpyramide entspricht, indem wir jede besondere Farbe als hergestellt durch die Vereinigung der passend abgemessenen Quanta dreier passend gewählter Grundfarben ansehen, und die Werthe dieser drei Quanta gleich setzen den drei positiven rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z. Dann ist jede Farbe durch einen Punkt innerhalb der dreikantigen Ecke vertreten, welche zwischen den positiven Coordinataxen eingeschlossen ist. Jede Ebene, welche die drei positiven Coordinataxen schneidet, kann dann als Farbentafel im Sinne der Newton'schen Anordnung der Farben gebraucht werden, indem die Quanta der verschiedenen Farben, wie sie in dieser Ebene vorkommen, als Einheitsquanta für die Abmessung der zu mischenden Farben entsprechender Art genommen werden. Innerhalb der Farbentafel findet man bekanntlich die Mischfarbe am Orte des Schwerpunkts der gemischten Farben, und ihr Quantum ist der Summe der Quanta der gemischten Farben gleich zu setzen.

Wie Riemann gezeigt, lassen sich alle Eigenschaften einer besonderen Art des Raumes ableiten, wenn man den Werth der Entfernung zweier benachbarter Punkte durch die zuge-

hörigen Differentiale der Coordinaten geben kann. Die Entfernung zweier Punkte eines festen Körpers aber ist eine Grösse, von der man verlangt, dass sie durch die Lage ihrer beiden Endpunkte vollkommen gegeben sei, und gleich bleibe bei allen möglichen Verschiebungen und Wendungen des festen Körpers, dem die Punkte angehören.

Die Farbenqualitäten sind nun Grössen, die dem Gebiet der Empfindungen angehören. Wenn eine der Entfernung analoge Grösse bei ihnen vorkommt, so muss dies ebenfalls ein in der Empfindung gegebenes Verhältniss sein, welches zwischen je zweien besteht, und durch die Beschaffenheit der zwei vollständig gegeben ist. In der That lässt sich ein solches entdecken, es ist nämlich die Deutlichkeit der Unterscheidung zwischen zwei nahestehenden Farben.

Einigermaassen bestimmte Angaben lassen sich über den 1072
Grad dieser Deutlichkeit freilich nur bei sehr kleinem Unterschiede der Farben machen, aber dies genügt in diesem Falle. Die ursprünglichen Versuche E. H. Weber's und Fechner's, welche zur Aufstellung des psychophysischen Gesetzes führten, bezogen sich allerdings nicht sowohl auf den Grad der Deutlichkeit, als vielmehr nur auf die Erkennbarkeit oder Nichterkennbarkeit des Unterschiedes. Aber die neueren Fortsetzungen dieser Messungen haben sowohl bei der Construction der Contrastphotometer als auch in den Versuchen von Hrn. Ebbinghaus über Abstufungen von Licht und Farbeneindrücken gelehrt, dass die Aussage darüber, ob von zwei sehr kleinen wahrnehmbaren Unterschieden der eine oder der andere grösser, d. h. deutlicher sei, sogar noch bestimmter gegeben werden kann, als die früher geforderte Entscheidung über Sichtbarkeit oder Nichtsichtbarkeit.

Die Frage über die Deutlichkeit des Unterschiedes kann auch bei jeder beliebigen Art des letzteren gleich gut gestellt werden. Man kann sie ebenso gut in Bezug auf die Helligkeit qualitativ gleicher Farben, wie in Bezug auf den Farbenton gleich heller Lichter stellen, und beide miteinander vergleichen.

Ich habe nun in neuerer Zeit[1]) versucht, eine Formel auf-

---

[1]) H. v. Helmholtz, Versuch einer erweiterten Anwendung des Fechner'schen Gesetzes im Farbensystem. *Zeitschrift für Psychologie und*

zustellen, und mit den vorliegenden Beobachtungen zu vergleichen, welche, wenn sie sich weiter bestätigt, dieselbe Rolle für das Bereich der Farbenempfindungen spielen würde, wie die Formel für die Länge des Linienelements in der Geometrie. Ich habe darin versucht, den Grad der Deutlichkeit im Unterschiede zweier Farben anzugeben, die sich gleichzeitig in den Quanten aller drei Grundfarben von einander unterscheiden, welche in ihre Zusammensetzung eingehen, also gleichzeitig sich in Helligkeit und in der Qualität unterscheiden können, während bisher nur diejenige Seite des Gesetzes durchgearbeitet war, welche sich auf Helligkeitsunterschiede allein, bei unveränderter Qualität bezieht.

Die auf Newton's Mischungsgesetz begründeten bisherigen Definitionen der Farben bestimmen eigentlich nur solche Mischungen objectiven Lichts, durch welche genau die gleichen Empfindungen erregt werden können, und Newton's Gesetz selbst bestimmt nur die Verhältnisse der Aequivalenz verschiedener Mischungen objectiver Lichter in dieser Beziehung.

1073 Auf dem hier einzuschlagenden neuen Wege würden wir dagegen zu einer Ausmessung des Systems der Farbenempfindungen gelangen, die nur auf die Unterschiede der Empfindungen gebaut ist. Dabei zeigt sich allerdings eine Uebereinstimmung beider Arten der Ausmessung in den grossen Zügen, aber mit Vorbehalt kleinerer Differenzen in Einzelheiten, die auch schon zum Theil von den Beobachtern bemerkt waren.

Wie die Geometrie des Raumes mit dem Begriff der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten beginnt, so werden wir durch die neue Grundformel in den Stand gesetzt, diejenigen Reihen von Uebergangsfarben zwischen zwei gegebenen Endfarben von verschiedener Qualität und Quantität zu finden, für welche die Summe der wahrnehmbaren Unterschiede ein

---

Physiologie der Sinnesorgane. Bd. II, S. 1, 1891, und: Versuch das psychophysische Gesetz auf die Farbenunterschiede trichromatischer Augen anzuwenden, *ebenda* Bd. III, S. 1, 1891. — Diese beiden Abhandlungen sind auf S. 407 und S. 438 des vorliegenden Bandes abgedruckt.

Wenn von den sechs Grössen, die in den Gleichungen (2a) 1075
unter dem Logarithmenzeichen vorkommen nicht je zwei im Nenner, oder je zwei im Zähler gleich Null werden, haben die Grössen λ, μ, ν endliche reelle positive oder negative Werthe, und die Punkte der Linie sind eindeutig bestimmt, da ihre Coordinaten nur positiv reell sein können. Da nun a, b, c (Farbencomponenten des Eigenlichts im Sinne von Fechner's Auffassung) nur positive Werthe haben können, und x, y, z für reelle Farben ebenfalls, so kommt für reelle Farben die oben bemerkte Ausnahme niemals vor, und zwischen jedem Paare von Punkten des reellen Farbengebiets giebt es also nur eine kürzeste Farbenlinie.

Da indessen die Punkte, in denen zwei von den Grössen $(a + x)$, $(b + y)$ und $(c + z)$ gleich Null werden, eine besondere Rolle bei den Constructionen spielen, mache ich hier darauf aufmerksam, dass alle drei Grössen gleich Null gesetzt den Nullpunkt allen Lichtes, Eigenlicht und objectives Licht zusammengenommen, bezeichnen, und wir diesen Punkt deshalb im Folgenden mit (0) bezeichnen wollen. Wenn nur zwei der genannten Grössen gleich Null sind, sind dadurch die Parallelen zu den Coordinataxen gegeben, welche durch den Punkt (0) gehen. Wenn von einem Punkte dieser Linien aus kürzeste Farbenreihen nach einem anderen festen Punkte zu construiren sind, so sind diese durch ihre Endpunkte nicht vollständig gegeben, sondern können in unendlicher Anzahl construirt werden.

Ebene Curven. Eben werden Curven, für welche einer der Exponenten λ, μ oder ν gleich Null ist, oder zwei derselben einander gleich.

Im ersteren Falle erhalten die drei Grössen, welche in (2b) einander gleichgesetzt sind, alle den Werth 1, was, wenn $\lambda = 0$, folgern lässt

$$b + y = b + y_1$$
$$c + z = c + z_1$$

d. h. die betreffenden kürzesten Farbenreihen liegen auf geraden Linien der x-Axe parallel.

Die Annahme $\mu = 0$ giebt eben solche Gerade der y-Axe parallel, und $\nu = 0$ der z-Axe parallel. Dieselben können

übrigens durch jeden Punkt der Farbenpyramide gezogen werden.

Im zweiten Falle, wo zwei Exponenten einander gleich, erhalten wir entweder

$$\left.\begin{array}{ll} & \frac{a+x_1}{a+x_2}=\frac{b+y_1}{b+y_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{oder} & \frac{b+y_1}{b+y_2}=\frac{c+z_1}{c+z_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{oder} & \frac{c+z_1}{c+z_2}=\frac{a+x_1}{a+x_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (2c).$$

1076 Bezeichnen wir wieder den Punkt, dessen Coordinaten $(-a)$, $(-b)$, $(-c)$ sind, d. h. in welchen alle Lichtempfindung fehlt, auch die des Eigenlichts, mit dem Index 0, den Punkt $x=y=z=0$, wo nur die Empfindung des Eigenlichts da ist, mit ε, so sagt die erste unserer Gleichungen aus, dass die Punkte (ε), (1), (2), projicirt auf die xy-Ebene in gerader Linie liegen. Die Curve liegt also in einer Ebene, die der z-Axe parallel ist, und durch den Punkt (ε), sowie die beiden Endpunkte der Curve geht.

Die zweite der Gleichungen (2c) würde sich auf solche Ebenen beziehen, die der x-Axe parallel durch den Punkt (ε) gehen, die dritte auf Ebenen, die der y-Axe parallel durch denselben Punkt gehen.

Geradlinig und nicht parallel einer der x, y, z können solche kürzeste Linien sein, für welche gleichzeitig $\lambda=\mu=\nu$; diese gehen durch die Punkte (ε) und (0).

Dagegen werden die geraden Linien, welche gleicher Qualität des objectiven Lichts entsprechen, verlängert durch den Punkt (ε) gehen, wo $x=y=z=0$. Nur eine von diesen, die gleichzeitig durch (ε) und (0) geht, wird einer kürzesten Farbenreihe entsprechen.

Nun liegt es im Wesen einer kürzesten Farbenreihe, dass unter solchen Farben, die von der einen Endfarbe gleich grossen Unterschied zeigen, die in der kürzesten Farbenreihe liegenden auch der andern Endfarbe ähnlicher als alle anderen benachbarten Farben erscheinen werden.

Fällt die Reihe der Farben gleicher Mischung mit der kürzesten Reihe zusammen, so werden ihre Glieder auch beim Uebergang von schwacher zu hoher Lichtstärke keine Abweichung des Farbentons zeigen. Wohl aber wird dies der Fall sein, wenn die erstere Reihe keine kürzeste ist. Denn dann würde es Farben geben von anderer Mischung, durch welche man einen kürzeren Uebergang von den dunkelsten zu den hellsten Tönen gleicher objectiver Qualität bahnen könnte.

Nun kommen in der That solche Unterschiede vor. Ich habe schon in meinen älteren Arbeiten[1]) über Spectralfarben erwähnt, dass sie bei steigender Helligkeit alle dem Weiss, beziehlich Gelbweiss ähnlicher werden. Am schnellsten geht bei steigender Lichtstärke Grün in Gelb, Violett in Weissblau über. Höhere Helligkeiten sind nöthig, um spectrales Roth in Gelb und Blau in Weiss überzuführen. Es giebt nur eine Farbe, nämlich Gelbweiss, welche bei allen Intensitäten merklich un- 1077
verändert bleibt. Wir würden daraus zu schliessen haben, dass Gelbweiss dem Farbenton der geraden Linie entspricht, die durch die Punkte (0) und (ε) unseres Coordinatensystems geht. Wir wollen diese für unser heut vorliegendes Thema als die Principallinie des Farbensystems bezeichnen. Im Sinne von Fechner's Hypothese wäre sie die Farbe des Eigenlichts der Netzhaut.

Nehmen wir dagegen eine andere Farbe, z. B. Grün, welches bei Steigerung der Intensität und unveränderter Mischung gelb wird. Offenbar müssten wir ein gesättigteres Grün höherer Helligkeit herzustellen versuchen, um unsere Farbenreihe mit dem dem unteren Ende ähnlichsten Farbentone abzuschliessen, d. h. wir müssten zu einer anderen Farbenmischung übergehen, um in einer Reihe möglichst wenig unterschiedener Farbentöne zu bleiben.

---

[1]) S. mein Handbuch der Physiol. Optik, zweite Aufl., S. 284, ferner H. Helmholtz: „Ueber die Theorie der zusammengesetzten Farben" in Poggd. Ann., Bd. LXXXVII, S. 45, 1852 und: „Ueber die Zusammensetzung von Spectralfarben", ebenda Bd. XCIV, S. 11 und 13. — Die beiden letzten Abhandlungen sind auf S. 3 und S. 45 des zweiten Bandes der vorliegenden Sammlung abgedruckt.

Gekrümmte Projectionslinien. Wenn wir von den drei in Gleichung (2b) einander gleichgesetzten Grössen zwei, die nicht gleiche Exponenten haben, einander gleichsetzen, so sind die Curven verschieden, je nachdem die beiden Exponenten gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben.

A. Curven durch den Punkt (0).

Im ersteren Falle, wenn z. B. die beiden Exponenten λ und μ gleiches Zeichen haben, würde λ / μ positiv sein, und die Curve

$$\frac{a + x}{a + x_1} = \left(\frac{b + y}{b + y_1}\right)^{\frac{\mu}{\lambda}}$$

würde durch den Punkt (0) gehen, da dort $a + x = b + y = 0$ ist. Ist dabei $\mu / \lambda > 1$, so würde $(a + x)$ schneller steigen als $(b + y)$, die Curve ihre convexe Seite der Linie $b + y = 0$ zukehren.

Umgekehrt ist $\mu / \lambda < 1$, so würde die Curve ihre convexe Seite der Linie $a + x = 0$ zukehren.

Wenn wir die Punkte (1) und (2) sehr nahe an einander liegend wählen, und ihre Abstände als kleine Grössen behandeln

$$x_2 - x_1 = dx$$
$$y_2 - y_1 = dy$$
$$z_2 - z_1 = dz,$$

1078 so wird

$$\lambda = -\frac{dx}{a + x_1}$$
$$\mu = -\frac{dy}{b + y_1}$$
$$\nu = -\frac{dz}{c + z_1};$$

schreiben wir dann

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tg} \varphi$$
$$\frac{a + x_1}{b + y_1} = \operatorname{tg} f$$

so wird

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} f}.$$

Daraus ergiebt sich, dass $\lambda / \mu > 1$ wenn $\operatorname{tg} \varphi > \operatorname{tg} f$ oder $\varphi > f$, d. h. wenn im Punkte (1) die Tangente der Curve einen grösseren Winkel mit der positiven y-Axe macht, als die Gerade (0, 1). Umgekehrt wenn $(\mu / \lambda) > 1$. Der entferntere Theil aller dieser Curven $(1, \infty)$ ist convex, das Stück (0, 1) derselben dagegen concav gegen die Gerade (0, 1).

Die Grenze dieses Büschels von Curven sind die, wo 1079
$\mu / \lambda = 0$ oder $= \infty$. Es sind dies die schon oben erwähnten geraden Linien gezogen durch den Punkt (1), parallel den Axen der x und der y.

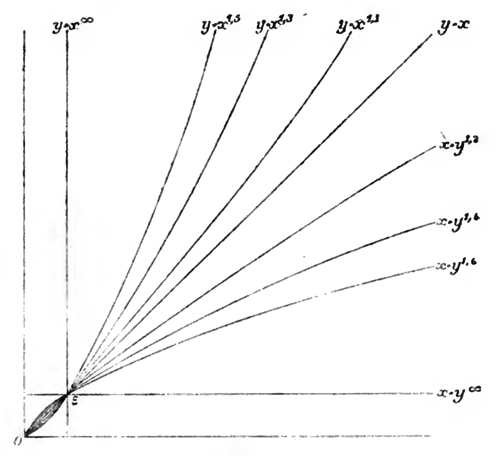


Fig 1.

Die Fig. 1 stellt ein Bündel solcher Curven dar, welche alle durch denselben Punkt (ε) gehen und verschiedene Exponenten haben, deren Werthe (1 bis 1,6) am Rande angegeben sind.

B. Projections-Curven mit zwei Asymptoten.

Wenn die beiden Exponenten der Gleichung entgegen gesetztes Zeichen haben, so können wir setzen

$$\frac{\mu}{\lambda} = -\varrho.$$

Dann ist ϱ eine positive Grösse und es wird

$$\frac{a+x}{a+x_1} = \left(\frac{b+y}{b+y_1}\right)^{-\varrho}.$$

Also wird für $a + x = 0$ das $b + y = \infty$, und für $a + x = \infty$ das $b + y = 0$, d. h. die durch den Punkt (0) den Coordinataxen parallel gezogenen Linien sind Asymptoten für die Curve, welche hyperbelähnlich mit zwei Enden in das Unendliche läuft. Aber diese in ∞ laufenden Enden der Curven liegen ausserhalb des Farbenfeldes, selbst ausserhalb des physiologisch möglichen, da dieses durch zwei gerade Linien begrenzt ist, die parallel den x und den y durch den Punkt (ε) gelegt sind. Das spectrale Farbenfeld ist noch enger durch einen spitzen Winkel begrenzt, dessen Scheitel ebenfalls im Punkte (ε) liegt, so dass von diesen hyperbelähnlichen Curven nur sehr kurze, fast gerade Stücke für kleine Lichtintensitäten, längere und gekrümmtere nur für grosse Intensitäten in Betracht kommen.

Wenn die oben mit ϱ bezeichnete Constante den Werth $\varrho = 1$ hat, so ist die Curve eine gleichseitige Hyperbel im strengen Sinne.

Da entweder zwei oder gar keines der Verhältnisse zwischen den Exponenten negativ ist, so können entweder zwei oder keine der Projectionscurven die hyperbelähnliche Form mit zwei Asymptoten haben. Eine von ihnen oder alle drei haben die parabelähnliche Form, und gehen durch den Punkt (0).

Farbenunterschiede bei gleicher Qualität und verschiedener Helligkeit. Die kürzesten Farbenreihen, welche durch den Punkt (ε) gehen, der dem Mangel alles objectiven
1080 Lichtes entspricht, geben drei parabelähnliche Projectionen,
welche auch durch den Punkt (0) gehen, wie Fig. 1 zeigt.

In der Mitte des Bündels liegt die als Principallinie bezeichnete Gerade, welche durch (0) und (ε) geht und die einzige

Linie bildet, welche gleichzeitig einer kürzesten Farbenreihe und gleichbleibender objectiver Qualität der Farbe (gleichem Mischungsverhältnisse) entspricht.

In den drei Ebenen, welche durch diese Linie und die Coordinataxen gehen, liegen ebene Curven, welche der Principallinie ihre convexen Seiten zukehren.

Um Farben dieser Ebenen objectiv herzustellen, würde man entweder einzelne Urfarben mit der Principalfarbe zu mischen haben, oder solche Farben, die mit der entsprechenden Urfarbe gemischt die Principalfarbe geben. Ich will die letzteren principale Gegenfarben nennen. Sind Carminroth, Ultramarinblau und Blattgrün im Farbenton den Urfarben entsprechend, und Gelb die Principalfarbe, so wären etwa Spangrün, Gelb und Purpur die principalen Gegenfarben. Von sämmtlichen Mischungen aller sechs Farben mit dem principalen Gelbweiss würde zu erwarten sein, dass sie alle innerhalb der Reihe der Farbentöne bleiben, welche die entsprechenden Mischungen hervorbringen können, und nur das Verhältniss würde geändert erscheinen, indem die lichtschwachen Farben dieser Art gesättigter erscheinen würden, als die gleich zusammengesetzten lichtstarken: da die lichtstarken, die in derselben kürzesten Farbenlinie liegen, in der That sich dem Umfange der Farbenpyramide nähern, also gesättigter erscheinen.

So werden also lichtschwaches Ultramarin und Gelb in ihrer Mischung einem lichtstarken weisslicheren Blau und Gelb gleich sein müssen. Die Zumischung von Weiss zum Blau wird relativ stärker sein als die zum Gelb, weil der gelbe Bestandtheil der Principalfarbe etwas Blau wegnimmt, und dafür noch etwas Weiss bildet, dem Gelb aber sich einfach hinzufügt.

Dagegen werden schwaches Urroth bis Purpur einerseits und Blattgrün bis Spangrün andererseits ihre objectiv gleichartigen lichtstarken Farben in etwas weisslicheren und gelblicheren Farbentönen finden.

Dieses Gelblichwerden der rothen und grünen Farbentöne bei hoher Lichtstärke, das Weisswerden des Blau sind schon oben erwähnt.

E. Brücke's Gesetz. Die Spectralfarben sind im Allgemeinen einer Urfarbe oder Mischungen aus je zweien solchen



sehr nahe in ihrem Farbentone. Wenn man die Linien solcher Mischungen auf die Ebene der beiden Urfarben projicirt denkt, so werden kürzeste Farbenreihen, die in bestimmter Richtung
1081 vom Punkte (ε), dem Punkte der objectiven Dunkelheit, auslaufen, wie in Fig. 1, alle convex gegen die Projection der Principallinie sein, und also im ferneren Verlaufe sich derjenigen Urfarbe nähern, von der sie durch die Principallinie nicht getrennt sind. Es werden also lichtschwache Farben, die der Mischung zweier Urfarben entsprechen, der auf gleicher Seite der Gegenfarbe liegenden Urfarbe sich nähern, wenn man nach den ähnlichsten gesättigteren lichtstärkeren Farben sucht.

Dies führt uns auf eine von E. Brücke[1]) im Jahre 1878 beschriebene Erscheinung. Er hat nämlich gefunden, dass aus einem gut gereinigten Spectrum von mässiger Länge, in dem man aber die stärkeren Fraunhofer'schen Linien noch gut sehen kann, bei allmählicher Abschwächung die gelben und die cyanblauen Farbentöne ganz verschwinden, und dass zwischen ihnen schliesslich nur drei Farben, Roth, Grün und Violettblau stehen bleiben. Der genannte Autor hat damals auch schon den Schluss gezogen, dass die genannten drei Farben die physiologischen Grundfarben sein müssen, indem er diejenigen Empfindungselemente einer gemischten Empfindung, die die Reizschwelle nicht überschreiten, als unwirksam auch in der gemischten Empfindung betrachtet. Es ist dies eine Betrachtungsweise, die der hier eingeschlagenen wesentlich verwandt ist.

Mischungen mit Weiss. Aehnliche Abweichungen, wie die bisher besprochenen zwischen dem Farbentone einer lichtschwachen und lichtstarken Farbe von gleicher objectiver Qualität kommen auch zwischen denen einer isolirten gesättigten Farbe und deren Mischung mit sehr vielem Weiss vor.

Wenn Weiss und eine Mischung dieses Weiss mit einer kleinen Menge einer Spectralfarbe als gegeben nach ihrem Orte in der Farbenpyramide angesehen werden, so lässt sich die kürzeste Farbenreihe, die durch die beiden Punkte führt,

[1]) E. Brücke: „Ueber einige Empfindungen im Gebiete des Sehnerven." Wiener Sitzungsber., Abth. III, Bd. LXXVIII, 1878.

construiren. Diese wird gegen einen Theil der Oberfläche der Farbenpyramide hin gerichtet sein, an der die gesättigten Farben derselben Reihe liegen, als deren stark mit Weiss verdünnte Modification die gegebene Mischung erscheint.

Dabei ist zu bemerken, dass, wenn man zu dem Weiss reine Urfarben hinzumischen könnte, die Verbindungslinie beider eine der entsprechenden Coordinataxe parallele Gerade werden würde, welche selbst eine kürzeste Farbenreihe ist und ihre Richtung nicht ändert. Die kürzeste Farbenreihe würde also mit der Mischungsreihe zusammenfallen, und keinerlei Aenderung des Farbentones zu bemerken sein.

Da aber die Spectralfarben immer als zusammengesetzte 1082
Farben anzusehen sind, in denen nur eine oder zwei der Urfarben merkliches Uebergewicht haben, so werden dadurch Krümmungen der kürzesten Farbenreihen möglich.

Um die Form der betreffenden Farbenreihe vollständig übersehen zu können, wird man sich im Allgemeinen je zwei Projectionen auf Grenzflächen der Farbenpyramide entwerfen müssen.

Das Curvenbündel der Fig. 1 würde auch bei etwas abgeänderten Verhältnissen seinen Charakter behalten. Deuten wir es jetzt so, dass wir den Punkt (ε) als die Projection des Weiss auf eine der Coordinatebenen betrachten; εx sei die Coordinatrichtung für die eine Grundfarbe, die zum Weiss hinzugethan werden kann, εy für die andere. Beide Linien entsprechen kürzesten Farbenreihen. Dann wird noch die mit $y = x$ bezeichnete Grade, sehr nahehin wenigstens, eine kürzeste Farbenlinie sein. Die Gleichung der letzteren, die in diese Richtung fällt, würde allerdings streng genommen, nicht $x = y$, sondern $a + x = b + y$ sein. Wenn aber die Coordinaten des Weiss so gross sind, dass die des Eigenlichts a, b dagegen verschwinden, wird der Unterschied unerheblich.

Nun sieht man, dass alle Curven, welche zwischen εx und $y = x$ liegen, concav gegen x, die anderen concav gegen y sind. Verfolgt man sie von E aus, so nähern sie sich im Fortlauf der näheren Grundfarbe, und weisen auf gesättigtere Abstufungen von dieser hin. Wenn wir also die Art der eingemischten Farbe nach den ähnlichsten, vom Weiss weniger

überdeckten Farbentönen beurtheilen, werden wir die Einmischung für ähnlicher der reinen Urfarbe x halten.

Spectrales Roth kann nach meinen neueren Bestimmungen als Urroth mit überwiegend grünlicher Einmischung betrachtet werden. In der Mischung mit Weiss würde das Grünliche mehr zurücktreten, die Farbe dem Urroth näher, also mehr rosenroth erscheinen, was in der That der Fall ist, und schon früher von Hrn. E. Hering angeführt wurde.

Violett, was aus gleichen Quantis Urroth und Urblau zusammengesetzt wäre, würde in der Projection auf die Blauroth-Ebene mit der Projection des Weiss fast dieselbe Richtung haben, und seine kürzeste Farbenreihe fast geradlinig sein. Es käme bei spectralem Violett nur in Betracht, dass es noch eine Einmischung von Grün hat, die in der Grünroth-Ebene, wie in der Grünblau-Ebene gegen das überwiegende Roth, bezüglich Blau mit steigender Entfernung vom Weiss schwinden würde. Dadurch würde die Farbe dem Complement des Grün, Rosenroth ähnlicher gemacht.

Geht man zu bläulicheren violetten Einmischungen über, so würde neben dem stärkeren Blau der rothe Bestandtheil
1083 des Violett zu schwinden anfangen, was anfangs noch durch das stärkere Schwinden des Grün compensirt würde. Ich fand, dass zwischen $\lambda = 450\ \mu\mu$ bis $\lambda = 430\ \mu\mu$ der Zusatz des spectralen Blau dem Weiss eine ziemlich deutlich rosenrothe Färbung gab; erst bei $\lambda = 470\ \mu\mu$ schwand dieser röthliche Ton.

Eine andere Reihe von scheinbaren Veränderungen der Farbe zeigt sich bei den kleinsten Lichtstärken, wo das letzte noch sichtbare Licht keine Farbenunterschiede mehr zeigt, sondern grau erscheint. Es erklärt sich das nach der aufgestellten Theorie dadurch, dass zur Unterscheidung der Helligkeit nur die ganze vorhandene Lichtmenge von absoluter Dunkelheit unterschieden werden muss. Zur Unterscheidung einer kleinen Menge Weiss von einem farbigen Licht, müsssen dagegen Verhältnisse von Lichtmengen zweier Grundfarben von einander unterschieden werden. So ist also z. B. nach meinen letzten Berechnungen in dem Quantum = 1 enthalten, nach Einheiten gleichen Farbenwerthes gemessen:

	von spectralem Roth	von Weiss
Roth	0,6093	0,3333
Grün	0,1998	0,3333
Blau	0,1913	0,3333

Die Unterscheidung der beiden Farben setzt voraus, dass die Verhältnisse der horizontal neben einander stehenden Zahlen vom Verhältniss 1 : 1 unterschieden werden können. Nach der Tabelle der Hrn. König und Brodhun[1]) würde dies eine dort mit 0,02 bezeichnete Lichtstärke verlangen, während bei der Helligkeit 0,00072, die fast dreissig Mal kleiner ist, noch Licht von Dunkelheit unterschieden wird.

Es fügt sich also das ganze Gebiet dieser scheinbar unregelmässigen Erscheinungen leicht unter die erweiterte Formulirung des Fechner'schen Gesetzes.

---

[1]) Sitzungsberichte der Berliner Akad. vom 27. Juni 1889, S. 643.

CXXXIV.

Das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik.[1]

Aus den Sitzungsber. der Berliner Akad. vom 12. Mai 1892. — Wied. Ann., Bd. XLVII. S. 1 bis 26. 1892.

---

§ 1. Einleitung.

Ich habe in meinen früheren Arbeiten über das Princip der kleinsten Wirkung[2]) gezeigt, dass es auch auf unvollständige Formen des Problems passt, in denen einzelne Coordinaten eliminirt werden konnten, weil einzelne Kräfte, die sonst hätten eingreifen können, fehlten oder nicht wirksam wurden, und dass dabei ganz abweichende Formen des kinetischen Potentials eintreten können, in denen die Trennung der beiden Formen der Energie nicht mehr zu erkennen ist, wo vielmehr die Function H, welche als das *kinetische Potential* bezeichnet wurde, irgend welche Function der allgemeinen Coordinaten p_a und der entsprechenden Geschwindigkeiten $q_a = d\,p_a \,/\, d\,t$ sein kann. Immer ist dabei vorauszusetzen, dass der Zustand des Systems in jedem Augenblicke durch die Werthe der Grössen p_a, q_a und eventuell eine Anzahl unveränderlicher Grössen vollständig bestimmt sei.

---

[1]) Für den vorliegenden Abdruck hat der Verfasser den Wortlaut an mehreren Stellen beträchtlich umgestaltet; doch ist dabei nirgends der wesentliche Sinn geändert worden. Wo Aenderungen an Gleichungen ausgeführt worden sind, habe ich dieses in einer Anmerkung jedesmal besonders bemerkt. (Vergl. die auf diese Abhandlung bezüglichen Bemerkungen im Vorworte. A. K.)

[2]) Journal für a. u. r. Mathematik 100, p. 141. 163. — Abgedruckt auf S. 207—209 und 233—234 des vorliegenden Bandes.

Hamilton's Principalform des Princips der kleinsten Wirkung hat den Vortheil, dass in ihr der Werth der potentiellen Energie auch von der Zeit abhängig sein darf, und dass sie also Glieder aufnehmen kann, welche veränderliche äussere Kräfte enthalten, oder Kräfte, die nicht zu den conservativen reinen Bewegungskräften gehören, vielmehr die Einmischung anderer physikalischer Processe erfordern. Ich habe schon in meinem früheren Aufsatze diesen Umstand benutzt, um Lagrange's Ausdrücke für die Kräfte, die im Sinne der einzelnen Coordinaten wirken, daraus herzuleiten. Bezeichnen 2
wir, wie dort, mit P_a die Kräfte, welche in Richtung der p_a wirken, d. h. setzen wir fest, dass $P_a \, \delta p_a$ die Arbeit sei, welche das System abgiebt, wenn nur die Aenderung δp_a in ihm eintritt, und dass gleichzeitig P_a ein solches Aggregat von Kraftcomponenten sei, dass es keine Arbeit leistet, wenn irgend eine andere Coordinate des Systems sich ändert, so ist Hamilton's Form des Princips so zu formuliren:

$$\text{(A)} \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} [\, \Phi + \Sigma \{ P_a \cdot p_a \} - L \,] \, dt = 0$$

und darin die Variation nach allen p_a auszuführen, während die P_a als nicht zu variirende Functionen der Zeit gelten. Es folgen daraus die bekannten Werthe, wie sie Lagrange gegeben:

$$\text{(A}_1\text{)} \qquad P_a = -\frac{\partial \Phi}{\partial p_a} + \frac{\partial L}{\partial p_a} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial q_a}\right].$$

Die wesentliche Bedingung aber, damit dieser Werth der Kraft gewonnen wird, ist die, dass unter dem Integralzeichen die P_a nicht mit Coëfficienten multiplicirt sind, die q_a enthalten; sonst erscheint bei der Variation unter dem Integralzeichen P_a multiplicirt mit $\partial \, \delta p_a / \partial t$, welches letztere man, sobald auch P_a von t abhängig ist, nicht mehr durch partielle Integration fortschaffen und auf $\delta \, p_a$ so zurückführen kann, dass der Werth von P_a rein heraustritt.

Diese Bedingung wird nun auch erfüllt werden müssen, wenn das kinetische Potential $[\Phi - L]$ durch Elimination in eine andere Form H gebracht ist, wo das H irgend welche Function der p und q_a bedeutet. Auch dann dürfen die

Coëfficienten der P_a nicht die q_a enthalten, während sehr wohl Formen denkbar wären, wo mehrere Kräfte P_a zusammengefasst werden könnten in ein P, welches mit einer Function der Coordinaten allein multiplicirt wäre.

Der Werth der gesammten Energie E des Systems war dort gefunden worden:

$$(A_2) \qquad E = + H - \Sigma_a \left[\frac{\partial H}{\partial q_a} . q_a \right].$$

Für jede durch die Bedingung A bestimmte Bewegung des Systems gilt dann die Gleichung:

3 $$(A_3) \qquad - \frac{dE}{dt} = + \Sigma \left\{ P_a . \frac{dp_a}{dt} \right\}.$$

Rechts steht hier der Werth der vom System nach aussen abgegebenen Arbeit, für die Zeiteinheit berechnet, links der entsprechende Verlust der Energie des Systems; diese Gleichung spricht also das Princip von der Constanz der Energie für jedes System aus, dessen Bewegungen in der besprochenen Form dargestellt werden können.

Nun erlauben uns physikalische Untersuchungen meistens auch an einem System von unbekannter Zusammensetzung und unbekannten inneren Kräften, welches durch wechselnde Zustände hindurchgeht, die durch messbare äussere Zeichen erkennbar sind, zu bestimmen, wie viel Arbeitsäquivalente von dem System während der verschiedenartigen möglichen Veränderungen seines Zustandes aufgenommen oder abgegeben werden. Bezeichnen wir also solche Zustände des Systems durch eine Reihe messbarer Grössen $\mathfrak{p}_a$, $\mathfrak{r}_a$, so werden sich im allgemeinen bestimmen lassen die Arbeitsquanta ($\mathfrak{P}_a . d\,\mathfrak{p}_a$), bez. ($\mathfrak{R}_a . d\,\mathfrak{r}_a$), welche das System abgiebt, wenn in ihm die durch $d\,\mathfrak{p}_a$ gemessene Aenderung des Zustandes $\mathfrak{p}_a$ oder $d\,\mathfrak{r}_a$ des Zustandes $\mathfrak{r}_a$ eintritt. Dabei müssen natürlich alle Arten von Arbeitsäquivalenten berücksichtigt werden, also namentlich auch die etwa entwickelte Wärme. Wir werden uns im allgemeinen also auch für ein System von ganz unbekannter innerer Zusammensetzung eine Kenntniss davon verschaffen können, in welcher Weise die Function E abhängig ist von den $\mathfrak{p}_a$, $\mathfrak{r}_a$, die den augenblicklichen Zustand bestimmen. Natürlich wird der Werth von E eine willkürliche additive Constante

enthalten, da immer nur Differenzen von E, die verschiedenen Zuständen entsprechen, gemessen werden können.

Eine solche Untersuchung wird gleichzeitig ergeben, ob das Gesetz von der Erhaltung der Energie in dem Systeme erfüllt ist, oder ob wir noch nach anderen bisher unbekannten Veränderungen suchen müssen, welche Energiemengen entsprechen.

Nehmen wir an, das Gesetz der Energie bestätige sich, so dass wir den Werth von E als Function der $\mathfrak{p}_a$ und $\mathfrak{r}_a$ wirklich zu kennen annehmen dürfen, wie es z. B. im Gebiete der elektromagnetischen Erscheinungen in der That der Fall ist, so würde weiter nach dem *kinetischen Potential* des Systems 4
zu fragen sein.

In einem Systeme ponderabler Körper, dessen innere Kräfte conservativ sind, wissen wir in der Regel, welche von den Grössen $\mathfrak{p}_a$ und $\mathfrak{r}_a$ Coordinaten, und welche Geschwindigkeiten bezeichnen, und wir können die ersteren den früher gebrauchten p_a gleichsetzen, die Geschwindigkeiten den q_a. Dann ist es bis zu einer gewissen Grenze möglich, mittels der Gleichung (A_2) das H zu finden. Wie ich in meinen früheren Aufsätzen zeigte, bleibt nur unbestimmt eine lineare homogene Function der q_a, welche additiv zum Werthe des H hinzutritt, weil solche lineare Glieder aus dem Werthe des E sich wegheben.

Aber dies lässt sich nicht ausführen, wenn wir nicht erkennen können, welche der inneren Veränderungen des Systems Lagenänderungen einzelner Theile, welche dagegen Geschwindigkeitsänderungen unbekannter innerer Bewegungen, oder auch vielleicht Aenderungen der Bewegungsmomente entsprechen. Und in dieser Lage sind wir im Gebiete der Elektrodynamik. Wir haben es hier zu thun mit Elektrisirung und Magnetisirung einzelner Körper und Substanzen. Beide Zustände können dauernd bestehen. Elektrische Ströme rufen magnetische Kräfte, magnetische Aenderungen elektrische Kräfte hervor.

Wir werden also, ohne uns auf Gleichung (A_2) stützen zu können, versuchen müssen, ob wir die empirisch gefundenen Gesetze der Elektrodynamik, wie sie in Maxwell's Gleichungen ausgesprochen sind, in die Form eines Minimalsatzes bringen

können, und welche Analogien diese Form etwa mit der für ponderable Körper zeigt.

Andererseits ist aber zu bemerken, dass, wenn wir nicht von vornherein festsetzen oder durch die Schreibweise bezeichnen, dass $q_\mathfrak{a} = dp_\mathfrak{a} / dt$ sein solle, wir diese Beziehung durch Hinzufügung passender Glieder zu der Minimalgleichung aus dieser werden hervorgehen lassen können. Ich hatte schon in meiner früheren Arbeit[1]) die Gleichung (A) auf eine solche Form gebracht. Wenn nämlich der Werth der lebendigen Kraft L explicite als Function der $q_\mathfrak{a}$ gegeben ist,

5 $$(A_4) \qquad L = {}^1/_2 \cdot \Sigma_\mathfrak{a} \, \Sigma_\mathfrak{b} \, \{A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \cdot q_\mathfrak{a} \cdot q_\mathfrak{b}\},$$

so setze das kinetische Potential

$$(A_5) \quad A = \Phi + \Sigma_\mathfrak{a} [P_\mathfrak{a} \cdot p_\mathfrak{a}] + \Sigma_\mathfrak{a} \, \Sigma_\mathfrak{b} \left[A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \cdot q_\mathfrak{b} \left\{{}^1/_2 q_\mathfrak{a} - \frac{dp_\mathfrak{a}}{dt}\right\}\right].$$

Die Indices $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ werden beide als alle ganze Zahlen von 0 bis ∞ unabhängig voneinander durchlaufend betrachtet. Dann giebt die Variation nach $q_\mathfrak{b}$

$$\Sigma_\mathfrak{a} \left\{A_{\mathfrak{a}.\mathfrak{b}} \quad q_\mathfrak{b} \left[q_\mathfrak{a} - \frac{dp_\mathfrak{a}}{dt}\right]\right\} = 0$$

für alle Indices $\mathfrak{b}$. Da die Determinante der Coëfficienten $A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \cdot q_\mathfrak{b}$ wegen der Veränderlichen $q_\mathfrak{b}$ nicht allgemein gleich Null sein kann, folgt aus diesen Gleichungen:

$$\left(q_\mathfrak{a} - \frac{dp_\mathfrak{a}}{dt}\right) = 0,$$

während durch Variation der $p_\mathfrak{a}$ sich ergiebt

$$(A_6) \begin{cases} P_\mathfrak{a} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{a}} - \Sigma_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \left\{\dfrac{\partial A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{\partial p_\mathfrak{a}} \cdot q_\mathfrak{b} \left[{}^1/_2 q_\mathfrak{a} - \dfrac{dp_\mathfrak{a}}{dt}\right]\right\} + \dfrac{d}{dt} \Sigma \{A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \cdot q_\mathfrak{b}\} \\ \quad = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial p_\mathfrak{a}} + \dfrac{\partial L}{\partial p_\mathfrak{a}} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial q_\mathfrak{a}}\right) \end{cases}$$

wie in (A_1).

Wenn wir über das Wesen der elektrischen und magnetischen Kräfte und über die Natur des sie tragenden materiellen Substrats uns Vorstellungen bilden wollen, so wissen wir zu-

---

[1]) v. Helmholtz, Journal für Math. 100. p. 151. — Abgedruckt auf S. 219 des vorliegenden Bandes.

nächst, dass sie beide unter das Gesetz von der Constanz der Energie fallen; aber wir können freilich die beiden Formen der Energie nicht sicher von einander trennen, und wir wissen dann weiter nicht, ob sie an den anderen allgemeinen Eigenschaften aller conservativen Bewegungskräfte wägbarer Substanzen theilnehmen, die in dem Princip der kleinsten Wirkung ihren kürzesten Ausdruck finden, und wie ich gezeigt habe, eine Reihe von eigenthümlichen Reciprocitätsgesetzen zwischen den Kräften verschiedenen Ursprungs in einem Systeme wägbarer Massen zum Ausdruck bringen.

Darauf, dass in einem begrenzten Gebiete von elektro-
dynamischen Erscheinungen das Princip der kleinsten Wirkung
sich bewährt, habe ich schon in der citirten Arbeit aufmerksam
gemacht, nämlich soweit die von Hrn. F. E. Neumann auf- 6
gestellten und von mir erweiterten Potentialgesetze reichen,
für geschlossene Ströme, deren Zwischenräume frei von magne-
tischer und elektrischer Substanz sind.

Es lag nunmehr die Frage vor, ob das Princip auch die vollständigeren Gleichungen der Elektrodynamik in sich aufnehmen könne, wie sie Cl. Maxwell aufgestellt und Hr. H. Hertz mit expliciter Entwickelung der von der Bewegung des Medium abhängigen Glieder vervollständigt hat.

Abgesehen von den theoretischen Fragen über die Natur der zu Grunde liegenden Kräfte stellen sich auch noch Fragen über beobachtbare Erscheinungen dabei ein. Die Werthe der ponderomotorischen Kräfte in elektromagnetischen Systemen sind nämlich bisher nur aus dem Werthe der Energie hergeleitet worden. Ich habe indessen a. a. O. gezeigt, dass in solchen Fällen, wo das kinetische Potential Glieder enthält, die nach den Geschwindigkeiten linear sind, solche aus dem Werthe der Energie verschwinden und also auch die von ihnen herrührenden Kräfte nicht aus der Energie gefunden werden können. Nun kommen solche linearen Glieder in der That schon in dem nach Hrn. F. E. Neumann's Vorgang gebildeten kinetischen Potentiale vor, sobald permanente Magnete und geschlossene Ströme aufeinander wirken. Die Frage, ob nicht noch mehr dergleichen existiren, war ohne besonders darauf gerichtete Untersuchung nicht zu entscheiden.

In die in Gleichung (A) mit Φ bezeichnete Function kann nur die Arbeit conservativer Kräfte zusammengefasst werden, deren Betrag durch die augenblickliche Lage des Systems vollständig gegeben ist; eben deshalb können auch nur solche in die Function H eingehen. Alle nicht conservativen Kräfte, wie z. B. der reibungsähnliche Widerstand, den elektrische Bewegung in Leitern erleidet, sowie diejenigen Kräfte, welche von Massen, die nicht zum System gehören, und von deren veränderlichen Zuständen ausgeübt werden, können nur in die Reihe der Kräfte P_a eintreten, da diese beliebige Functionen der Zeit sein können.

In das kinetische Potential können wir also nur die Vorgänge in Isolatoren aufnehmen. In diesen können bekanntlich neben *dielektrischen Polarisationen, deren Momente für die*
7 *Volumeneinheit wir mit* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ bezeichnen, auch *magnetische Polarisationen*, theils *temporäre*, theils *permanente* vorkommen. Die Componenten der ersteren bezeichnen wir mit $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, die der anderen mit l, m, n. Angesammelte wahre Elektricität bleibt, wie unsere Gleichungen in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen ergeben werden, in einem Isolator den körperlichen Theilen, in denen sie liegt, unverändert anhaftend. Ihre *Raumdichtigkeit* σ ist bekanntlich gegeben durch die Grösse

$$\sigma = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}. \tag{1}$$

Als zu variirende Variable nehmen wir in das elektrokinetische Potential ausser den Componenten der dielektrischen Polarisation $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ noch die sogenannten Vectorpotentiale $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ auf, welche letzteren wir statt der magnetischen Momente einführen, mit denen sie durch die Gleichungen zusammenhängen sollen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{L} + l &= \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} \\ \mathfrak{M} + m &= \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} \\ \mathfrak{N} + n &= \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Da die $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ gar nicht in das zu variirende Integral eintreten, so haben die Gleichungen (2) hier nur die Bedeutung, dass sie eine Definition des Sinnes dieser Zeichen geben.

Nach vollendeter Variation werden wir erkennen, dass die so definirten Grössen dieselben Gleichungen erfüllen, wie die Werthe der temporären magnetischen Momente nach Maxwell thun, sodass wir sie mit ihnen identificiren können.

Die Grössen l, m, n sollen die permanenten magnetischen Momente bezeichnen, die innerhalb gewisser Grenzen wenigstens sich nicht verändern, und auch in dem betreffenden Substanzelement zu diesem unveränderte Richtung behalten. Bei Dehnungen und Torsionen des betreffenden Volumens, die ja an Magneten mit grosser Coercitivkraft immer äusserst unbedeutend bleiben, wenn dieselben nicht zerbrechen sollen, dürfen wir hier wohl annehmen, dass sie sich nicht wesentlich anders als temporärmagnetische Volumina bei denselben Eingriffen verhalten, und dass also die dadurch bedingten Aende- 8
rungen ihrer Componenten denselben Differentialgleichungen folgen; die wir unten für $(\mathfrak{L} + l)$ u. s. w. aus den Gleichungen (4d) ableiten werden, nämlich:

$$
(2a)\begin{cases}
0 = \frac{\partial l}{\partial t} + \alpha \left[\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial y}[\beta . l - \alpha . m] + \frac{\partial}{\partial z}[\gamma . l - \alpha . n \\
0 = \frac{\partial m}{\partial t} + \beta \left[\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial z}[\gamma . m - \beta . n] + \frac{\partial}{\partial x}[\alpha . m - \beta . l] \\
0 = \frac{\partial n}{\partial t} + \gamma \left[\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial x}[\alpha . n - \gamma . l] + \frac{\partial}{\partial y}[\beta . n - \gamma . m]
\end{cases}
$$

Die Grössen α, β, γ sind hierin den Componenten der Strömungsgeschwindigkeiten des Aethers parallel, beziehlich den Richtungen x, y, z. Falls diese Gleichungen auf physische Magnete nicht genau passen sollten, können die entsprechenden Abweichungen doch nur unbedeutende Correctionen hervorbringen.

Daraus folgt, wenn wir schreiben

$$
(2b) \qquad \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z} = -\tau ,
$$

$$
(2c) \qquad 0 = \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha \tau) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta \tau) + \frac{\partial}{\partial z}(\gamma \tau) ,
$$

d. h. dass $(\tau . dx . dy . dz)$ während der eintretenden Veränderungen constant bleibt. Die Grösse τ bedeutet hier die Raumdichtigkeit des permanenten Magnetismus in dem Volumen $dx . dy . dz$.

Aus den Gleichungen (2) ergiebt sich dann, dass

$$\text{(2d)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} = + \tau \, .$$

Der letzte Werth ist wiederum die Raumdichtigkeit des permanenten, beziehlich negativen temporären Magnetismus an den Polen eines Magneten, für den die Constanz des in jedem Körperelement enthaltenen Quantum auch in Maxwell's Gleichungen behauptet wird.

Hier ist noch zu bemerken, dass die Gleichungen (2) zwar die Werthe der $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ vollständig geben, wenn die $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ und l, m, n vollständig gegeben sind, dass aber die $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ nicht vollständig durch die Werthe der $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, und l, m, n bestimmt sind, selbst wenn wir als Grenzbedingung für den unendlichen Raum festhalten, dass die $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ in unendlicher Entfernung gleich Null sein sollen, was ja immer der Fall sein wird, wenn die elektrischen Bewegungen erst seit endlicher Zeit aus endlichem Raume sich in die Ferne verbreitet haben.

Um die Werthe der $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ vollständig zu bestimmen, würden wir noch den Werth finden müssen von

$$\text{(2e)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} = \Delta \, \Psi .$$

9 Wie sich Ψ bestimmt durch das Variationsproblem, werden wir nachher finden. Wenn dies geschehen, bestimmen sich $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ vollständig aus den Gleichungen (2) und (2e) in bekannter Weise.

Die Grössen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ werden betrachtet als Functionen der rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z fester Raumpunkte, die der Anfangslage des Systems zur Zeit $t = t_0$ entsprechen. Da aber das Medium, welches der Träger der elektromagnetischen Vorgänge ist, als beweglich vorgestellt werden soll, so müssen wir noch Verschiebungen der Punkte des Medium aus der Anfangslage desselben berücksichtigen. Deren Componenten mögen ξ, η, ζ sein und selbst Functionen von x, y, z, t, sodass $(x + \xi)$, $(y + \eta)$, $(z + \zeta)$ als die Coordinaten eines bestimmten identischen Punktes des Mediums zu betrachten sind. Wir wollen einen solchen einen *substantiellen Punkt* nennen, da wir ihm Masse, d. h. Trägheit, nicht sicher

zuschreiben können und die gewöhnlichere Bezeichnung „Massenpunkt“ deshalb nicht passt.

Die Geschwindigkeitscomponenten sind nach der oben gemachten Festsetzung zu bezeichnen als

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha, \quad \frac{d\eta}{dt} = \beta, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \gamma. \tag{2f}$$

Variationen der Lage eines substantiellen Punktes werden durch $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ gemessen werden. Die x, y, z brauchen wir nicht als variabel zu betrachten, weil wir jede im Verlaufe der Bewegung eingetretene Lage des Systems als Anfangslage für die Verschiebungen im folgenden Zeittheilchen dt betrachten und für sie die Bewegungsgleichungen bilden können, indem wir dabei die ξ, η, ζ als verschwindend kleine Grössen behandeln, ebenso wie ihre Differentialquotienten nach x, y und z.

Dem elektrokinetischen Potential Φ gebe ich folgenden Werth, den ich gleich aus mehreren Theilen zum Zwecke besserer Uebersicht zusammenfüge:

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_m + \Phi_q + R \tag{3}$$

$$\Phi_e = \iiint dx\,.\,dy\,.\,dz \left\{\frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{2\varepsilon}\right\}, \tag{3a}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_m = \iiint \frac{dx.dy.dz}{2\mu} \Bigg\{ & \left[\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} + l\right]^2 + \left[\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} + m\right]^2 \\ & + \left[\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + n\right]^2 \Bigg\}. \end{aligned}\right. \tag{3b}$$

$$\Phi_q = \Phi_{q,1} + \Phi_{q,2} + \Phi_{q,3}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_{q,1} &= A \iiint dx.dy.dz.\mathfrak{U} \left\{\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \alpha\,.\,\sigma + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{X}\,.\,\beta - \mathfrak{Y}\,.\,\alpha) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{X}\,.\,\gamma - \mathfrak{Z}\,.\,\alpha)\right\} \\ \Phi_{q,2} &= A \iiint dx.dy.dz.\mathfrak{V} \left\{\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \beta\,.\,\sigma + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{Y}\,.\,\gamma - \mathfrak{Z}\,.\,\beta) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Y}\,.\,\alpha - \mathfrak{X}\,.\,\beta)\right\} \\ \Phi_{q,3} &= A \iiint dx.dy.dz.\mathfrak{W} \left\{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \gamma\,.\,\sigma + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Z}\,.\,\alpha - \mathfrak{X}\,.\,\gamma) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{Z}\,.\,\beta - \mathfrak{Y}\,.\,\gamma)\right\}. \end{aligned}\right. \tag{3c}$$

Der letzte Theil R umfasst die inneren Kräfte, mit denen der

im Medium vorausgesetzte Process nach aussen wirkt und welche durch entgegengesetzte äussere balancirt werden müssen, um die in Φ vorausgesetzten Veränderungen ungestört ablaufen zu lassen.

$$(3\,\mathrm{d})\quad \begin{cases} R + \iiint\{[X.\mathfrak{X} + Y.\mathfrak{Y} + Z.\mathfrak{Z}] + A(u.\mathfrak{U} + v.\mathfrak{V} + w.\mathfrak{W}) \\ \qquad + (\Xi.\xi + \Upsilon.\eta + Z.\zeta)\}dx.dy.dz. \end{cases}$$

Darin seien X, Y, Z die Componenten der elektrischen, Ξ, Υ, Z der ponderomotorischen Kraft, u, v, w die Componenten elektrischer Strömung im Leiter.

Alle Raumintegrale sind über den unendlichen Raum zu erstrecken. Im Unendlichen sind die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, α, β, γ in der Weise gleich Null zu setzen, dass auch ihre über die unendliche Grenze genommenen Potentialfunctionen verschwinden. Solange keine Variationen der Lage ausgeführt werden, sind σ, l, m, n, ε und μ als unveränderlich in der Zeit, aber als continuirliche Functionen der Coordinaten anzusehen; bei Lagenänderungen dagegen betrachten wir ε und μ als unveränderlich an je einem Substanzpunkte anhaftend, l, m und n ebenso je einem substantiellen Linienelemente. Wir sehen also hier zunächst ab von dem Umstande, dass ε und μ thatsächlich nicht ganz unabhängig sind von der Intensität der Polarisation, bez. von der Deformation des Volumelementes. Sollten Discontinuitäten dieser Grössen an einzelnen Grenzflächen in besonderen Beispielen vorkommen, so sind diese immer als Grenzfälle continuirlichen Ueberganges zu behandeln.

11 Das Variationsproblem ist alsdann

$$(4)\qquad 0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} \Phi \,.\, d\,t.$$

Als unabhängige Variable werden wir darin die Grössen

$$(\mathfrak{U}\,.\,Dx),\ (\mathfrak{V}\,.\,Dy),\ (\mathfrak{W}\,.\,Dz),\ (\mathfrak{X}\,.\,Dy\,.\,Dz),\ (\mathfrak{Y})\,.\,Dz\,.\,Dx),\ (\mathfrak{Z}\,.\,Dx\,.\,Dy),\ \xi,\ \eta,\ \zeta$$

betrachten. Die ersten sechs sollen bezogen werden auf Linienelemente Dx, Dy, Dz, die mit dem Medium sich fortbewegen,

und die $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ auf diejenigen Componenten, welche in diese bewegten Linienelemente, bezüglich die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ auf diejenigen, welche in die Normalen der bewegten Flächenelemente hineinfallen. Wenn ξ, η, ζ nicht variirt werden, sind demgemäss $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ als unabhängige Variable zu behandeln, da sich die Dx, Dy, Dz unter dieser Voraussetzung nicht ändern. Dagegen treten bei der Variation der ξ, η, ζ gewisse weiter unten zu besprechende Bestimmungen über die davon abhängigen Variationen der an Raumgebilden haftenden gerichteten Grössen ein.

Nach diesen Festsetzungen erhält man folgende Gleichungen durch die Variation der sechs ersten Grössen als Bedingung für die Forderung (4) mit Berücksichtigung der in (2) gegebenen Bestimmungen, indem man den Regeln der Variationsrechnung entsprechend hierbei zunächst die ξ, η, ζ, α, β, γ als constant bleibende Werthe behandelt:

$$
(4\,\mathrm{a})\quad
\begin{cases}
0=\delta\mathfrak{U}\cdot\Big\{A\cdot u+\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu}\Big)-\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu}\Big)+A\Big[\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}+\alpha\cdot\sigma \\
\qquad+\dfrac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{X}\cdot\beta-\mathfrak{Y}\cdot\alpha)+\dfrac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{X}\cdot\gamma-\mathfrak{Z}\cdot\alpha)\Big]\Big\} \\
0=\delta\mathfrak{V}\cdot\Big\{A\cdot v+\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu}\Big)-\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu}\Big)+A\Big[\dfrac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}+\beta\cdot\sigma \\
\qquad+\dfrac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{Y}\cdot\gamma-\mathfrak{Z}\cdot\beta)+\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Y}\cdot\alpha-\mathfrak{X}\cdot\beta)\Big]\Big\} \\
0=\delta\mathfrak{W}\cdot\Big\{A\cdot w+\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu}\Big)-\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu}\Big)+A\Big[\dfrac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}+\gamma\cdot\sigma \\
\qquad+\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Z}\cdot\alpha-\mathfrak{X}\cdot\gamma)+\dfrac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{Z}\cdot\beta-\mathfrak{Y}\cdot\gamma)\Big]\Big\}.
\end{cases}
$$

Wenn das Medium ein Isolator ist, also $u=v=w=0$ so folgt aus diesen drei Gleichungen, indem man den Factor von $\delta\mathfrak{U}$ nach x, den von $\delta\mathfrak{V}$ nach y, den von $\delta\mathfrak{W}$ nach z 12
differentiirt und

$$\sigma=\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}$$

setzt, dass

$$(4\,\mathrm{b})\qquad 0=\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha\cdot\sigma)+\frac{\partial}{\partial y}(\beta\cdot\sigma)+\frac{\partial}{\partial z}(\gamma\cdot\sigma),$$

was die bekannte Bedingung dafür ist, dass das Quantum

$$[\sigma \,.\, d\,x \,.\, d\,y \,.\, d\,z]$$

in einem dauernd dieselben substantiellen Punkte umfassenden Volumen des Mediums unveränderlich ist.

In einem nicht isolirenden Medium, wo u, v, w von Null verschieden sein können, ergiebt sich

$$\frac{d}{d\,t}\{\sigma \,.\, d\,x \,.\, d\,y \,.\, d\,z\} = -\left(\frac{\partial\, u}{\partial\, x} + \frac{\partial\, v}{\partial\, y} + \frac{\partial\, w}{\partial\, z}\right) d\,x \,.\, d\,y \,.\, d\,z,$$

die aus der Lehre von den galvanischen Strömen bekannte Gleichung.

Ferner ergeben die Variationen von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ folgende Gleichungen[1]):

$$\text{(4c)}\left\{\begin{aligned}
0 &= +X + \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} - A\left\{\frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial\, t} + \frac{\partial}{\partial\, x}[\alpha\,.\,\mathfrak{U} + \beta\,.\,\mathfrak{V} + \gamma\,.\,\mathfrak{W}]\right.\\
&\qquad\left. + \beta\left[\frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial\,\mathfrak{V}}{\partial\, x}\right] + \gamma\left[\frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial\, z} - \frac{\partial\,\mathfrak{W}}{\partial\, x}\right]\right\}\\
0 &= +Y + \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - A\left\{\frac{\partial\,\mathfrak{V}}{\partial\, t} + \frac{\partial}{\partial\, y}[\alpha\,.\,\mathfrak{U} + \beta\,.\,\mathfrak{V} + \gamma\,.\,\mathfrak{W}]\right.\\
&\qquad\left. + \gamma\left[\frac{\partial\,\mathfrak{V}}{\partial\, z} - \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial\, y}\right] + \alpha\left[\frac{\partial\,\mathfrak{V}}{\partial\, x} - \frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial\, y}\right]\right\}\\
0 &= +Z + \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - A\left\{\frac{\partial\,\mathfrak{W}}{\partial\, t} + \frac{\partial}{\partial\, z}[\alpha\,.\,\mathfrak{U} + \beta\,.\,\mathfrak{V} + \gamma\,.\,\mathfrak{W}]\right.\\
&\qquad\left. + \alpha\left[\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial\, x} - \frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial\, z}\right] + \beta\left[\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial\, y} - \frac{\partial\,\mathfrak{V}}{\partial\, z}\right]\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Im Falle die äusseren elektromotorischen Kräfte $X = Y = Z = 0$ sind, oder von der Form $\partial\,\varphi \,/\, \partial\, x, \partial\,\varphi \,/\, \partial\, y, \partial\,\varphi \,/\, \partial\, z$, mit $\Delta\,\varphi = 0$, so gewinnt man aus diesen Gleichungen drei neue, indem man die Differentiationen ausführt, welche nöthig sind, um die Grösse

$$[\mathfrak{U}\,.\,\alpha + \mathfrak{V}\,.\,\beta + \mathfrak{W}\,.\,\gamma]$$

zu eliminiren. Dies ergiebt:

---

[1]) Es sind hier in diesen Gleichungen einige Druckfehler verbessert (1894).

13

$$
(4\text{d})\left\{
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) + A\Big\{\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{L}+l) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}[\beta(\mathfrak{L}+l) - \gamma(\mathfrak{M}+m)] + \frac{\partial}{\partial z}[\gamma(\mathfrak{L}+l) - \alpha(\mathfrak{N}+n)]\Big\} \\
0 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) + A\Big\{\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{M}+m) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}[\gamma(\mathfrak{M}+m) - \beta(\mathfrak{N}+n)] + \frac{\partial}{\partial x}[\alpha(\mathfrak{M}+m) - \beta(\mathfrak{L}+l)]\Big\} \\
0 &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) A + \Big\{\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{N}+n) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x}[\alpha(\mathfrak{N}+n) - \gamma(\mathfrak{L}+l)] + \frac{\partial}{\partial y}[\beta(\mathfrak{N}+n) - \gamma(\mathfrak{M}+m)]\Big\}.
\end{aligned}\right.
$$

Für die Aenderungen der Grössen l, m, n haben wir oben die Gleichungen (2a) als annähernd richtig festgesetzt; wenn wir sie der Reihe nach mit A multiplicirt zu den Gleichungen (4d) addiren, erhalten wir

$$
(4\text{f})\left\{
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) + A\Big\{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} + \alpha . \tau + \frac{\partial}{\partial y}[\beta . \mathfrak{L} - \alpha . \mathfrak{M}] \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial z}[\gamma . \mathfrak{L} - \alpha . \mathfrak{N}]\Big\} \\
0 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) + A\Big\{\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + \beta . \tau + \frac{\partial}{\partial z}[\gamma . \mathfrak{M} - \beta . \mathfrak{N}] \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial x}[\alpha . \mathfrak{M} - \beta . \mathfrak{L}]\Big\} \\
0 &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) + A\Big\{\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} + \gamma . \tau + \frac{\partial}{\partial x}[\alpha . \mathfrak{N} - \gamma . \mathfrak{L}] \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial y}[\beta . \mathfrak{N} - \gamma . \mathfrak{M}]\Big\}
\end{aligned}\right.
$$

Die Gleichungen (4f) und (4a) stimmen mit den von Hrn. H. Hertz gegebenen Gleichungen (1a) und (1b) in Wiedemann's Annalen Bd. 41 p. 374 dem Sinne nach überein. Die Bezeichnungen sind im wesentlichen übereinstimmend. Nur sind unsere Constanten ε und μ dort $4\pi\varepsilon$ und $4\pi\mu$ geschrieben: Ferner sind die hier vorkommenden elektromotorischen Kräfte X, Y, Z die von dem elektromagnetischen System nach aussen hin wirkenden, und haben deshalb das entgegengesetzte Zeichen, als die, welche die Momente $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ her-

vorbringen. Ebenso treten an die Stelle der magnetischen Kräfte L, M, N, wie sie bei Hertz vorkommen, deren Werthe durch die Momente ausgedrückt.

14 Die Behandlung des etwa vorkommenden permanenten Magnetismus ist etwas verschieden. Bei Hertz wird permanenter Magnetismus an den Polen eines Stahlmagnets nur in derselben Weise als constante dort angesammelte Quantität behandelt, wie wahre Elektricität in einem Isolator. Auf die molekulare Vertheilung braucht dort, wie auch in unseren letzten Gleichungen (4 f), keine Rücksicht genommen zu werden; die in den Gleichungen (4 c) enthaltenen Sätze ergeben sich dann in dem Sinne, dass auch die innern magnetischen Momente des Stahlmagneten nur als temporär durch die Polmassen inducirt erscheinen. Aber die Ableitung der Constanz der Polmassen zwang mich zu dem abweichenden Wege, bei welchem die unterscheidende Thatsache festgehalten wird, dass bleibende molekulare Magnetisirung in den die Polmassen verbindenden gleichartigen Substanztheilen erkennbar ist.

Die Function Ψ der Gleichung (2 e) kann aus den Gleichungen (4 c) hergeleitet werden; man erhält dadurch aber keine Gleichung, die mehr aussagte, als aus Maxwell's Gleichungen durch Integration folgt.

Variation der Lage. Um die ponderomotorischen Kräfte zu finden, muss man die Lage der substantiellen Punkte, d. h. die Grössen ξ, η, ζ variiren. Dabei sind, wie schon oben bemerkt, nicht mehr $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ sondern nunmehr

$$(\mathfrak{U} . Dx), \quad (\mathfrak{V} . Dy), \quad (\mathfrak{W} . Dz),$$
$$(\mathfrak{X} . Dy . Dz), \quad (\mathfrak{Y} . Dz . Dx), \quad (\mathfrak{Z} . Dx . Dy)$$

als unabhängige Variable zu behandeln, die bei der Variation der ξ, η, ζ unverändert ihren Werth behalten sollen. Ferner ist oben festgesetzt, dass ε und μ in jedem substantiellen Punkte constant bleiben sollen, σ und τ in jedem Körpervolumelement. Dadurch wird bedingt, dass in das räumliche Elementarvolum $(dx . dy . dz)$ andere substantielle Punkte mit anderen Werthen der genannten Grössen einrücken. Wenn wir dies durchführen, so kann die Integration durch den unendlichen Raum wie bisher nach den unverändert bleibenden Volumelementen

$d\,x\,.\,d\,y\,.\,d\,z$ ausgeführt werden, nur müssen mit jedem einzelnen derselben diejenigen Werthe der in ihnen enthaltenen veränderlichen Grössen multiplicirt werden, die durch die nunmehr eingetretene Variation bedingt sind.

Wir werden zunächst die in diesem Sinne genommenen Variationen zu bestimmen haben, die den an verschiedenen Arten von substantiellen Raumgebilden haftenden Grössen zukommen.

1. *Grössen, deren Werthe an einem materiellen Punkte haften;* wir rechnen dahin die dielektrische und magnetische Constante der Substanz, ε und μ. Da die mögliche Aenderung dieser Constanten durch Dehnung oder Compression der tragenden Substanz in den Arbeiten von Maxwell und Hertz nicht berücksichtigt sind, und es zunächst nur darauf ankommt, in wieweit deren Sätze zu reproduciren sind, so setzen wir:

$$0 = \delta\,\varepsilon + \frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,x}\,.\,\xi + \frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,y}\,.\,\eta + \frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,z}\,.\,\zeta$$

oder umgeschrieben:

$$\delta\,\varepsilon = -\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,x}\,.\,\xi - \frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,y}\,.\,\eta - \frac{\partial\,\varepsilon}{\partial\,z}\,.\,\zeta \tag{5}$$

und ebenso

$$\delta\,\mu = -\frac{\partial\,\mu}{\partial\,x}\,.\,\xi - \frac{\partial\,\mu}{\partial\,y}\,.\,\eta - \frac{\partial\,\mu}{\partial\,z}\,.\,\zeta. \tag{5a}$$

Darin bezeichnet $\delta\,\varepsilon$ die Aenderung des Werthes, welche im Punkte $x,\ y,\ z$ durch die Verschiebung hervorgebracht wird, während jeder einzelne materielle Punkt des Substrats seinen Werth von ε unverändert behält.

2. *Grössen, deren Quantum in einem Volumen constant bleibt.* Wir rechnen dahin das Quantum wahrer Elektricität und wahren Magnetismus, deren Dichtigkeiten oben mit σ und τ bezeichnet sind.

Bezeichnen wir wieder mit $\delta\,\sigma$ die Aenderung der Dichtigkeit in dem Punkte $(x,\ y,\ z)$, so ist

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\,[\sigma\,.\,d\,x\,.\,d\,y\,.\,d\,z] \\ &= dx\,.\,dy\,.\,dz\left\{\delta\,\sigma + \frac{\partial\,\sigma}{\partial\,x}\,.\,\xi + \frac{\partial\,\sigma}{\partial\,y}\,.\,\eta + \frac{\partial\,\sigma}{\partial\,z}\,.\,\zeta + \sigma\,.\,\frac{\delta\,(dx\,dy\,dz)}{dx\,dy\,dz}\right\}; \end{aligned}$$

oder da

$$\frac{\delta(d\,x\,d\,y\,d\,z)}{d\,x\,.\,d\,y\,.\,d\,z} = \frac{\partial\,\xi}{\partial\,x} + \frac{\partial\,\eta}{\partial\,y} + \frac{\partial\,\zeta}{\partial\,z},$$

so ergiebt sich:

$$\delta\,\sigma = -\frac{\partial}{\partial\,x}(\xi\,.\,\sigma) - \frac{\partial}{\partial\,y}(\eta\,.\,\sigma) - \frac{\partial}{\partial\,z}(\zeta\,.\,\sigma). \tag{5b}$$

16 Ebenso

$$\delta\,\tau = -\frac{\partial}{\partial\,x}(\xi\,.\,\tau) - \frac{\partial}{\partial\,y}(\eta\,.\,\tau) - \frac{\partial}{\partial\,z}(\zeta\,.\,\tau). \tag{5c}$$

3. *Producte eines Vectors mit einem Linienelement seiner Richtung.* Wir beginnen damit zu verlangen, dass für beliebige Werthe der $D\,x$, $D\,y$, $D\,z$ die Variation:

$$\delta\,\{\mathfrak{U}\,.\,D\,x + \mathfrak{V}\,.\,D\,y + \mathfrak{W}\,.\,D\,z\} = 0. \tag{6}$$

Zu der nach dem Schema (5) gebildeten Aenderung durch Aenderung des Orts, kommen hier noch die Aenderungen der $D\,x$, $D\,y$, $D\,z$, welche sind[1]):

$$\left\{\begin{aligned}
\delta\,D\,x &= \frac{\partial\,\delta\,\xi}{\partial\,x}\,.\,D\,x + \frac{\partial\,\delta\,\xi}{\partial\,y}\,.\,D\,y + \frac{\partial\,\delta\,\xi}{\partial\,z}\,.\,D\,z\\
\delta\,D\,y &= \frac{\partial\,\delta\,\eta}{\partial\,x}\,.\,D\,x + \frac{\partial\,\delta\,\eta}{\partial\,y}\,.\,D\,y + \frac{\partial\,\delta\,\eta}{\partial\,z}\,.\,D\,z\\
\delta\,D\,z &= \frac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,x}\,.\,D\,x + \frac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,y}\,.\,D\,y + \frac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,z}\,.\,D\,z.
\end{aligned}\right. \tag{6a}$$

Wenn man diese Werthe in Gleichung (6) einsetzt und berücksichtigt, dass die dann entstehende Gleichung für beliebige Verhältnisse der Dx, Dy, Dz gelten soll, erhält man:

$$\begin{aligned}
0 = \delta\,\mathfrak{U} = \mathfrak{U}\,.\,\frac{\partial\,\delta\,\xi}{\partial\,x} + \mathfrak{V}\,.\,\frac{\partial\,\delta\,\eta}{\partial\,x} + \mathfrak{W}\,.\,\frac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\,x}\\
+ \delta\,\xi\,.\,\frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial\,x} + \delta\,\eta\,.\,\frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial\,y} + \delta\,\zeta\,.\,\frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial\,z}.
\end{aligned}$$

oder[2])

---

[1]) In diesen und den folgenden Gleichungen sind im vorliegenden Abdruck mehrere Fehler des Originals verbessert (1894).

[2]) Dieses Schema ist von mir schon in Borchardt's Journal für r. u. a. Mathematik gegeben 78. p. 307—309. — Abgedruckt auf S. 742 bis 745 des ersten Bandes der vorliegenden Sammlung (1894).

$$
(6\text{b}) \left\{
\begin{aligned}
-\delta\,\mathfrak{U} &= \frac{\partial}{\partial x}[\mathfrak{U}.\delta\,\xi+\mathfrak{V}.\delta\,\eta+\mathfrak{W}\,.\,\delta\,\zeta]+\delta\,\eta\left[\frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial\,y}-\frac{\partial\,\mathfrak{V}}{\partial\,x}\right] \\
&\qquad +\delta\,\zeta\left[\frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial\,z}-\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial\,x}\right] \\
-\delta\,\mathfrak{V} &= \frac{\partial}{\partial\,y}[\mathfrak{U}.\delta\,\xi+\mathfrak{V}.\delta\,\eta+\mathfrak{W}\,.\,\delta\,\zeta]+\delta\,\zeta\left[\frac{\partial\,\mathfrak{V}}{\partial\,z}-\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial\,y}\right] \\
&\qquad +\delta\,\xi\left[\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\,x}-\frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial\,y}\right] \\
-\delta\,\mathfrak{W} &= \frac{\partial}{\partial\,z}[\mathfrak{U}.\delta\,\xi+\mathfrak{V}.\delta\,\eta+\mathfrak{W}.\,\delta\,\zeta]+\delta\,\xi\left[\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial\,x}-\frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial\,z}\right] \\
&\qquad +\delta\eta\left[\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial\,y}-\frac{\partial\,\mathfrak{V}}{\partial\,z}\right]
\end{aligned}
\right.
$$

Wenn der hier gefundene Werth von $\delta\,\mathfrak{U}$ nicht gleich Null ist, so bezeichnet das $\delta\,\mathfrak{U}\,/\,\delta\,t$ den wirksamen Theil der Veränderung von $\mathfrak{U}$, welcher neue elektromotorische Kräfte erregt, wie die Gleichungen (4c) erkennen lassen.

Die Grössen $\delta\,\mathfrak{U}$, $\delta\,\mathfrak{V}$, $\delta\,\mathfrak{W}$ sind hier wiederum die Aen- 17
derungen, welche im Punkt x. y, z und seiner Nachbarschaft eintreten müssen in den Werthen der Componenten $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, damit der Werth, dessen Variation in (6) gleich Null gesetzt ist, sich nicht ändere. Wenn die hier berechneten Variationen continuirlich mit constanter Geschwindigkeit im Zeittheilchen $\delta\,t$ vor sich gehen, wird also

$$
\begin{aligned}
\delta\,\mathfrak{U} &= \frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial\,t}\,.\,\delta\,t \\
\delta\,\xi &= \frac{\partial\,\xi}{\partial\,t}\,.\,\delta\,t = a\,.\,\delta\,t \\
\delta\,\eta &= \frac{\partial\,\eta}{\partial\,t}\,.\,\delta\,t = \beta\,.\,\delta\,t \\
\delta\,\zeta &= \frac{\partial\,\zeta}{\partial\,t}\,.\,\delta\,t = \gamma\,.\,\delta\,t
\end{aligned}
$$

Setzt man

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{d\,\mathfrak{U}}{d\,t}\right] = \frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial\,t}+\frac{\partial}{\partial\,x}[\mathfrak{U}\,.\,a+\mathfrak{V}\,.\,\beta+\mathfrak{W}\,.\,\gamma]+\beta\left[\frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial\,y}-\frac{\partial\,\mathfrak{V}}{\partial\,x}\right] \\
+\gamma\left[\frac{\partial\,\mathfrak{U}}{\partial\,z}-\frac{\partial\,\mathfrak{W}}{d\,x}\right]
\end{aligned}
$$

und analog für die anderen Coordinatrichtungen, so sind

$$
\left[\frac{d\,\mathfrak{U}}{d\,t}\right]=\left[\frac{d\,\mathfrak{V}}{d\,t}\right]=\left[\frac{d\,\mathfrak{W}}{d\,t}\right]=0
$$

die Bedingungen für die Forderung der Gleichung (6), dass die nur durch die Lagenänderungen bedingten Variationen der Grösse $[\mathfrak{U} . Dx + \mathfrak{V} . Dy + \mathfrak{W} . Dz]$ gleich Null seien. Sind die Grössen $[d\,\mathfrak{U} / dt]$, $[d\,\mathfrak{V} / dt]$, $[d\,\mathfrak{W} / dt]$ aber nicht gleich Null, so geben ihre Beträge offenbar diejenigen Zunahmen von $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ an, welche unabhängig von der Lagenänderung des Elements Ds in diesem vorgehen, und die in den Gleichungen (4c) vorkommen, welche letzteren man demgemäss schreiben kann:

$$-X = \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} - A . \left[\frac{d\,\mathfrak{U}}{dt}\right]$$

$$-Y = \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - A . \left[\frac{d\,\mathfrak{V}}{dt}\right]$$

$$-Z = \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - A . \left[\frac{d\,\mathfrak{W}}{dt}\right]$$

4. *Product aus einem Flächenelement mit einem Vector, der die Richtung von dessen Normale hat.* Bei der Variation der
18 ξ, η, ζ soll für beliebige Werthe der Dx, Dy, Dz constant bleiben:

$$(7) \qquad 0 = \delta \{ \mathfrak{X} . Dy . Dz + \mathfrak{Y} . Dz . Dx + \mathfrak{Z} . Dx . Dy \}.$$

Wieder treten die Variationen wegen Aenderung des Ortes nach dem Schema der Gleichung (5) ein, und dazu kommen die Variationen des

$$\delta [Dy . Dz] = Dy . \delta Dz + Dz . \delta Dy ,$$

worin die Werthe der Variationen δDy, δDz wieder aus den Gleichungen (6a) zu nehmen sind, und wiederum die aus (7) entstehende Gleichung für alle Verhältnisse der Dx, Dy, Dz gelten muss:

$$-\delta \mathfrak{X} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} . \delta \xi + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} . \delta \eta + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} . \delta \zeta + \left(1 + \frac{\partial \delta \eta}{\partial y} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial z}\right) . \mathfrak{X} - \frac{\partial \delta \xi}{\partial y} . \mathfrak{Y} - \frac{\partial \delta \xi}{\partial z} . \mathfrak{Z}$$

oder

$$(7a)\begin{cases} -\delta\mathfrak{X} = \delta\xi\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right]+\frac{\partial}{\partial y}[\mathfrak{X}\,.\,\delta\eta-\mathfrak{Y}\,.\,\delta\xi] \\ \qquad\qquad+\frac{\partial}{\partial z}[\mathfrak{X}\,.\,\delta\zeta-\mathfrak{Z}\,.\,\delta\xi] \\ -\delta\mathfrak{Y} = \delta\eta\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right]+\frac{\partial}{\partial z}[\mathfrak{Y}\,.\,\delta\zeta-\mathfrak{Z}\,.\,\delta\eta] \\ \qquad\qquad+\frac{\partial}{\partial x}[\mathfrak{Y}\,.\,\delta\xi-\mathfrak{X}\,.\,\delta\eta] \\ -\delta\mathfrak{Z} = \delta\zeta\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right]+\frac{\partial}{\partial x}[\mathfrak{Z}\,.\,\delta\xi-\mathfrak{X}\,.\,\delta\zeta] \\ \qquad\qquad+\frac{\partial}{\partial y}[\mathfrak{Z}\,.\,\delta\eta-\mathfrak{Y}\,.\,\delta\zeta] \end{cases}$$

Betrachtet man wieder die Variationen als in der Zeit continuirlich eintretende Veränderungen, so erhalten wir die Gleichungen (4a) in ihrer ursprünglichen Form, die sie bei Maxwell haben:

$$0 = A\,u+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)+A\,.\left[\frac{d\,\mathfrak{X}}{d\,t}\right],$$

u. s. w.

worin

$$\left[\frac{d\,\mathfrak{X}}{d\,t}\right]=\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}+\alpha\,\sigma+\frac{\partial}{\partial y}[\beta\,.\,\mathfrak{X}-\alpha\,.\,\mathfrak{Y}]+\frac{\partial}{\partial z}[\gamma\,.\,\mathfrak{X}-\alpha\,.\,\mathfrak{Z}].$$ 19

wie bei H. Hertz.[1])

Dieses $[D\,y\,.\,D\,z\,.\,d\,\mathfrak{X}\,/\,d\,t]$ ist die durch das substantielle Flächenelement $D\,y\,.\,D\,z$ in der Zeiteinheit fliessende Menge Elektricität. Die beiden anderen Grössen $[D\,z\,.\,D\,x\,.\,d\,\mathfrak{Y}\,/\,d\,t]$ und $[D\,x\,.\,D\,y\,.\,d\,\mathfrak{Z}\,/\,d\,t]$ haben die analoge Bedeutung für die andern beiden Coordinatenrichtungen.

Ich erlaube mir darauf aufmerksam zu machen, dass es sich auch hier in Maxwell's Theorie, nach der von Hrn. H. Hertz gegebenen, mit der unserigen übereinstimmenden Fassung bei den elektromagnetischen Wirkungen der elektrischen Bewegungen immer um relative Bewegungen der Elektricität gegen das die elektrischen Wirkungen tragende Medium handelt.

---

1) H. Hertz, Wied. Ann. 41. p. 374. Dort sind die partiellen Differentialquotienten nicht durch das Zeichen ∂ unterschieden.

Die von Hrn. Rowland beobachteten elektromagnetischen Wirkungen einer mit statischer Elektricität geladenen Scheibe müssen durch Mitbewegung des Aethers erklärt werden.

5. *Die Variationen der Geschwindigkeitscomponenten* α, β, γ ergeben sich am besten in folgender Weise.

Die Quantität Substanz, welche im Zeittheilchen dt durch ein Flächenelement $Dy.Dz$ fliesst, beträgt, wenn wir die Dichtigkeit der Substanz mit ϱ bezeichnen $(\varrho.\alpha.Dy.Dz.dt)$. Wenn die Verschiebungen ξ, η, ζ eintreten, würde aber nicht genau dieselbe Masse, welche vermöge der anfänglichen Geschwindigkeiten α, β, γ durchgehen sollte, durchgegangen sein, sondern davon würde abgehen, was an Masse zwischen der ersten und zweiten Lage der Fläche $Dy.Dz$ zu Anfang und Ende des Zeitraumes dt liegt, falls die Geschwindigkeit $\partial\xi/\partial t$ positiv ist.

Es ist also zu setzen:

$$\delta[\varrho.\alpha.Dy.Dz] - \varrho.Dy.Dz.\frac{\partial\delta\xi}{\partial t} = 0$$

Weiter lässt sich zeigen, dass die Variationen von $\varrho\alpha$, $\varrho\beta$, $\varrho\gamma$ unter das Schema (7a) fallen[1])

$$(8)\quad \begin{cases} \varrho.\dfrac{\partial\delta\xi}{\partial t} = \delta(\varrho\alpha) + \delta\xi\left[\dfrac{\partial(\varrho\alpha)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\varrho\beta)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\varrho\gamma)}{\partial z}\right] \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial y}[\varrho\alpha\delta\eta - \varrho\beta\delta\xi] + \dfrac{\partial}{\partial z}[\varrho\alpha\delta\zeta - \varrho\gamma\delta\xi]. \end{cases}$$

20 Es ist also zu setzen, da

$$\delta\varrho = -\left(\frac{\partial}{\partial x}(\varrho.\delta\xi) + \frac{\partial}{\partial y}(\varrho.\delta\eta) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho\,\delta\zeta)\right)$$

ist

$$(8\,\mathrm{a})\quad \begin{cases} \delta\alpha = \dfrac{\partial\delta\xi}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial y}[\beta\delta\xi - \alpha\delta\eta] + \dfrac{\partial}{\partial z}[\gamma\delta\xi - \alpha\delta\zeta] \\ \qquad - \delta\xi\left[\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial\beta}{\partial y} + \dfrac{\partial\gamma}{\partial z}\right] + \alpha\left[\dfrac{\partial\delta\xi}{\partial x} + \dfrac{\partial\delta\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\delta\zeta}{\partial z}\right]. \end{cases}$$

---

[1]) In der für den vorliegenden Abdruck bestimmten Correctur hatte der Verfasser an dieser Stelle die Worte: „Einschiebung Manuscript“ an den Rand geschrieben. Ein solches Manuscript hat sich jedoch nach seinem Tode nicht vorgefunden. (A. K.)

Wenn wir setzen

$$\text{(8b)}\quad \begin{cases} \delta \alpha_0 = -\delta \xi \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right] - \frac{\partial}{\partial y}[\alpha\, \delta \eta - \beta\, \delta \xi] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{\partial}{\partial z}[\alpha\, \delta \zeta - \gamma\, \delta \xi], \end{cases}$$

so ist das vollständige

$$\text{(8c)}\qquad \delta \alpha = \delta \alpha_0 + \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} + \alpha \left[\frac{\partial \delta \xi}{\partial x} + \frac{\partial \delta \eta}{\partial y} + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial z}\right].$$

Das $\delta \alpha_0$ hat vollkommen die Form der Variation, wie die der elektrischen und magnetischen Momente. Diese Bemerkung macht es möglich, die sehr verwickelte Berechnung der Variationen erheblich übersichtlicher und leichter zu machen.[1])

6. *Differentialquotienten nach der Zeit.* Da die Zeit keiner Variation unterworfen wird, so ist für sie einfach zu setzen:

$$\delta \left[\frac{\partial \mathfrak{X}}{d t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}[\delta \mathfrak{X}].$$

Es sind also dabei auch die ξ, η, ζ nach der Zeit zu differentiiren, da während des Zeittheilchens $d t$, für welches der Differentialquotient genommen wird, die Verschiebungen sich ebenfalls ändern.

Die Ponderomotorischen Kräfte. Wir bezeichnen wie oben ihre Componenten mit Ξ, Υ, Z. Ihre Arbeit geschieht auf Kosten des inneren Arbeitsvorraths des Systems, wenn Bewegungen in Richtung der Kräfte vor sich gehen. Wir erstrecken also die Variation nach den Coordinaten auf die Grösse

$$0 = \delta \{ \Phi + \iiint [\Xi . \xi + \Upsilon . \eta + Z . \zeta]\, dx . dy . dz \},$$

wobei die genannten Kraftcomponenten als unabhängig von 21
den Coordinaten und deshalb unvariabel anzusehen sind.

Wir variiren zunächst den oben mit Φ_e bezeichneten Theil von Φ.

---

[1]) Ich bemerke noch, dass es mittels der hier entwickelten Formen der Variationen gelingt, Euler's Gleichungen der Aërodynamik aus Hamilton's Minimalsatz zu entwickeln, was, soviel ich weiss, noch nicht gelungen war, und als ein passendes Beispiel zur Erprobung der hier eingeschlagenen Methoden dienen mag.

$$\delta\iiint \tfrac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2}{\varepsilon}\right].dx.dy.dz = \iiint\Big\{\tfrac{1}{2}\,\delta\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).(\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2) + \frac{1}{\varepsilon}[\mathfrak{X}.\delta\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}.\delta\mathfrak{Y}+\mathfrak{Z}.\delta\mathfrak{Z}]\Big\}.dx.dy.dz,$$

Wenn wir uns zunächst auf Variation nach ξ beschränken, haben wir nach Gleichungen (5b) und (7a):

$$-\Xi_e = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)[\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2] - \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right] - \mathfrak{Y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \mathfrak{Z}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) + \mathfrak{Y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) + \mathfrak{Z}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)$$

oder

$$\Xi_e = +\tfrac{1}{2}\frac{\partial}{d x}\left[\frac{+\mathfrak{X}^2-\mathfrak{Y}^2-\mathfrak{Z}^2}{\varepsilon}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mathfrak{X}.\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\mathfrak{X}.\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right].$$

Ξ_e bezeichnet hier den von dem Theile Φ_e des Φ herrührenden Theil der von der bewegten Masse ausgeübten Ξ-Kraft.

Diese Form ist seit Maxwell's Untersuchungen bekannt; ebenso die entsprechenden Werthe für die anderen Coordinaten und für die magnetischen Kräfte.

Wir können uns nun also gleich zu dem mit Φ_q bezeichneten Theile des Φ wenden, den wir schreiben können

$$\delta\iiint dx\,.\,dy\,.\,dz\int dt\,\Big\{U\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}+\alpha\,.\,\sigma\right]+V.\left(\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}+\beta\,.\,\sigma\right) + W.\left(\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}+\gamma\,.\,\sigma\right) - \alpha[\mathfrak{Z}.(\mathfrak{M}+m)-\mathfrak{Y}(\mathfrak{N}+n)] - \beta\,[\mathfrak{X}(\mathfrak{N}+n) - \mathfrak{Z}(\mathfrak{L}+l)] - \gamma\,[\mathfrak{Y}(\mathfrak{L}+l)-\mathfrak{X}(\mathfrak{M}+m)]\Big\} = \delta\,\Phi_q.$$

Wenn man nun die einzelnen Faktoren dieser Glieder variirt, indem man die angegebenen Werthe der Variationen aus den Gleichungen (5) bis (5f) einsetzt, und dabei die in Gleichung (8c) vorgeschriebene Trennung des $\delta\,\alpha$ ausführt, so findet man, dass sich zunächst die Variation des Integrals, welches über

$$\left[U\cdot\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}+V.\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}+W.\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\right]$$

genommen ist, weghebt gegen die übrigen Glieder des Integrals, wenn man in diesen nichts ändert, als α, β, γ und von
22 deren Variation nur den mit $\partial\,\delta\,\xi\,/\,\partial\,t, \partial\,\delta\,\eta\,/\,\partial\,t$ und $\partial\,\delta\,\zeta\,/\,\partial\,t$ bezeichneten Theil einsetzt.

Von den Variationen $\delta\alpha$, $\delta\beta$ und $\delta\gamma$ sind dann zunächst die oben mit $\delta\alpha_0$, $\delta\beta_0$ und $\delta\gamma_0$ bezeichneten Glieder noch übrig und zu berücksichtigen, die, wie schon oben bemerkt, vollkommen gleiche Form haben mit $\delta\mathfrak{X}$, $\delta\mathfrak{Y}$, $\delta\mathfrak{Z}$ und $\delta(\mathfrak{L}+l)$, $\delta(\mathfrak{M}+m)$, $\delta(\mathfrak{N}+n)$. Dadurch wird es leicht die Variationen der Determinante

$$\text{Det.} \begin{vmatrix} \alpha_0 \,, & \beta_0 \,, & \gamma_0 \\ \mathfrak{X} \,, & \mathfrak{Y} \,, & \mathfrak{Z} \\ (\mathfrak{L}+l), & (\mathfrak{M}+m), & \mathfrak{N}+n) \end{vmatrix}$$

auszuführen. Man erhält für die Variation nach ξ den Werth

$$\delta\,|\,\text{Det}\,| = \delta\,\xi \,.\, \frac{\partial}{\partial\, x}\,|\,\text{Det}\,|\,;$$

und auch dieser hebt sich fort, wenn man die letzten Glieder der Variation $\delta\,\alpha$ in (8c) u. s. w. berücksichtigt, welche das Product ergeben:

$$|\,\text{Det}\,| \,.\, \left(\frac{\partial\,\delta\,\xi}{\partial\, x} + \frac{\partial\,\delta\,\eta}{\partial\, y} + \frac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\, z}\right),$$

woraus bei partieller Integration für die Variation nach ξ der Werth folgt

$$-\frac{\partial}{\partial\, x}\,|\,\text{Det}\,|\,.$$

Ganz ebenso heben sich schliesslich die Glieder des über

$$[U\alpha\,\sigma + V.\,\beta\,\sigma + W\gamma\,.\,\sigma]$$

genommenen Integrals fort, wenn man die U, V, W, σ nach den oben gegebenen Regeln variirt und für die α, β, γ nur die allein noch übrig bleibenden Variationen von

$$\left(\delta\,\alpha - \frac{\partial\,\delta\,\xi}{\partial\, t}\right), \quad \left(\delta\,\beta - \frac{\partial\,\delta\,\eta}{\partial\, t}\right), \quad \left(\delta\,\gamma - \frac{\partial\,\delta\,\zeta}{\partial\, t}\right)$$

berücksichtigt.

Es geht also schliesslich aus dieser Untersuchung hervor, dass die ponderomotorischen Kräfte sich in der That aus unserem Minimalprincip vollkommen übereinstimmend mit Maxwell's Theorie ergeben.

---

23 Die Energie E des Systems ist, wie Maxwell und H. Hertz gezeigt haben:

(9) $$E = \Phi_e + \Phi_m$$

Dagegen wird der Werth von Φ_q, wenn die Bedingungen des Minimum (4a) erfüllt, und $u = v = w = o$ sind,

(9a) $$\Phi_q = -2\,\Phi_m,$$

so dass das kinematische Potential ist:

$$\Phi = \Phi_e + \Phi_m + \Phi_q = \Phi_e - \Phi_m.$$

Die beiden Theile der Energie spielen hier also dieselbe Rolle gegeneinander, wie die potentielle und actuelle Energie in den Problemen für wägbare Massen.

Die *elektrische Energie* erscheint dabei als *potentielle Energie* ruhender Massen, soweit keine Aenderungen der Momente oder elektrische Ströme mitspielen, die *magnetische Energie* als *lebendige Kraft.* Trotz der vollkommenen Analogie in den Maxwell'schen Gleichungen habe ich noch keine Form des Princips der kleinsten Action für die umgekehrte Voraussetzung finden können, ohne dabei den Nachweis für die zeitliche Constanz der elektrischen Massen in isolirten Leitern, und die Existenz von äusseren elektrisirenden Kräften X, Y, Z aufzugeben.

In der von mir gegebenen Form wären die Componenten des Vectorpotentials dem physikalischen Sinne nach als *Bewegungsmomente* zu bezeichnen, da der Werth

(9b) $$2\,\mathfrak{L} = \Phi_q = A\left[U \cdot \frac{d\,\mathfrak{X}}{d\,t} + V \cdot \frac{d\,\mathfrak{Y}}{dt} + W \cdot \frac{d\,\mathfrak{Z}}{dt}\right]$$

geschrieben werden kann.[1])

Ein zweiter Werth des $\mathfrak{L}$ ist nach den Gleichungen (3b) und (2)

(10) $$\mathfrak{L} = \Phi_m = \iiint \frac{dx\,.\,dy\,.\,dz}{2\,\mu}\,\{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2\}$$

---

[1]) In der ersten Veröffentlichung der vorliegenden Abhandlung in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie waren die hier folgenden Abschnitte bis Z. 13 v. u auf S. 503 des vorliegenden Abdruckes noch nicht enthalten. Sie wurden erst später bei der zweiten Veröffentlichung in Wiedem. Annalen hinzugefügt. (A. K.)

Bezeichnen wir die gesammte elektrische Stromdichtigkeit, zerlegt nach den drei Coordinatrichtungen, mit

$$(10\mathrm{a})\quad \begin{cases} \mathfrak{u} = u + \left[\dfrac{d\,\mathfrak{X}}{d\,t}\right], \\ \mathfrak{v} = v + \left[\dfrac{d\,\mathfrak{Y}}{d\,t}\right], \\ \mathfrak{w} = w + \left[\dfrac{d\,\mathfrak{Z}}{d\,t}\right], \end{cases}$$

so ergaben die Gleichungen 4a: 24

$$(10\mathrm{b})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu}\right] - \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu}\right] = A\,.\,\mathfrak{u} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu}\right] - \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mu}\right] = A\,.\,\mathfrak{v} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mu}\right] - \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\mathfrak{L}}{\mu}\right] = A\,.\,\mathfrak{w} \end{cases}$$

In Theilen des Raumes, wo μ constant ist, und kein permanenter Magnetismus vorkommt, also

$$l = m = n = o$$

ergiebt sich durch Einführung der Werthe aus (2) und (2e) •

$$-\triangle\,\mathfrak{U} + \triangle\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,x} = A\,.\,\mu\,.\,\mathfrak{u}$$

$$-\triangle\,\mathfrak{V} + \triangle\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,y} = A\,.\,\mu\,.\,\mathfrak{v}$$

$$-\triangle\,\mathfrak{W} + \triangle\,\frac{\partial\,\psi}{\partial\,z} = A\,.\,\mu\,.\,\mathfrak{w}$$

Also sind die Grössen

$$\left(\mathfrak{U} - \frac{\partial\,\psi}{\partial\,x}\right),\ \left(\mathfrak{V} - \frac{\partial\,\psi}{\partial\,y}\right),\ \left(\mathfrak{W} - \frac{\partial\,\psi}{\partial\,z}\right)$$

Potentialfunctionen von den Dichtigkeiten $[-A\,.\,\mu\,.\,\mathfrak{u}\,/\,4\,\pi]$, $[-A\,.\,\mu\,.\,\mathfrak{v}\,/\,4\,\pi]$, $[-A\,.\,\mu\,.\,\mathfrak{w}\,/\,4\,\pi]$ beziehlich, nebst solchen von etwa dazu kommenden äusseren Massen. Es sind die $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ also die sogenannten Vectorpotentiale der Componenten der Stromdichtigkeit.

Wenn in umfassenderen Räumen das μ nicht constant und der permanente Magnetismus nicht gleich Null ist, wird die Bildung dieser Functionen verwickelter, wie es durch die obigen Differentialgleichungen angezeigt ist.

Betrachten wir also weiter die Grössen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ als Geschwindigkeiten, und die $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ als Potentiale von Geschwindigkeiten, so würde die Form des Werthes der lebendigen Kraft nur anzeigen, dass dieselbe nicht nur von den Einzelgeschwindigkeiten in den einzelnen Volumelementen abhängt, sondern dadurch vergrössert wird, dass in benachbarten Volumelementen gleichgerichtete Geschwindigkeiten vorkommen.

Formen wie die der Gleichung (9b) kommen für die lebendige Kraft in der Hydrodynamik vor. Dort müssen aber die $d\mathfrak{X}/dt$, $d\mathfrak{Y}/dt$, $d\mathfrak{Z}/dt$, beziehlich die Rotationsgeschwindigkeiten der Flüssigkeit bedeuten und die $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ deren Vectorpotentiale sein unter Hinzufügung eines passenden constanten Factors.[1])

Diese Analogie lässt sich aber nicht weiter ausspinnen, denn wenn die $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ Rotationsgeschwindigkeiten wären, so müssten die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ Rotationen sein, und das würde nicht zu vereinigen sein mit der Existenz elektrischer Kraftlinien, die in einem elektrisirten Punkt zusammenlaufen.

Sonst ist die Analogie mit der in den Gleichungen (A_5) bis (A_6) gegebenen Form ziemlich durchgehend. Auch dort kommen zwei Formen der lebendigen Kraft vor:

$$\mathfrak{L}_1 = \tfrac{1}{2} \Sigma_{\mathfrak{a}} \Sigma_{\mathfrak{b}} [A_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \cdot q_{\mathfrak{a}} \cdot q_{\mathfrak{b}}]$$

die andere:

$$\mathfrak{L}_2 = \tfrac{1}{2} \Sigma_{\mathfrak{a}} \cdot \Sigma_{\mathfrak{b}} \left[A_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \cdot q_{\mathfrak{b}} \cdot \frac{d p_{\mathfrak{a}}}{d t} \right]$$

oder:

$$= \tfrac{1}{2} \Sigma_{\mathfrak{a}} \left[s_{\mathfrak{a}} \frac{d p_{\mathfrak{a}}}{d t} \right]$$

wenn wir das Bewegungsmoment

$$s_{\mathfrak{a}} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{d q_{\mathfrak{a}}}$$

setzen, und das kinetische Potential hat die Form

$$H = \Phi + \mathfrak{L}_1 - 2 \mathfrak{L}_2;$$

---

[1]) S. meine Arbeit über Wirbelbewegung aus Journal f. r. u. a. Math. 55. p. 25—55. 1858. Gleichung 6a, welche auf den unendlichen Raum erweitert werden kann. (Abgedruckt auf S. 101—134 des ersten Bandes der vorliegenden Sammlung.)

dadurch, dass diese zwei verschiedenen Werthe des $\mathfrak{L}$ vorkommen, wird in beiden Fällen die Beziehung zwischen dem $q_\mathfrak{a}$, beziehlich $s_\mathfrak{a}$ und dem $p_\mathfrak{a}$ gewonnen.

Die äusseren Kräfte $P_\mathfrak{a}$ ponderabler Systeme beziehen sich auf Bewegung von Massenpunkten, d. h. auf Aenderung ihrer Coordinaten $p_\mathfrak{a}$; wir haben oben schon bemerkt, dass das Product $P_\mathfrak{a} \,.\, dp_\mathfrak{a}$ die Arbeit misst, welche bei der Aenderung $dp_\mathfrak{a}$ das System nach aussen abgiebt. Bei cyklischen Bewegungen dagegen, wo Coordinaten $p_\mathfrak{b}$ der strömenden Massen nicht in das kinetische Potential eintreten, wird

$$P_\mathfrak{b} = \frac{d s_\mathfrak{b}}{d t}$$ 26

und daher

$$P_\mathfrak{b} \,.\, q_\mathfrak{b} \,.\, d t = q_\mathfrak{b} \,.\, d s_\mathfrak{b} = d\, Q_\mathfrak{b},$$

wo $dQ_\mathfrak{b}$ die durch die Aenderung bedingte Abgabe von Arbeit ist. Diese kann also auch in der letzteren Form dargestellt werden, wie eine Kraft $q_\mathfrak{b}$, die auf die Aenderung des $s_\mathfrak{b}$ hinwirkt. Dies ist analog dem Umstande, dass in unseren elektrodynamischen Gleichungen die galvanischen Stromcomponenten als Kräfte vorkommen, die die Vectorpotentiale $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ zu ändern streben. Diese letzteren entsprechen in der That cyklischen magnetischen Bewegungen.

Die galvanischen Ströme in Leitern treten in der hier gegebenen Darstellung zunächst auf als Processe, welche rings um sich herum circulare magnetische Kräfte bedingen, wie die $d\mathfrak{X} / dt$; erst in zweiter Linie kommt daneben in Betracht, dass sie nach Ohm's Gesetz die elektrischen Momente zerstören oder nicht anwachsen lassen. Man wird dadurch den Widerspruch los, dass das Anwachsen von $\mathfrak{X}$, was doch im constanten Strome nicht mehr stattfindet, Ursache der magnetischen Wirkungen in der Umgebung sein soll.

Abweichend von den bekannten Formen des Problems erscheint es hier, dass Grössen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, welche wir schliesslich als Bewegungsmomente charakterisiren, vorher als unabhängige Variable bei der Variation behandelt worden sind. Ich ver-

weise in dieser Beziehung auf die von mir in Journal f. Math. Bd. 100. p. 151 behandelte Form[1]), wo die Geschwindigkeiten q_a ebenfalls als unabhängige Variable behandelt, und die Bedeutung dieser Grössen durch die Variation selbst erst gefunden ist. Ich behalte mir vor, in einer späteren Mittheilung solche Fälle weiter zu besprechen, wo Grössen vorkommen, von denen man nicht weiss, ob sie Zustände oder Aenderungsgeschwindigkeiten von solchen sind.

---

[1]) Abgedruckt auf S. 219 des vorliegenden Bandes.

CXXXV.

Elektromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung.

Aus den Sitzungsberichten der Berliner Akademie. Sitzung vom 15. December 1892. S. 1093—1109. — Wiedemann's Annalen der Physik. Bd. XLVIII. S. 389—405 (1893). — Die am Schluss abgedruckten Zusätze wurden in demselben Band von Wied. Ann., S. 723—725, veröffentlicht.[1]

Eine genügende Erklärung der Farbenzerstreuung auf 339
Grundlage der elektromagnetischen Theorie des Lichtes scheint mir bisher gänzlich zu fehlen. Dass eine solche nicht ohne Rücksichtnahme auf die ponderablen Massen, die dem Aether eingelagert sind, zu bilden ist, dürfte keinem Zweifel unterliegen, da die Dispersion des Lichtes zu denjenigen Vorgängen gehört, welche, wie auch die Brechung desselben, die galvanische Leitung, die Ansammlung wahrer Elektricität und das Bestehen magnetischer Pole niemals im reinen Aether eines Vacuum, sondern nur in oder an der Grenze von Räumen vorkommen, die ausser dem Aether auch ponderable Masse enthalten. Nun zeigt die mathematische Theorie von Maxwell allerdings an, dass auch ponderomotorische Kräfte innerhalb des von elektrischen Oscillationen durchzogenen Aethers wirksam werden müssen und eventuell schwere Atome, die im Aether liegen, in Bewegung setzen könnten. Aber wenn die ponderablen Theilchen nicht selbst elektrisch sind, wären diese Kräfte den *Quadraten* der elektrischen und magnetischen Momente des oscillirenden Aethers proportional, und also für

---

[1]) Siehe das Vorwort zu dem vorliegenden Bande. (A. K.)

negative Werthe derselben in Grösse und Richtung gleich denen für positive. Sie würden deshalb während jeder Schwingungsperiode zweimal ihren grössten und zweimal ihren kleinsten Werth erreichen, so dass sie in der Regel nicht Schwingungen von der Länge einer einfachen Periode hervorbringen oder unterstützen könnten.

Nur wenn die wägbaren Theilchen Ladungen wahrer Elektricität enthalten, können die periodischen Wechsel der elektrischen Momente im Aether ponderomotorische Kräfte der gleichen Periode hervorbringen. Die entsprechende Annahme,
390 dass eingelagerte Atome nur nördlichen oder nur südlichen Magnetismus enthalten sollten, lasse ich als zu unwahrscheinlich bei Seite liegen. Dagegen haben uns die elektrolytischen Erscheinungen, namentlich Faraday's Gesetz der elektrolytischen Aequivalente, schon längst zu der Annahme geführt, dass elektrische Ladungen von bestimmter Grösse an den Valenzstellen chemisch verbundener Ionen haften, die bald positiv, bald negativ sein können, aber überall dieselbe absolute Grösse für jede Valenzstelle eines jeden Atoms haben müssen.

Obgleich diese Annahme die Elektricität wieder an einen substantiellen Träger heftet, so ist sie in keiner Weise im Widerspruch mit Maxwell's mathematischer Formulirung seiner Theorie. Denn auch in dieser kommt die Möglichkeit unveränderlicher Ladung gewisser Volumenelemente in Isolatoren vor, und Maxwell's Gleichungen sagen aus, dass die Quanta bei allem Wechsel elektrischer, magnetischer und ponderomotorischer Bewegungen unverändert bleiben, wenn sie auch nach seiner Deutung der Erscheinungen nur als Integrationsconstanten, nicht als reelle Substanzen anzusehen sind.

Dass schliesst nicht aus, dass die Kräfte, die von diesen Ionen als ihren Centren ausgehend sich im Raume ausbreiten, bei eintretenden Lageänderungen der Molecüle sich in solcher Art verändern, und im Raume fortschieben, wie es Maxwell's Gleichungen beschreiben.

Das einzige, was die elektrochemische Theorie mehr verlangt, als bisher in Maxwell's Gleichungen vorgesehen ist, ist die Möglichkeit, dass diese Centralpunkte elektrischer Kräfte

bei chemischen Umsetzungen von einem zum anderen Ion herübergleiten können, und zwar unter grosser Arbeitsleistung, so als ob sie an einem substantiellen Träger hafteten, der von den Valenzstellen verschiedenartiger Ionen mit verschiedener Kraft angezogen würde.

Wird der ein Paar verbundener Ionen umgebende Aether von elektrischen Kräften getroffen und dadurch dielektrisch polarisirt, so werden die entgegengesetzt polarisirten Ionen den in Richtung der Kraftlinien fallenden Spannungen ausgesetzt, also zwei gleich grossen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräften, die mit einander ein Kräftepaar bilden, welches
den Schwerpunkt des Molecüls nicht in Bewegung setzen, wohl 391
aber die elektrische Axe des Molecüls verlängern oder verkürzen, sie der Richtung der Kraftlinie zu- oder ablenken würde.

Wir wollen im Folgenden die Bezeichnungsweise meines letzten Aufsatzes vom Mai d. J.[1]) beibehalten, und also die Componenten der elektrischen Momente der Volumeneinheit mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ bezeichnen. Dabei ist aber zu bemerken, dass in den dort aufgestellten Gleichungen die Momente $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ betrachtet werden als nur abhängig von den elektrischen Kräften X, Y, Z, und diesen proportional. Die möglicherweise in einzelnen Stellen des Raumes lagernde *wahre Elektricität,* deren Dichtigkeit in Gleichung (1) mit

$$\sigma = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} \tag{1}$$

bezeichnet wurde, spielt dort allerdings eine Rolle, indem sie Vertheilung und Richtung der Momente mit bestimmt. Aber sie wird nicht derjenigen Elektricität zugerechnet, welche die Polarisation der Volumenelemente bewirkt. So sind auch in den nun zu bildenden Bewegungsgleichungen die elektrischen Momente, welche durch die wahre Elektricität der Ionen gebildet werden, da sie von veränderlicher Grösse und Richtung sind, und auch von nicht elektrischen Kräften, Beharrungsvermögen, Reibung etc. angegriffen werden, von denen des freien Aethers zu trennen; wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, für

[1]) Abgedruckt auf S. 476 des vorliegenden Bandes.

die Volumeneinheit. Ein solcher mit Aether und Ionenpaaren gefüllter Raum würde für die theoretische Betrachtung nach der älteren Vorstellung von der Existenz bipolarer magnetischer Molecüle, dem Innern eines magnetisirten Körpers ganz analog sein, und da die Gesetze der Vertheilung magnetischer und elektrischer Kräfte für ruhende Zustände aus Maxwell's Theorie sich vollkommen übereinstimmend mit denen von Poisson's Theorie ergeben, die mit magnetischen Molecülen und Fernkräften rechnet, so lassen sich auch die aus jener älteren Theorie hergeleiteten Berechnungen des Energievorrathes in den Volumenelementen eines solchen Raumes mit molecularer Vertheilung der Elektricität hier verwenden. Dass sowohl die Erscheinungen der dielektrischen Polarisation, wie die der
392 ponderomotorischer Kräfte solcher polarisirter Massen auf denselben Werth der Energie zurückführen, habe ich in einem früheren Aufsatze erwiesen.[1])

Nach der hier aufgestellten Hypothese unterscheiden sich unsere Ionenpaare von den dielektrisch polarisirten Molecülen isolirender Substanzen nur dadurch, dass sie träge Masse haben und deshalb nicht immer in der Gleichgewichtslage sich befinden, vielmehr um diese oscilliren können, so dass die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ unabhängig von den $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sich verändern können, und dass also die potentielle Energie der Elektrisirung nicht bloss von den letzteren drei Grössen, sondern auch von den ersteren abhängt. Ich habe es vorgezogen, statt von den Maxwell'schen Gleichungen auszugehen, die neu hinzukommenden Einflüsse in die von mir für die Elektrodynamik entwickelte Form des Princips der kleinsten Wirkung aufzunehmen, weil man dadurch vor dem Uebersehen einzelner nothwendig vorhandener Gegenwirkungen in dem hier schon ziemlich verwickelten Spiel der Kräfte geschützt wird, und dadurch die Anzahl der unabhängigen Hypothesen von zweifelhafter Richtigkeit wesentlich vermindert wird.

---

[1]) Vgl. meinen Aufsatz: „Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielectrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte" in Monatsber. d. Berl. Akad., 17. Febr. 1881. — Wied. Ann. **13.** p. 385—406. Gleichung (2) und (4c), nebst den Bemerkungen am Schlusse. — Abgedruckt auf S. 798 des ersten Bandes der vorliegenden Sammlung.

Uebereinstimmend mit Poisson und Maxwell setzen wir die elektrische Kraft, welche nothwendig ist, um ein Moment $\mathfrak{x}$ in der Volumeneinheit einer mit bipolaren Molecülen beladenen Substanz hervorzubringen, diesem Momente proportional, also

$$X = \frac{1}{\vartheta} \cdot \mathfrak{x}, \quad Y = \frac{1}{\vartheta} \cdot \mathfrak{y}, \quad Z = \frac{1}{\vartheta} \cdot \mathfrak{z}. \tag{2}$$

Darin ist, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen der Polarisationsstärke, ϑ eine Constante. Wenn wir mit $\delta\mathfrak{x}$, $\delta\mathfrak{y}$, $\delta\mathfrak{z}$ verschwindend kleine Aenderungen dieser Werthe bezeichnen, so erhalten wir

$$X \cdot \delta\mathfrak{x} + Y \cdot \delta\mathfrak{y} + Z \cdot \delta\mathfrak{z} = \frac{1}{2\vartheta}\, \delta\, [\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2]. \tag{2a}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist offenbar gleich der Arbeit, welche die polarisirenden Kräfte bei der Aenderung der Momente gethan haben, und deshalb stellt die rechte Seite der Gleichung die Aenderung der durch die Polarisation gewonne- 393
nen Energie dar, ohne dass die Gültigkeit dieses Ausdruckes, wie in meiner früheren Arbeit, auf den Fall des Gleichgewichts zwischen den polarisirenden Kräften und der dadurch gewonnenen Polarisation beschränkt ist.

Denken wir uns die beweglichen Molecüle, deren Momente wir mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnet haben, eingelagert in ein continuirliches Medium, dessen dielektrische Constante wir mit ε bezeichnen, so dass seine Momente und elektrischen Spannungen zusammenhängen durch die Gleichungen

$$\mathfrak{X} = \varepsilon \cdot X, \quad \mathfrak{Y} = \varepsilon \cdot Y, \quad \mathfrak{Z} = \varepsilon \cdot Z,$$

so wird der Werth der elektrischen Energie (Gleichung 3a) entsprechend:

$$\Phi_e = \iiint dx \cdot dy \cdot dz \cdot \left\{ \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{2\varepsilon} - \frac{\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{x} + \mathfrak{Y} \cdot \mathfrak{y} + \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{z}}{\varepsilon} + \frac{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}{2\vartheta} \right\} \tag{2b}$$

Denkt man sich den Aether zwischen den Molecülen ungemischt mit inducirbarer ponderabler Substanz, so wäre $\varepsilon = 4\pi$ zu setzen.

Der zweite, mit Φ_m bezeichnete, magnetische Theil des kinetischen Potentials kann unverändert bleiben, da die Ionen nicht nothwendig ein anderes magnetisches Inductionsvermögen zu haben brauchen als der Aether, und die Unterschiede in Wirklichkeit meist sehr klein sind. Die Anwesenheit permanent magnetisirter Substanz brauchen wir nicht zu berücksichtigen. Also[1])

$$\Phi_m = \iiint \cdot \frac{dx \,.\, dy \,.\, dz}{2\mu} \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right)^2 \right\} \tag{2c}$$

Der dritte, elektromagnetische, Theil Φ_q reducirt sich, indem wir die Glieder dritten Grades kleiner Grössen (zu denen aber σ nicht gehört) weglassen, auf:

$$\Phi_q = A \iiint dx \,.\, dy \,.\, dz \,.\left\{ \mathfrak{U} \cdot \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \alpha \cdot \sigma \right) + \mathfrak{V} \,.\left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \beta \cdot \sigma \right) + \mathfrak{W} \,.\left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \gamma \cdot \sigma \right) \right\} \tag{2d}$$

Das σ ist überall gleich Null, ausser an den elektrisch geladenen Stellen der Ionen: also kommen auch nur deren Geschwindigkeiten in Betracht. Da die elektrischen Kräfte, die auf sie wirken, reine Kräftepaare sind, so muss, wie schon bemerkt, der Schwerpunkt der Molecüle in Ruhe bleiben, und unter diesen Umständen ist zu setzen

394 $$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} = \alpha \,.\, \sigma, \quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} = \beta \,.\, \sigma, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} = \gamma \,.\, \sigma. \tag{2e}$$

und also:

$$\Phi_q = A \iiint dx \,.\, dy \,.\, dz \left\{ \mathfrak{U} \,.\, \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{X} + \mathfrak{x}) + \mathfrak{V} \,.\, \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{Y} + \mathfrak{y}) + \mathfrak{W} \,.\, \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{Z} + \mathfrak{z}) \right\} \tag{2f}$$

Endlich in den letzten Theil der Arbeit R haben wir einzusetzen,

[1]) Hier ist ein Druckfehler des Originals verbessert. (A. K.)

mit negativem Vorzeichen, die lebendige Kraft und die Reibung der bewegten Ionen.[1])

$$\left.\begin{aligned} R = -\tfrac{1}{2}\iiint m_1\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right]\cdot dx\cdot dy\cdot dz \\ +\iiint[\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{r}_1+\mathfrak{y}\cdot\mathfrak{r}_2+\mathfrak{z}\cdot\mathfrak{r}_3]\,dx\,.\,dy\,.\,dz \end{aligned}\right\}\quad(2g)$$

wo $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{r}_3$ die der Variation nicht unterworfenen Componenten der Reibungskraft darstellen, deren Werth durch

$$\mathfrak{r}_1 = k_1\cdot\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t},\quad \mathfrak{r}_2 = k_1\cdot\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t},\quad \mathfrak{r}_3 = k_1\cdot\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\qquad(2h)$$

ausgedrückt werden mag.

Wenn man nun die Bedingungen dafür sucht, dass

$$\delta\{\Phi_e+\Phi_m+\Phi_q+R\}=0\qquad(3)$$

werde, so ergiebt sich:

1. Bei Variation der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$

$$\frac{\mathfrak{X}-\mathfrak{x}}{\varepsilon}=A\cdot\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t},\quad \frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}}{\varepsilon}=A\cdot\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t},\quad \frac{\mathfrak{Z}-\mathfrak{z}}{\varepsilon}=A\cdot\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t},\qquad(3a)$$

woraus auch in der schon früher angewendeten Weise (vgl. Gleichungen (2), (4c) und (4d) der früheren Abhandlung) die Gleichungen gewonnen werden können:

$$\left.\begin{aligned} A\cdot\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}-\mathfrak{z}}{\varepsilon}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}}{\varepsilon}\right)\\ A\cdot\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}-\mathfrak{x}}{\varepsilon}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}-\mathfrak{z}}{\varepsilon}\right)\\ A\cdot\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}}{\varepsilon}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}-\mathfrak{x}}{\varepsilon}\right) \end{aligned}\right\}\quad(3b)$$

2. Bei Variationen der $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$: 395

$$\left.\begin{aligned} A\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{X}+\mathfrak{x})&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)\\ A\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right)\\ A\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{Z}+\mathfrak{z})&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) \end{aligned}\right\}\quad(3c)$$

[1]) In der folgenden Formel ist hier ein Druckfehler des Originals verbessert worden. (A. K.)

3. Endlich bei der Variation nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$

$$-\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)+\frac{1}{\vartheta}.\mathfrak{x}-A\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}-m_1.\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+\mathfrak{r}_1=0,$$

was combinirt mit den Gleichungen (2h) und (3a) giebt:

$$+\frac{2\mathfrak{X}}{\varepsilon}=\frac{1+\vartheta}{\vartheta}.\mathfrak{x}+m_1\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+k_1.\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}$$

und entsprechend

$$\left.\begin{aligned}+\frac{2\mathfrak{Y}}{\varepsilon}&=\frac{1+\vartheta}{\vartheta}\mathfrak{y}.+m_1\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+k_1.\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\\ +\frac{2\mathfrak{Z}}{\varepsilon}&=\frac{1+\vartheta}{\vartheta}\mathfrak{z}.+m_1\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}+k_1.\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\quad(3d)$$

Der kürzeren Schreibweise halber setzen wir

$$\frac{\varepsilon}{2}.\frac{1+\vartheta}{\vartheta}=a^2,\quad\frac{\varepsilon}{2}.m_1=m,\quad\frac{\varepsilon}{2}.k_1=k,\qquad(3e)$$

somit wird

$$\left.\begin{aligned}+\mathfrak{X}&=a^2.\mathfrak{x}+m.\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2}+k.\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}\\ +\mathfrak{Y}&=a^2.\mathfrak{y}+m.\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+k.\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\\ +\mathfrak{Z}&=a^2.\mathfrak{z}+m.\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}+k.\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\quad(3f)$$

System ebener Wellen in Richtung der x-Axe ablaufend.

Setze

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Y}&=B.e^{in(t-px)},\\ \mathfrak{N}&=C.e^{in(t-px)},\\ \mathfrak{y}&=b.e^{in(t-px)}\\ \mathfrak{X}=\mathfrak{Z}=\mathfrak{L}&=\mathfrak{M}=\mathfrak{x}=\mathfrak{z}=0,\end{aligned}\right\}(4)^{1)}$$

so geben die Gleichungen (3b) für die Werthe der Coëfficienten:

---

[1]) In dieser und den folgenden Gleichungen ist beim vorliegenden Abdruck das Vorzeichen von p umgekehrt worden. (A. K.)

$$-p\frac{(B-b)}{\varepsilon}=AC;$$

und (3c):

$$A(B+b)=-C\frac{p}{\mu}; \qquad \text{(4a)}$$

endlich (3f): 396

$$B=a^2b-mn^2b+inkb. \qquad \text{(4b)}$$

Setzt man

$$b=hB,$$

also:

$$h=\frac{1}{a^2-mn^2+ink}, \qquad \text{(4c)}$$

so geben die Gleichungen (4a):

$$\frac{p}{A}\cdot\frac{1-h}{1+h}=\frac{\varepsilon\mu A}{p}. \qquad \text{(4d)}$$

Nach der Art des Vorkommens in den Gleichungen (4) ist offenbar $1/p$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen. Wenn nicht $k=0$ ist, wird deren Werth complex sein, was bekanntlich Dämpfung der fortlaufenden Wellen anzeigt.

Um die physikalische Bedeutung dieses Ausdruckes deutlicher zu machen und um die reellen und imaginären Theile von einander zu trennen, bemerken wir zunächst, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{C}_0$ im continuirlichen Aether gegeben ist durch:

$$\mathfrak{C}_0^2=\frac{1}{A^2\,.\,\varepsilon\,.\,\mu}. \qquad \text{(5)}$$

Setzen wir dann

$$p=\frac{q}{in}+\frac{1}{\mathfrak{C}} \qquad \text{(5a)}$$

so ist nach der oben gemachten Anwendung des Exponenten p offenbar $\mathfrak{C}$ die reelle Fortpflanzungsgeschwindigkeit der von uns betrachteten Wellen und q der Dämpfungscoëfficient für die Längeneinheit des Weges.

Dadurch wird Gleichung (4d)

$$p=\frac{q}{in}+\frac{1}{\mathfrak{C}}=\frac{1}{\mathfrak{C}_0}\cdot\sqrt{\frac{1+h}{1-h}} \qquad \text{(5b)}$$

$$\frac{1+h}{1-h}=\frac{a^2-mn^2+kin+1}{a^2-mn^2+kin-1}.$$

Setze

$$\left.\begin{aligned} a^2 - mn^2 + 1 &= \varrho_0 \cdot \cos\vartheta_0 \\ a^2 - mn^2 - 1 &= \varrho_1 \cdot \cos\vartheta_1 \\ kn = \varrho_0 \cdot \sin\vartheta_0 &= \varrho_1 \cdot \sin\vartheta_1, \end{aligned}\right\} \quad (5c)$$

wobei ϱ_0 und ϱ_1 immer positiv genommen werden können, und die Winkel ϑ_0 und ϑ_1 in den zwei ersten Quadranten liegen, sodass $\sin\vartheta_0$ und $\sin\vartheta_1$ immer positive Grössen sind, so wird

397 $$p = \frac{1}{\mathfrak{C}_0} \cdot \sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}} \cdot e^{-\frac{1}{2} i(\vartheta_1 - \vartheta_0)} \qquad (5d)$$

und

$$+\frac{q}{n} = \frac{1}{\mathfrak{C}_0} \sqrt{\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_0}} \cdot \sin\tfrac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_0), \qquad (5e)$$

$$\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{C}} = \sqrt{\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_0}} \cdot \cos\tfrac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_0). \qquad (5f)$$

Dieses letztere Verhältniss ist zugleich das Brechungsverhältniss schwach gedämpfter Wellen für die betreffenden Schwingungen bei dem Uebergang aus dem mit beweglichen Molecülen beladenen Aether in den davon freien.

Zu bemerken ist, dass der Wurzelausdruck, der in den beiden Gleichungen (5e) und (5f) vorkommt, in beiden dasselbe Vorzeichen haben muss.

Aus den Gleichungen ergeben sich die Werthe der Tangenten:

$$\operatorname{tg}\vartheta_0 = \frac{kn}{a^2 - mn^2 + 1}, \quad \operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{kn}{a^2 - 1 - mn^2}, \qquad (5g)$$

oder wenn wir

$$N^2 = \frac{a^2 + 1}{m}, \quad P^2 = \frac{a^2 - 1}{m} \qquad (6)$$

setzen,

$$\operatorname{tg}\vartheta_0 = \frac{k}{mN} \cdot \frac{1}{\frac{N}{n} - \frac{n}{N}}, \quad \operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{k}{mP} \cdot \frac{1}{\frac{P}{n} - \frac{n}{P}}, \qquad (6a)$$

welche zeigen, dass der Winkel ϑ_0 ein rechter wird, wenn $n = N$. N ist aber der Werth, den n annehmen würde, wenn die Phasen der elektrischen Verschiebungen $\mathfrak{X}$ im Aether und $\mathfrak{x}$

im Molecül gleiche Richtung haben und ohne Reibung unter dem Einflusse ihrer eigenen Anziehungskräfte vor sich gehen, die in der Constante a^2 zusammengefasst sind.

Wenn $a^2 > 1$ und daher P reell ist, bezeichnet P eine andere kleinere Schwingungszahl, welche eintreten würde, wenn die genannten beiden elektrischen Kräfte einander gerade entgegenwirken.

Die in den Gleichungen (6a) für die beiden Tangenten gegebenen Werthe zeigen, dass, wenn die Reibungsconstante k sehr klein ist, die Tangenten nur dann endliche Grösse haben können, wenn auch ihr Nenner nahe gleich Null wird, d. h. n nahehin gleich N oder gleich P wird. Wenn dies eintritt, so
wird für $n = P$ der Winkel $\vartheta_1 = \pi/2$, für $n = N$ dagegen 398
$\vartheta_0 = \pi/2$.

Das Verhältniss der beiden in (5g) und (6a) gegebenen Tangenten findet sich:

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 : \operatorname{tg} \vartheta_0 = (N^2 - n^2) : (P^2 - n^2).$$

Da zum absolut grösseren Werthe der Tangente auch der grössere Sinus gehört und für Winkel, die nahehin $= 0$ oder $= \pi$ sind, das Verhältniss der Sinus mit dem der Tangenten zusammenfällt, so ergiebt sich hieraus, dass der in den Gleichungen (5e) und (5f) vorkommende Factor $\sin \vartheta_1 / \sin \vartheta_0$ für $n = 0$ den Werth N^2 / P^2 hat, also grösser als Eins ist; für $n = \infty$ dagegen wird $\sin \vartheta_1 = \sin \vartheta_0$.

Der genannte Factor wird steigen, bis $n = P$ geworden ist, wird $= 1$ sein, wenn $n^2 = \frac{1}{2}(P^2 + N^2)$; wird noch weiter abnehmen, bis $n = N$ geworden, endlich wenn n sehr gross, wieder zunehmen, bis er für $n = \infty$ wieder $= 1$ geworden ist.

Wie schon früher hervorgehoben, ist $\mathfrak{E}_0 / \mathfrak{E} = \mathfrak{n}$ das Brechungsverhältniss zwischen leerem und belastetem Aether, dagegen

$$\mathfrak{q} = \frac{q \cdot \mathfrak{E}}{n} \tag{7}$$

ist der Erlöschungscoëfficient für eine Wellenlänge der betreffenden Strahlen, dessen Werth sich auch aus (5e) und (5f) ergiebt, gleich

$$\mathfrak{q} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_0), \tag{7a}$$

während

$$\mathfrak{n}^2 (1 + \mathfrak{q}^2) = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_0} = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}.$$

Für kleine Werthe von k ergiebt sich aus den vorher angestellten Betrachtungen, dass der hier vorkommende Winkel $\frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_0)$ bei $n = 0$ sehr klein ist, bei $n = P$ ziemlich schnell bis nahe an $\pi/2$ steigt und bei $n = N$ wieder ebenso schnell auf seinen früheren Werth zurückgeht. Sein Sinus ist also für $n = 0$, wie für $n = \infty$ sehr klein, zwischen $n = P$ und $n = N$ dagegen wird er nahe gleich 1, und wird also nach Gleichung (7a) zwischen beiden Linien starke Absorption hervorbringen.

Die Werthe des Brechungsverhältnisses dagegen ergeben sich aus obigen Gleichungen:

$$\mathfrak{n} = \sqrt{\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_0 (1 + \mathfrak{q}^2)}}, \tag{7b}$$

399 sie werden also in dem ganzen Streifen starker Absorption herabgedrückt gegen die durch den Ausdruck $\sqrt{\sin \vartheta_1 / \sin \vartheta_0}$ dargestellten Werthe. Letztere sind aber, wie wir gesehen, auf der Seite vom Absorptionsstreifen gegen das Roth hin höher, als auf der Seite gegen das Violett hin. Es zeigt dieses Verhalten also *anomale Dispersion* an für die neben dem Absorptionsstreifen sichtbar bleibenden Farben.

Bei den farblos durchsichtigen Körpern, bei denen gewöhnlich die Brechungsverhältnisse untersucht worden sind, finden wir in dem sichtbaren Theile des Spectrums keine deutliche Absorption, diese kann nur jenseits der Grenzen desselben vorkommen. Der Verlauf der Curve der Brechungsverhältnisse, wie er der viel gebrauchten Formel von Cauchy zu Grunde liegt, stimmt in unserer Theorie mit dem Theil der Curve für Werthe von n, welche kleiner sind als P. Es wären also im allgemeinen die Absorptionsstreifen, welche dies veranlassen, jenseits des Ultraviolett zu suchen. Natürlich ist nicht ausgeschlossen, dass auch Molecüle vorkommen können mit mehreren eigenen Schwingungsperioden, die mehrere Absorptionsstreifen und entsprechend verwickeltere Brechungsverhältnisse geben.

Zu bemerken ist noch, dass in stark absorbirten Stellen des Spectrums, wo der Factor cos $\frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_0)$ sehr klein wird, unsere Theorie die Möglichkeit offen lässt, dass Brechungsverhältnisse kleiner als 1, oder Geschwindigkeiten höher als im leeren Aether vorkommen, wie das nach den Untersuchungen von Hrn. Kundt in einigen Metallen der Fall ist.

Fälle mit imaginären P.

Die Fälle, wo

$$a^2 < 1,$$

bei denen P imaginär wird, ergeben einen anderen Verlauf. In diesen wird tang ϑ_1 immer negativ, also $\vartheta_1 > \pi/2$, und desto grösser, je höher n; wenn k klein ist, ist ϑ_1 immer nur wenig von π unterschieden. Dagegen verhält sich ϑ_0 wie in den früher besprochenen Fällen. Sobald n den Werth N passirt hat, wird auch ϑ_0 sich schnell dem Werthe π nähern. $(\vartheta_1 - \vartheta_0)/2$, welches vorher[1]) immer wenig kleiner war als ein Rechter, wird für $n > N$ klein werden, und erst für solche Werthe würde also die Dämpfung schwach werden, so dass die 400 betreffenden Strahlen gesehen werden könnten. Die Brechung würde ein Minimum in der Gegend von $n = N$ erreichen, von da ab, wo die Strahlen anfangen sichtbar zu werden, weiter steigen und endlich für $n = \infty$ den festen Werth $= 1$ asymptotisch erreichen. Körper von diesem Typus der Brechung lassen sich unter den bisher untersuchten noch nicht erkennen

Phasendifferenz.

Zu bemerken ist noch, dass aus Gleichung (4c) und (5c) folgt:

$$\frac{b}{B+b} = \frac{e^{-i\vartheta_0}}{\varrho_0}. \tag{7c}$$

Aus (4a) aber folgt:

$$\frac{B+b}{C} = -\frac{p}{A\mu},$$

da andererseits nach Gleichung (5d)

$$p = \frac{1}{\mathfrak{C}_0}\sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}} \cdot e^{-\frac{1}{2}i(\vartheta_1 - \vartheta_0)}$$

[1]) D. h. für $P < n < N$ (A. K.).

gefunden ist, ergiebt sich[1]) unter Berücksichtigung von (5)

$$\frac{b}{C} = \frac{-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\mu \cdot \varrho_0 \cdot \varrho_1}} \, e^{-\frac{1}{2} i (\vartheta_0 + \vartheta_1)}$$

Daraus geht hervor, dass eine Phasendifferenz zwischen den magnetischen und den ponderablen Schwingungen besteht, welche $\frac{1}{2}(\vartheta_0 + \vartheta_1)$ beträgt. Das Verhältniss ihrer Amplituden wird durch den ersten Factor bestimmt:

$$\frac{-\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\mu \cdot \varrho_0 \cdot \varrho_1}}.$$

Die Grössen ϱ_0 und ϱ_1 können nicht Null werden, aber sie werden bei kleinem Werthe von k sehr klein, wenn entweder $n = N$ oder $n = P$.

Die Gleichung (4c) lässt erkennen, dass zwischen der Oscillation der elektrischen Momente und der der Ionen auch eine Phasendifferenz ist. Setzt man

$$a^2 - mn^2 = \varrho_2 \cdot \cos \vartheta_2$$
$$kn = \varrho_2 \cdot \sin \vartheta_2,$$

so ist

$$\frac{b}{B} = \mathfrak{h} = \frac{1}{\varrho_2} \cdot e^{-i\vartheta_2}.$$

Das Verhältniss der Amplituden wird ein Maximum, wenn

$$n^2 = \tfrac{1}{2}(P^2 + N^2).$$

401 Starke Schwingungen dieser Art würden möglicherweise die Ionen aus ihren Verbindungen reissen können, namentlich wenn noch eine elektrostatische Ladung der Substanz hinzukommt, und bei allen Substanzen, wo starke Absorption an der Grenze des Ultraviolett vorkommt, würde die von Hrn. Hertz beobachtete Entweichung der Elektricität unter dem Einflusse der ultravioletten Strahlen eintreten können. Dass überwiegend leicht negative Elektricität ausströmt, weist allerdings auf eine besondere Beschaffenheit der negativen Ionen hin.

---

[1]) In der folgenden Gleichung ist hier ein Rechnungsfehler des Originals verbessert worden. (A. K.)

Verhalten der nicht absorbirenden Medien.

Wenn der Absorptionscoëfficient $k = 0$ ist, ist h reell, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{p} = \mathfrak{C}_0 \sqrt{\frac{1-h}{1+h}} \tag{8}$$

wird alsdann rein reell. Der erste Factor dieses Werthes

$$\mathfrak{C}_0 = \frac{1}{A\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{5}$$

ist bekanntlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im continuirlichen Aether, und für reelle Werthe ist

$$\frac{1+h}{1-h} = \frac{a^2 + 1 - mn^2}{a^2 - mn^2 - 1}. \qquad (9)\,^{1)}$$

Dieser Factor ist positiv und das Verhältniss $\mathfrak{C} : \mathfrak{C}_0 = 1 : \mathfrak{n}$ demnach reell, wenn entweder

$$mn^2 < a^2 - 1 \quad \text{oder} \quad mn^2 > a^2 + 1.$$

Der erste Fall ergiebt constant werdendes Brechungsverhältniss für langsamere Schwingungen; die Geschwindigkeit ist in durchsichtigen nicht absorbirenden Medien kleiner, als im Vacuum. Der zweite Fall ergiebt constant werdendes Brechungsverhältniss für sehr schnelle Schwingungen, und das Brechungsverhältniss kleiner als Eins. Der erste Fall entspricht also besser den Beobachtungen an den bekannteren sehr durchsichtigen Medien.

Wenn wir bemerken, dass $a^2/m = \nu^2$ das Quadrat der Schwingungszahl der vom Aether befreiten Ionen bezeichnet, so wird

$$\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\right)^2 = \frac{\nu^2 - n^2 - \frac{1}{m}}{\nu^2 - n^2 + \frac{1}{m}},$$

und da $\lambda = \mathfrak{C}/n$ ist, kann man setzen 402

$$(\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{C}_0^2)\left(\nu^2 - \frac{\mathfrak{C}^2}{\lambda^2}\right) + (\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{C}_0^2)\frac{1}{m} = 0,$$

---

1) In dieser Gleichung ist ein Fehler verbessert worden. (A. K.)

$$\mathfrak{C}^2(\nu^2\lambda^2+\mathfrak{C}_0^2)-\mathfrak{C}^4+\frac{\lambda^2\mathfrak{C}_0^2}{m}-\mathfrak{C}_0^2\nu^2\lambda^2+\mathfrak{C}^2\frac{\lambda^2}{m}=0,$$

$$\mathfrak{C}^2=\tfrac{1}{2}\left(\nu^2\lambda^2+\frac{\lambda^2}{m}+\mathfrak{C}_0^2\right)$$

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}\left(\nu^2\lambda^2+\frac{\lambda^2}{m}+\mathfrak{C}_0^2\right)^2+\frac{\lambda^2\mathfrak{C}_0^2}{m}-\nu^2\lambda^2\mathfrak{C}_0^2}.$$

Da $\mathfrak{C}^2<\mathfrak{C}_0^2$ sein soll, kann nur das untere Zeichen gelten.

Dürfen wir

$$\lambda^2\mathfrak{C}_0^2\left[\frac{1}{m}-\nu^2\right]$$

als klein ansehen, so lässt der letzte Ausdruck eine Entwickelung der Wurzel zu[1])

$$\mathfrak{C}^2=\frac{\lambda^2\cdot\mathfrak{C}_0^2\left(\nu^2-\frac{1}{m}\right)}{\nu^2\lambda^2+\mathfrak{C}_0^2+\frac{\lambda^2}{m}}=\frac{\left(\nu^2-\frac{1}{m}\right)}{\frac{\nu^2}{\mathfrak{C}_0^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{m\mathfrak{C}_0^2}}$$

$$\frac{\mathfrak{C}_0^2}{\mathfrak{C}^2}=\frac{\nu^2+\frac{\mathfrak{C}_0^2}{\lambda^2}+\frac{1}{m}}{\nu^2-\frac{1}{m}}.$$

Dies ist eine Formel, die sich der von **Cauchy** nähert, wenigstens für Medien mit kleiner Dispersion, in der $\mathfrak{C}_0/\lambda$ als klein gegen N betrachtet werden kann. Denn dann kann man annähernd die Wurzel durch den binomischen Satz aus der letzten Gleichung ausziehen, und erhält

$$\mathfrak{n}=\alpha+\frac{\beta}{\lambda^2}$$

$$\alpha=\frac{\sqrt{\nu^2+\frac{1}{m}}}{\sqrt{\nu^2-\frac{1}{m}}},\quad \beta=\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{C}_0^2}{\sqrt{\nu^4-\frac{1}{m^2}}}.$$

---

[1]) In den folgenden Gleichungen ist hier ein Rechnungsfehler des Originals verbessert worden. (A. K.)

Polarisation durch Brechung.
Elektrische Schwingungen in der Einfallsebene.

Für den einfallenden Strahl sei beim Einfallswinkel a die yx-Ebene die Einfallsebene, die Amplitude der magnetischen Schwingung C, dem x parallel; die der elektrischen Schwingungen liegt dann in der Einfallsebene, hat den Betrag nach Gleichung 403
(4a) und (5b)

$$\frac{B}{C} = -\frac{1}{\mathfrak{E}\,.\,A.\mu.(1+h)}$$

und der Winkel zwischen diesen Schwingungen und der y-Axe ist gleich dem Einfallswinkel a, und ihre in die Richtung der y fallende Componente ist also

$$\mathfrak{Y} = B \cdot \cos a = -\frac{C\,.\cos a}{\mathfrak{E}.A.\mu.(1+h)}.$$

Die Grenzbedingungen ergeben sich aus den Gleichungen (3a) und (3b) dadurch, dass an der Grenzfläche die dort nach x genommenen Differentialquotienten nicht unendlich werden dürfen, d. h. dass die Werthe, von denen sie genommen sind, ebenda nicht discontinuirlich sein dürfen. Es müssen also die Werthe von $(\mathfrak{Y} - \mathfrak{y})/\varepsilon$, $(\mathfrak{Z} - \mathfrak{z})/\varepsilon$ und $\mathfrak{N}/\mu$ sowie $\mathfrak{M}/\mu$ auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich gross sein. Bezeichnen wir die Grössen, die sich auf das Mittel des einfallenden Strahles beziehen, mit dem Index 1, die des gebrochenen Strahles mit dem Index 3, so ist also an der Grenze zu setzen:

1. Für den einfallenden Strahl:

$$\frac{\mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{y}_1}{\varepsilon_1} = \frac{(B_1 - b_1)}{\varepsilon_1} \cos a$$

$$\frac{\mathfrak{N}_1}{\mu_1} = \frac{C_1}{\mu_1}.$$

2. Für den gebrochenen Strahl:

$$\frac{\mathfrak{N}_3}{\mu_3} = \frac{C_3}{\mu_3}$$

$$\frac{\mathfrak{Y}_3 - \mathfrak{y}_3}{\varepsilon_3} = \frac{B_3 - b_3}{\varepsilon_3}\,.\cos\beta.$$

3. Für den gespiegelten Strahl:

$$\frac{\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{y}_2}{\varepsilon_1} = -\frac{B_2 - b_2}{\varepsilon_1} \,.\, \cos a$$

$$\frac{\mathfrak{N}_2}{\mu_1} = -\frac{C_2}{\mu_1}.$$

Nach Gleichung (4a) ist für die verschiedenen Indices

$$\frac{B - b}{C} = -\frac{A . \varepsilon}{p} = -\mathfrak{C} \,.\, A \,.\, \varepsilon$$

oder

404
$$\frac{B_1 - b_1}{\varepsilon_1} = - C_1 \,.\, \mathfrak{C}_1 \,.\, A,$$

$$\frac{B_2 - b_2}{\varepsilon_1} = - C_2 \,.\, \mathfrak{C}_1 \,.\, A,$$

$$\frac{B_3 - b_3}{\varepsilon_3} = - C_3 \,.\, \mathfrak{C}_3 \,.\, A.$$

Die Grenzbedingungen fordern also:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{C_1 + C_2}{\mu_1} = \dfrac{C_3}{\mu_3} \text{ und} \\ (C_1 - C_2) \,.\, A \,.\, \mathfrak{C}_1 \,.\, \cos a = C_3 \,.\, A \,.\, \mathfrak{C}_3 \,.\, \cos\beta. \end{array}\right\} \quad \text{(I)}$$

Da die Wellenphasen an der Grenzfläche $x = 0$, beiderseits mit gleicher Geschwindigkeit fortlaufen müssen, ist bekanntlich

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{\sin a} = \frac{\mathfrak{C}_3}{\sin \beta},$$

und die Gleichungen (I) ergeben

$$\frac{\mu_3}{\mu_1} (C_1 + C_2) \cos\beta \,.\, \sin\beta = (C_1 - C_2) \,.\, \cos a \,.\, \sin a. \quad \text{(Ia)}$$

Da μ_3 und μ_1 bei den bekannten ungefärbt durchsichtigen Körpern kaum unterschieden sind, kann man ihr Verhältniss gleich 1 setzen, und erhält

$$C_1 (\sin 2\beta - \sin 2a) = - C_2 (\sin 2\beta + \sin 2a),$$

also $C_2 = 0$, wenn

$$\sin 2\beta = \sin 2a,$$

was eintritt, wenn $\beta + a = \pi/2$.

Es ist dies der Fall, wo der reflectirte Strahl auslöscht. Die Grösse des Polarisationswinkels entspricht Fresnel's bekanntem Gesetze, und zwar *für alle Farben.*

Magnetische Schwingungen in der Einfallsebene.

Wir bezeichnen wieder die Amplitude derselben in den, drei Strahlen mit C_1, C_2, C_3 und die der elektrischen mit B_1 B_2, B_3.

Die Grenzbedingung für die magnetischen Oscillationen wird

$$\frac{C_1 - C_2}{\mu_1} . \cos\alpha = \frac{C_3}{\mu_3} \cdot \cos\beta$$

und für die elektrischen:

$$\frac{B_1 - b_1}{\varepsilon_1} + \frac{B_2 - b_2}{\varepsilon_2} = \frac{B_3 - b_3}{\varepsilon_3}.$$

Indem wir diese Grössen wieder durch die entsprechenden C 405
ausdrücken, erhalten wir

$$[C_1 + C_2] . \mathfrak{C}_1 . A = C_3 . \mathfrak{C}_3 . A,$$

oder wenn wir $\mu_1 = \mu_3$ setzen:

$$(C_1 - C_2) . \cos\alpha . \sin\beta = (C_1 + C_2) \sin\alpha . \cos\beta, \qquad \text{(II)}$$

$$C_1 . \sin(\beta - \alpha) = C_2 . \sin(\alpha + \beta), \qquad \text{(IIa)}$$

was Fresnel's *bekannter Werth für die Intensität des reflectirten Strahles in der anderen Polarisationsrichtung ist.*

Sobald Absorption stattfindet, haben wir, wie bekannt, elliptische Polarisation. Ihre Gesetze sind aus der vorgetragenen Theorie ohne Lücke abzuleiten.

Zusätze.[1])

I. Mangel jeder Dämpfung, also $k = 0$, wäre am ersten 723
zu erwarten bei Substanzen von grossem Isolationsvermögen. Ich habe deshalb Hrn. Mahlke, wissenschaftlichen Hülfsarbeiter

---

[1]) Der auf die Correctur von Druckfehlern des Originals bezügliche Abschnitt dieser Zusätze ist hier ausgelassen, da die in ihm enthaltenen Verbesserungen in dem vorliegenden Abdruck bereits berücksichtigt sind. (1894.)

bei der Reichsanstalt, gebeten, die Vergleichung der von mir auf p. 519 gegebenen Formel, welche kurz geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{n}^2 = \frac{\alpha^2 - n^2}{\beta^2 - n^2},$$

worin

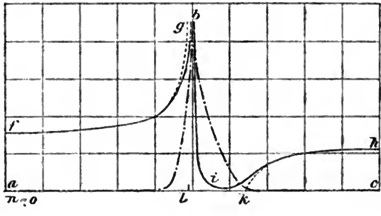
$$\alpha^2 = \nu^2 + \frac{1}{m} \quad \text{und} \quad \beta^2 = \nu^2 - \frac{1}{m}$$

mit den Beobachtungen für Terpentinöl von Fraunhofer und Schwefelkohlenstoff von Verdet zu vergleichen, indem er zur Bestimmung der beiden Constanten die Werthe für die Fraunhofer'schen Linien B und H benutzte und für die Schwingungszahlen n die Zahlen von Ångström.

724

Linie	Brechungscoëfficient für Terpentinöl		Brechungscoëfficient für Schwefelkohlenstoff	
	beobachtet	berechnet	beobachtet	berechnet
B	1,4704	1,4704	1,6114	1,6114
C	1,4715	1,4715	1,6153	1,6147
D	1,4745	1,4744	1.6261	1,6240
E	1,4784	1,4783	1,6403	1,6368
F	1,4817	1,4813	1,6526	1,6487
G	1,4883	1,4881	1,6756	1,6728
H	1,4938	1,4938	1,6956	1,6956

Die Beobachtungen am Terpentinöl stimmen in der That so gut mit der hier gegebenen Theorie, dass die Abweichungen wohl Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden können. Der grösste Fehler bleibt unter 1/3700, und ist kleiner als die Differenzen, die noch bei den besten neuesten Messungen der Wellenlängen zwischen verschiedenen guten Beobachtern vorkommen.



Die Zahlen für Schwefelkohlenstoff zeigen grössere Abweichungen und systematischen Gang derselben, so dass es hier wahrscheinlicher wird, dass die Absorption nicht ganz zu vernachlässigen ist.

II. Um den ziemlich verwickelten Gang der Erscheinung übersichtlich zu machen bei vorhandener Absorption, hat Hr. Mahlke die Curven der Figur construirt. Die ausgezogenen Curven *fb* und *bih* stellen durch ihre Ordinaten, von der Geraden *ac* ab gerechnet, die Werthe des Brechungsverhältnisses $\mathfrak{n}$ dar für $a = 5$, $\beta = 4$, $k = 0{,}1$, während die Schwingungszahlen n den horizontalen Entfernungen auf *ac* proportional wachsen. Die aus abwechselnden Linien und Punkten hergestellte Curve *ab* und *bc* zeigt den Werth des Absorptionsfactors q für gleiche Weglängen des Strahles. Bei *a* ist $n = 0$, wächst über *c* hinaus bis ∞, bei *l* ist $n = \beta$, bei *k* ist $n = a$. Der Gipfel beider Curven bei *b* ist abgebrochen, weil sie zu lang geworden wären; sie behalten aber endliche Höhe auch dort.

Endlich sind noch mit punktirten Linien die Theile der 725
Curve für das Brechungsverhältniss angegeben, welche dem Werthe $k = 0$ entsprechen, soweit sie sich trennen von der ausgezogenen Curve für $k = 0{,}1$. Diese Curve zerfällt in zwei getrennte Stücke *fg* und *kc*, von denen das erstere dem Gange des Brechungsverhältnisses in gut durchsichtigen farblosen Körpern entspricht.

Die Verhältnisse des Platin, Eisen, Nickel, Wismuth würden nach Kundt's Beobachtungen Stücken der Curve des Brechungsverhältnisses zwischen *b* und *i* entsprechen können mit $\mathfrak{n} > 1$ und anomaler Dispersion. Silber, Kupfer, Gold dagegen würde in die Tiefe bei *i* bez. den ansteigenden Theil der Curve zwischen *i* und *h* fallen können mit $\mathfrak{n} < 1$ und keiner oder normaler Dispersion.

CXXXVI.

Folgerungen aus Maxwell's Theorie über die Bewegungen des reinen Aethers.

Aus den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Sitzung vom 6. Juli 1893. S. 649—656 und Wiedem. Ann., Bd. LIII. S. 135—143.

---

649 In Maxwell's Theorie der Elektrodynamik wird dem Aether, der als Träger der elektrischen und magnetischen Kräfte gilt, Beweglichkeit zugeschrieben; und es werden auch Werthe für die Richtung und Intensität der Bewegungskräfte angegeben, die auf ihn wirken. Diese Annahme führt in keine Schwierigkeit, so lange wir uns den Aether als durchdrungen von ponderabler Substanz vorstellen, die sich mit ihm bewegt. Aus den vorliegenden physikalischen Erfahrungen können wir schliessen, dass in der That solche Einmischungen, seien sie continuirlich oder discontinuirlich vertheilt, in allen Substanzen vorkommen, die entweder leitend, oder lichtbrechend gegen das Vacuum sind, oder Werthe der dielektrischen und magnetischen Constanten haben, die von denen des Vacuum abweichen. Den ponderablen Theilen dieser Medien wird auch Beharrungsvermögen zukommen, und so weit wir uns diese Theile continuirlich vertheilt und fest anhaftend am Aether vorstellen dürfen, würden dieselben unter dem Einfluss endlicher ponderomotorischer Kräfte auch nur endliche Beschleunigungen empfangen, und würden wir nach den Bewegungen der wägbaren Theile, soweit diese beobachtbar oder durch die Theorie zu be-

stimmen sind, auch die damit übereinstimmenden Bewegungen des Aethers erschliessen können. Die Beobachtungen über die durch Bewegung der wägbaren Körper inducirten elektromotorischen Kräfte sind bisher in guter Uebereinstimmung mit Maxwell's Theorie gewesen.

Anders liegt die Sache für die von wägbaren Körpern freien, nur mit Aether gefüllten Räume, als welche uns der Weltraum, beziehlich die Molecularinterstitien der schweren Körper entgegentreten.

In diesen Fällen tritt die Frage auf, ob reiner Aether ganz frei von allem Beharrungsvermögen bestehen und den Maxwell'schen Gleichungen genügen kann, und welche Bewegungen er in solchem Falle ausführen müsste. Damit hängt eng die Frage zusammen, ob er den sich durch ihn hinbewegenden wägbaren Körpern ausweichen muss, oder sie durchdringt, dabei 650
entweder ganz in Ruhe bleibend, oder sich zum Theil mit ihnen bewegend, zum Theil ausweichend, nach der Vorstellung von Fresnel.

Ich will heut nur das Hauptergebniss meiner letzten Untersuchung dieser Fragen der Akademie vorlegen, welche unter der Voraussetzung geführt ist, dass der reine Aether in mechanischer Beziehung die Eigenschaften einer reibungslosen, incompressiblen Flüssigkeit habe, dabei aber ganz ohne Beharrungsvermögen sei. Danach würden die von Maxwell aufgestellten, und von Hertz durch explicite Einführung der Geschwindigkeitscomponenten vervollständigten Gesetze in der That geeignet sein, vollständigen Aufschluss über die Gesetze der im Aether auftretenden Veränderungen und Bewegungen zu geben, und zwar so, dass die Zusammenfassung der Gesetze der Elektrodynamik unter das Princip der kleinsten Wirkung, welches ich unter dem 12. Mai 1892 der Akademie vorgelegt habe[1]), ein in sich vollständiges System von Wirkungen und Gegenwirkungen darstellt, und keiner weiteren Ergänzung bedarf, als der Einführung der Hypothese der Incompressibilität. Diese kann einfach dadurch gewonnen werden, dass man der dort als elektrokinetisches Potential bezeichneten

[1]) Abgedruckt auf S. 476 des vorliegenden Bandes.

Grösse Φ noch ein, eine willkürliche Function der Coordinaten S als Factor enthaltendes Integral hinzufügt, nämlich

$$\iiint S\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}\right]\cdot dx\cdot dy\cdot dz,$$

welches für jede Bewegung einer incompressiblen Flüssigkeit, bei der überall und immer

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

bleibt, den Werth von Φ nicht ändert.

Wir werden im reinen Aether keine elektrischen oder magnetischen Dichtigkeiten σ und τ haben können, und haben also für die nur Aether enthaltenden Theile des Raumes in den Bezeichnungen meiner citirten Abhandlung zu setzen:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1a),$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1b).$$

Die elektrischen Momente $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ werden in allen Theilen des Aetherraumes die constante Beziehung zu den Kraftcomponenten X, Y, Z haben:

651

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{1}{4\pi}\mathfrak{X} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y &= \frac{1}{4\pi}\mathfrak{Y} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z &= \frac{1}{4\pi}\mathfrak{Z} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (1c).$$

Ebenso die magnetischen Momente

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{4\pi}\mathfrak{L} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ M &= \frac{1}{4\pi}\mathfrak{M} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ N &= \frac{1}{4\pi}\mathfrak{N} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (1d).$$

Indem wir die in der citirten Abhandlung gebrauchten Bezeichnungen der dielektrischen und magnetischen Constanten

$$\varepsilon = \mu = 4\pi$$

setzen, halten wir uns in Uebereinstimmung mit der dort, und mit der von Hertz gebrauchten Bezeichnung.

Die ponderomotorischen Kräfte, welche auf das Innere der Äthervolumina wirken, sind für die Volumeneinheit berechnet:

1. Von elektrischen Spannungen herrührend:

$$\Xi_e = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [X^2 - Y^2 - Z^2] + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial y} [XY] + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial z} [XZ]$$

oder, wenn wir unter Berücksichtigung von (1) die Differentiationen ausführen

$$\left.\begin{aligned} \Xi_e &= \frac{1}{4\pi}\left[Y\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)\right] + \frac{1}{4\pi}\left[Z\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\right] \ldots \\ \Upsilon_e &= \frac{1}{4\pi}\left[X\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\right] + \frac{1}{4\pi}\left[Z\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)\right] \ldots \\ Z_e &= \frac{1}{4\pi}\left[X\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right)\right] + \frac{1}{4\pi}\left[Y\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\right] \ldots \end{aligned}\right\} \quad (2).$$

In ganz gleicher Weise sind die ponderomotorischen Kräfte Ξ_m u. s. w. magnetischen Ursprungs aus den Componenten der magnetischen Kräfte zusammenzusetzen. Die Summe beider

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= \Xi_e + \Xi_m \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Upsilon &= \Upsilon_e + \Upsilon_m \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z &= Z_e + Z_m \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (2a)$$

bildet den gesammten Betrag der ponderomotorischen Kraft- 652
componenten. Dabei ist zu bemerken, dass die in diesen Gleichungen vorkommenden Grössen $\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right)$ u. s. w. und $\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right)$ u. s. w. solchen Componenten der Kräfte entsprechen, die sich nicht auf ein Potential zurückführen

lassen, sondern in sich selbst zurücklaufende Kraftlinien hervorrufen. Wir können sie kurz als **cyklische Kräfte** bezeichnen.

Diese selben Grössen ergeben sich aus den Gleichungen (4f) meines citirten Aufsatzes:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial y} &= -4\pi A \cdot \frac{dL}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \\
\frac{dZ}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} &= -4\pi A \cdot \frac{dM}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} &= -4\pi A \cdot \frac{dN}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} (3).$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} &= -4\pi A \cdot \frac{dX}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} &= -4\pi A \cdot \frac{dY}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= -4\pi A \cdot \frac{dZ}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} (3a),$$

worin die mit der Bezeichnung d/dt versehenen Differentialquotienten sich auf die Aenderungen beziehen, die in einem sich fortbewegenden Volumelemente des Aethers in der Zeit dt eintreten, nämlich

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} &= \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}[X\cdot\beta - Y\cdot\alpha] + \frac{\partial}{\partial z}[X\cdot\gamma - Z\cdot\alpha] \;.. \\
\frac{dY}{dt} &= \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[Y\cdot\alpha - X\cdot\beta] + \frac{\partial}{\partial z}[Y\cdot\gamma - Z\cdot\beta] \;.. \\
\frac{dZ}{dt} &= \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[Z\cdot\alpha - X\cdot\gamma] + \frac{\partial}{\partial y}[Z\cdot\beta - Y\cdot\gamma] \;.
\end{aligned}\right\} (4),$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}[L\cdot\beta - M\cdot\alpha] + \frac{\partial}{\partial z}[L\cdot\gamma - N\cdot\alpha] \;. \\
\frac{dM}{dt} &= \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[M\cdot\alpha - L\cdot\beta] + \frac{\partial}{\partial z}[M\cdot\gamma - N\cdot\beta] \\
\frac{dN}{dt} &= \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[N\cdot\alpha - L\cdot\gamma] + \frac{\partial}{\partial y}[N\cdot\beta - M\cdot\gamma]
\end{aligned}\right\} (4a).$$

Die Gleichungen (2a) ergeben nunmehr 653

$$\left.\begin{aligned}
\Xi &= A\left\{Z\cdot\frac{dM}{dt} - Y\cdot\frac{dN}{dt} + M\cdot\frac{dZ}{dt} - N\cdot\frac{dY}{dt}\right\} \;.\;. \\
\Upsilon &= A\left\{X\cdot\frac{dN}{dt} - Z\cdot\frac{dL}{dt} + N\cdot\frac{dX}{dt} - L\cdot\frac{dZ}{dt}\right\} \;.\;. \\
Z &= A\left\{Y\cdot\frac{dL}{dt} - X\cdot\frac{dM}{dt} + L\cdot\frac{dY}{dt} - M\cdot\frac{dX}{dt}\right\} \;.\;.
\end{aligned}\right\} \quad (5).$$

Wenn wir für die mit d/dt bezeichneten Differentialquotienten ihre in (4) und (4a) angegebenen Werthe setzen und zur Abkürzung die Bezeichnungen einführen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= Z\cdot M - Y\cdot N \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
\mathfrak{Q} &= X\cdot N - Z\cdot L \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
\mathfrak{R} &= Y\cdot L - X\cdot M \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.
\end{aligned}\right\} \quad (5a),$$

so ist zu bemerken, dass die Grössen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ den Componenten der Geschwindigkeiten proportional sind, mit denen die elektromagnetische Energie durch den Raum des ruhenden Aethers strömt. Wenn der Aether leer ist und ruht, und also die $\alpha = \beta = \gamma = 0$ sind, reduciren sich die Werthe der ponderomotorischen Kräfte aus den Gleichungen (5) auf die einfacheren Werthe

$$\Xi = A\cdot\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial t}$$

$$\Upsilon = A\cdot\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial t}$$

$$Z = A\cdot\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial t}$$

Also nur, wenn die Elektricitätsvertheilung von der Art ist, dass sie im ruhenden Aether ein Strömen der Energie hervorbringen würde, und zwar nur während der Strom der Energie in der Zeit steigt oder nachlässt, sind ponderomotorische Kräfte im Aether vorhanden, die durch die Incompressibilität desselben nicht aufgehoben werden können, und den Aether selbst in Bewegung setzen müssen. Bekanntlich ziehen die Phasen der elektromagnetischen Spannungen dabei mit Lichtgeschwindigkeit fort. Da der Regel nach die $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ Grössen zweiten Grades

und bei regelmässigen Lichtoscillationen verschwindend klein sind, übrigens auch nur eine halb so lange Schwingungsdauer haben als die elektrischen und magnetischen Momente, so sind im Allgemeinen die Kräfte, die daraus entspringen, verschwindend kleine Grössen zweiter Ordnung.

654 Dass die elektrischen Gleichgewichtszustände, wenn sie einmal vorübergehend gestört worden sind, sich ausserordentlich schnell immer wieder herstellen, indem diejenigen Theile der Wellen, welche Werthen der Grössen $\partial\mathfrak{P} / \partial t$, $\partial\mathfrak{Q} / \partial t$, $\partial\mathfrak{R} / \partial t$, die von Null verschieden sind, entsprechen, mit ungeheurer Geschwindigkeit in den unendlichen Raum hinauslaufen, oder durch Leiter absorbirt werden, ist schon in früheren Arbeiten verschiedener Physiker hervorgehoben worden.

In frei beweglichem, reinem Aether dagegen würden elektrische und magnetische Vertheilungen, die cyklische Kräfte ergeben und deshalb durch den Druck nicht im Gleichgewicht gehalten werden können, augenblicklich strömende Bewegungen des Aethers hervorrufen müssen, die jeden Grad von Geschwindigkeit erreichen, und sich soweit steigern können, bis die durch die Bewegung erzeugten inducirten elektrischen und magnetischen Kräfte die ponderomotorische Kraft vernichten nach dem allgemeinen Gesetze, dass eine durch elektromagnetische Kräfte erzeugte Bewegung immer eine die Bewegung hemmende Induction bewirkt.

Wir wollen also demnächst untersuchen, ob solche Bewegungen des reinen Aethers in jedem Falle gefunden werden können, welche die durch die Incompressibilität des Aethers nicht zu äquilibrirenden ponderomotorischen Kräfte aufheben müssen.

Durch den Druck einer incompressibeln Flüssigkeit können nur solche Kräfte aufgehoben werden, deren Componenten die Form haben

$$\left.\begin{aligned} \Xi_p &= -\frac{\partial P}{\partial x} \\ \Upsilon_p &= -\frac{\partial P}{\partial y} \\ Z_p &= -\frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (5b).$$

In die Function P tritt zunächst ein der Druck, welcher der elektromagnetischen Energie aller den Aether durchziehenden elektromagnetischen Kräfte proportional ist

$$P_0 = \frac{1}{8\pi}\left\{(X^2 + Y^2 + Z^2) + (L^2 + M^2 + N^2)\right\} \quad \text{(5c)},$$

ferner noch ein von der Bewegung abhängiger Theil

$$P = P_0 + A\,[\alpha \cdot \mathfrak{P} + \beta \cdot \mathfrak{Q} + \gamma \cdot \mathfrak{R}] + S \quad \text{(5d)}.$$

Da das hierin vorkommende S zunächst als willkürliche Function der Coordinaten und der Zeit aufzufassen ist, kann auch das P als eine solche angesehen werden.

Wenn man diese Bezeichnungen benutzt, so würden die 655
Gleichungen (5b) folgende Bedingungen ergeben:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial P}{\partial x} + A\left[\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \beta\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x}\right) - \gamma\left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}\right)\right] \\
0 &= \frac{\partial P}{\partial y} + A\left[\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial t} + \gamma\left(\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y}\right) - \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x}\right)\right] \\
0 &= \frac{\partial P}{\partial z} + A\left[\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} + \alpha\left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}\right) - \beta\left(\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \text{(6)}.$$

Dies ist das System von Differentialgleichungen, welches neben der Gleichung der Incompressibilität:

$$0 = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \quad \text{(1)}$$

erfüllt werden müsste, um die cyklisch wirkenden Kräfte im reinen Aether ganz aufzuheben. Es sind dies 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten α, β, γ, P, wenn wir die Vertheilung der elektrischen und magnetischen Kräfte, die ja meist durch äussere Ursachen bestimmt sind, als gegeben betrachten.

Man kann aus den drei Gleichungen (6) die α, β, γ eliminiren, indem man diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y}\right), \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}\right) \text{ und } \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x}\right)$$

multiplicirt und addirt. Dies giebt:

$$0 = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + A \cdot \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + A \cdot \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} + A \cdot \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x}\right) \quad (6a).$$

Dies ist eine Gleichung, aus der P gefunden werden kann, wenn die $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ als Functionen der x, y, z, t gegeben sind, nur wird in dem allgemeinen Integral für P eine willkürliche Function stehen bleiben. Ist z. B. der Werth von P für die Punkte einer Ebene $x = C$ und für jede Zeit t angenommen, wodurch auch die $\partial P/\partial y$ und $\partial P/\partial z$ gegeben sind, so ergiebt Gleichung (6a) den Werth von $\partial P/\partial x$, so dass dadurch der Werth von P auch für $(x + dx)$ gefunden werden kann, und so fortschreitend.

Dann ergeben je zwei von den Gleichungen (6), nachdem der Gang von P bestimmt ist, je zwei der Grössen α, β, γ als Function der dritten, woraus sich die Richtung der Stromlinien ergiebt, und da aus der Gleichung (1) folgt, dass in jedem Stromfaden das Product aus der resultirenden Geschwindigkeit mit dem Querschnitt des Fadens constant ist, so sind die ge-
656 sammten Stromcomponenten vollständig bestimmt, wenn die Grössen ihrer Resultante in allen Punkten der Anfangsebene $x = \text{Const.}$ gegeben sind.

Dies ergiebt noch eine zweite willkürlich zu wählende Function, die in dem allgemeinen Integrale vorkommt.

Das vollständige Integral der Gleichungen (6) ist, da diese Gleichungen nach α, β, γ und P linear sind, bekanntlich zusammenzusetzen aus irgend einem einzelnen Integrale jenes Gleichungssystems und dem allgemeinen Integrale derselben Gleichungen, welches sie ergeben, nachdem man darin

$$\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} = 0$$

gesetzt hat. Unter dieser Bedingung folgt:

$$\alpha \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \beta \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + \gamma \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = 0,$$

d. h. die Stromlinien verlaufen unter der letztgenannten Annahme längs der Flächen $P = \text{Const.}$

Ferner sagt die entsprechend reducirte Gleichung (6a) dann aus, dass auch die Linien, deren Elemente sich verhalten wie

$$dx : dy : dz = \left(\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial y}\right) : \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}\right) : \left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x}\right)$$

längs derselben Flächen $P =$ Const. verlaufen.

Die obigen Betrachtungen zeigen, dass in das allgemeine Integral zwei in Flächen und nach der Zeit willkürliche Functionen eintreten, nämlich P und $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$. Sollte der Aether an der Grenze den ponderablen Körpern unverrückbar anhaften, so müssten es drei sein, nämlich α, β, γ. Der Aether wird also unter Umständen an der Grenzfläche gleiten müssen. Indem man solche Gleitungen als einen sehr jähen Uebergang zwischen verschiedenen Werthen tangentialer Geschwindigkeiten betrachtet, werden in der Grenzschicht noch dem entsprechende elektrische und magnetische Kräfte entstehen können, mit entsprechend jähen Unterschieden der tangentialen Componenten dieser Kräfte.

Eine Reihe von Beispielen, die das Verhalten des Aethers in der Umgebung elektrisch und magnetisch polarisirter Körper, wie es aus diesen Gleichungen folgt, erkennen lassen, behalte ich mir vor in späteren Aufsätzen zu geben.

CXXXVII.

Ueber den Ursprung der richtigen Deutung unserer Sinneseindrücke.[1])

Aus der Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane.
Band VII, S. 81—96.

---

81 Die älteren Philosophen und Psychologen waren durchaus geneigt, alles, was in unseren sinnlichen Wahrnehmungsbildern ohne Nachdenken, ohne Besinnen augenblicklich und bei allen Individuen in gleicher Weise zu Stande kommt, unter den Begriff der *Perception* einzureihen und es als ein unmittelbares Product der organischen Einrichtungen des Nervensystems aufzufassen, dagegen die mögliche Mitwirkung auch sogenannter niedrigerer psychischer Processe, wie z. B. des Gedächtnisses und des Erinnerungsvermögens, dabei gänzlich zu vernachlässigen.

Dass aber in der That die Vorstellung von der normalen Bedeutung oft wiederholter Perceptionen mit unabänderlicher Sicherheit, blitzschnell und ohne das geringste Besinnen zu Stande kommen kann, dafür bietet das Verständniss der Muttersprache ein lehrreiches Beispiel. Angeboren ist uns diese Kenntniss nicht; wir haben auch unsere Muttersprache zweifellos gelernt, und zwar durch den Gebrauch, also durch häufig wiederholte Erfahrung. Kinder unserer Nation, die jen-

---

[1]) Siehe das Vorwort zum vorliegenden Bande (A. K.).

seits der Grenze unseres Vaterlandes geboren worden und unter fremdsprachigen Menschen aufgewachsen wären, würden eine andere Sprache erlernt haben und darin ebenso sicher geworden sein, wie wir in der unsrigen. Dabei ist eine ausgebildete Sprache einer civilisirten Nation ein so reich entwickeltes Ausdrucksmittel der vielfältigsten und feinsten Schattirungen des Gedankens, dass sie in dieser Beziehung sehr wohl mit dem Reichthum der körperlichen Formen der uns umgebenden Naturgebilde verglichen werden kann.

Das Beispiel der Sprache ist auch in anderer Beziehung 82
lehrreich, weil es uns Aufschluss giebt über die Frage, wie solch sicheres und übereinstimmendes Verständniss eines Systems von Zeichen zu gewinnen ist, welches dem individuellen Beobachter gegenüber nur wie ein ganz willkürlich gewähltes wirken kann, wenn auch der vergleichende Philolog Spuren des Zusammenhanges einzelner Wurzeln darin zu erkennen weiss. Die Muttersprache wird nur an dem Gebrauch der Worte gelernt. Das Kind hört immer wieder den normalen Namen eines Gegenstandes aussprechen, wenn ihm dieser gezeigt oder gereicht wird, und hört immer wieder die gleiche Veränderung der ihm sichtbaren Aussenwelt mit dem gleichen Wort bezeichnen. Dadurch heftet sich in seinem Gedächtniss das Wort an die Sache, desto öfter und desto fester, je häufiger beide sich wiederholen. Die Wiederholung braucht aber nicht genau in allen Einzelheiten gleich zu sein, sondern der gleiche Namen kann sich auch an eine Klasse unter einander ähnlicher Gegenstände heften oder an eine Klasse ähnlicher Vorgänge. Dadurch entwickeln sich dann Namen für den Begriff einer Klasse von Anschauungsbildern, wobei der Umfang, in welchem der Name für verschiedene Modificationen derselben gebraucht zu werden pflegt, sich ebenfalls nur durch den Gebrauch der Sprache feststellt und nur ausnahmsweise durch eine begriffliche Definition unterstützt wird.

Bei diesem Vorgange, den wir aus alltäglicher Erfahrung kennen und der sich ähnlich für das Verständniss des Wortschatzes jeder fremden Sprache, die wir später erlernen, wiederholt, ist zunächst bekannt, dass die Bedeutung jedes Wortes sich desto fester einprägt, je öfter wiederholt wir es anwenden oder

anwenden hören; ferner, dass wir anfangs zwar noch die einzelnen Fälle, wo wir es haben anwenden hören, im Gedächtniss behalten. Später dagegen, wenn die Zahl dieser Fälle zu gross geworden ist, als dass wir sie alle einzeln mit den Nebenumständen und in der Zeitfolge, mit und in denen sie eingetreten sind, aus unserer Erinnerung uns aufzählen könnten, bleibt uns nur das Gesammtergebniss unserer bisherigen Erfahrungen stehen, dass das bestimmte Wort diese bestimmte Reihe einander ähnlicher Gegenstände oder einander ähnlicher Vorgänge zu bedeuten pflegt; aber wir wissen nicht mehr anzugeben, bei welchen einzelnen Gelegenheiten wir zu dieser
83 Kenntniss gekommen sind, auch nicht, warum wir es für die eine Modification des Begriffes gebrauchen, bei einer anderen aber Anstand nehmen, dies zu thun.

Ich schliesse aus diesen Beobachtungen, dass wir durch häufige Wiederholung gleichartiger Erfahrungen dazu gelangen können, eine regelmässig immer wieder eintretende Verbindung zwischen zwei verschiedenen Perceptionen, beziehlich Vorstellungen, z. B. zwischen dem Klang eines Wortes und sichtbaren oder fühlbaren Anschauungsbildern, herzustellen und immer fester zu machen, die ursprünglich gar keinen natürlichen Zusammenhang zu haben brauchen, und dass, wenn dies geschehen ist, wir gar nicht mehr im Einzelnen anzugeben wissen, wie wir zu dieser Kenntniss gekommen sind, und auf welche einzelne Beobachtungen sie sich stützt.

Schliesslich finden wir, dass wir nicht nur für unsere Muttersprache, sondern auch für gut erlernte fremde Sprachen einen Grad des Verständnisses erreichen können, bei dem wir ohne Nachsinnen und Überlegung im Augenblick den Sinn dessen verstehen, was der mit uns Sprechende uns mittheilen will, und dass wir im Stande sind, den feinsten und mannigfaltigsten Modificationen seines Gedankens und seiner Empfindung dabei zu folgen. Wenn wir aber sagen sollen, wie wir zu dieser Kenntniss gekommen sind, so können wir dies nur in der Form des allgemeinen Satzes aussprechen, dass wir immer gefunden haben, dass diese Worte in diesem Sinne gebraucht wurden.

Wir kennen es aber als eine allgemeine Regel der Wir-

kungsweise unseres Gedächtnisses, dass sehr oft in gleicher Weise wiederholte und immer in derselben Art der Verbindung zusammengeschlossene Eindrücke unter übrigens gleichen Bedingungen eine viel dauerndere Spur ihrer selbst und ihrer Verbindung in uns hinterlassen und viel sicherer und schneller in dieser Verbindung wieder in das Bewusstsein treten, als solche, welche uns nur in zufälligen und wechselnden Verbindungen vorgekommen sind.

Dieselbe Regel bestätigt sich auch in einer ausserordentlich grossen Zahl anderer Fälle. Am ausnahmslosesten wird eine Verbindung zweier Beobachtungsthatsachen sich immer wiederholen, wenn dieselbe durch ein Naturgesetz gefordert wird, welches entweder die Gleichzeitigkeit oder die regel-
mässige Aufeinanderfolge derselben in bestimmter Frist ver- 84
langt. Durch einen gesetzlosen Zufall dagegen herbeigeführte Fälle von Gleichzeitigkeit oder Aufeinanderfolge werden sich zwar auch gelegentlich wiederholen können, aber nicht ausnahmslos; dazwischen werden sich Fälle mit anderem, und selbst solche mit entgegengesetztem Erfolge einmischen, welche dann dem ausschliesslichen Übergewicht der einen Verbindung entgegenwirken und verhindern, dass die wechselnden Zufälligkeiten derselben oder überhaupt, was in der wechselnden Erscheinungsweise des Vorganges nicht Ausdruck einer bestimmten Gesetzmässigkeit ist, sich ebenso sicher und unabänderlich festsetzen könne, wie das Gesetzmässige.

Wenn wir eine Sprache lernen, so ist das, was uns darin als gesetzmässig entgegentritt, nur eine von Menschen gewählte und eingehaltene Regel, der wir nicht einmal die Festigkeit und Unabänderlichkeit eines Naturgesetzes zuerkennen können. Dazu kommt, dass die Zeichen für sehr ähnliche Objecte durchaus nicht nothwendig selbst einander ähnlich zu sein brauchen. Im Gegentheil zeigen sie meist ganz unregelmässige, sprungweise auftretende Verschiedenheiten. Wir dürfen uns also nicht wundern, wenn wir unter der Einwirkung ausserordentlich viel zahlreicherer und unter sich ausnahmslos übereinstimmender Beobachtungen über das Verhalten der Naturkörper gegen einander und gegen unsere Sinnes- und Bewegungsorgane zu einer viel vollständigeren

Kenntniss des normalen Verhaltens dieser Körper und ihrer Erscheinungsweise in verschiedenen Lagen und bei verschiedenen Bewegungen kommen, als sie durch die Sprache wiedergegeben werden kann. Für eine genaue Beschreibung der mannigfaltigen Sinneseindrücke, welche ein einziger Naturkörper, namentlich bei etwas unregelmässiger oder verwickelter Gestalt, dem Auge und der Hand darbietet, ist die Sprache viel zu arm; und eine Beschreibung eines solchen Eindruckes in Worten würde eine ungeheuer weitläufige und zeitraubende Arbeit sein, die wir offenbar nicht auszuführen pflegen, wenn wir das Anschauungsbild eines solchen Objectes uns einprägen wollen. In diesen Fällen oder auch in solchen, wo gar keine Wortbeschreibung möglich ist, genügt uns der sinnliche Eindruck ohne Wortfassung, und wir wissen mit dessen Hülfe sogar die feinsten Eindrücke, wie die von menschlichen
85 Gesichtszügen, wieder zu erkennen, gelegentlich nach sehr kurzer Betrachtung und nach langer Zwischenzeit.

In solchen Fällen wird kein Zweifel darüber sein können, dass wir den sinnlichen Eindruck, den uns das Object gemacht hat, mit hinreichend viel Einzelheiten im Gedächtniss behalten, um noch längere Zeit später eine bestimmte individuelle Physiognomie von der aller anderen Menschen sicher zu unterscheiden.

Wenn wir ein solches, nur durch sinnliche Eindrücke gegebenes Anschauungsbild eines bestimmten Objectes in uns tragen, pflegen wir dies als *Kenntniss* des Objectes im Gegensatz zu dem in Worte zu fassenden *Wissen* zu bezeichnen. Eine solche Kenntniss braucht sich nicht auf einzelne perspectivische Bilder des Objectes zu beschränken, sondern kann auch die Gesammtheit der perspectivischen Bilder umfassen und vereinigen, welche nach einander durch Betrachtung von verschiedenen Gesichtspunkten aus gewonnen werden können. In der That finden wir, dass wir von wohlbekannten Gegenständen eine Vorstellung ihrer körperlichen Form in uns tragen, welche die Gesammtheit aller der einzelnen perspectivischen Bilder, die wir von verschiedenen Gesichtspunkten aus dahin blickend gewinnen können, vertritt. Denn mit der Kenntniss der körperlichen Form des Objectes ausgerüstet können wir

uns die sämmtlichen perspectivischen Bilder, die wir bei der Ansicht von dieser oder jener Seite zu erwarten haben, deutlich vorstellen, und in der That nehmen wir sogleich Anstoss, wo ein solches Bild unserer Erwartung nicht entspricht, wie es z. B. geschehen kann, wenn durch die Änderung der Lage des Gegenstandes eine Änderung seiner Körperform eintritt. Man denke nur daran, wie ausserordentlich empfindlich ein aufmerksamer Beobachter gegen Zeichenfehler in Darstellungen von Menschen oder Pferden sich erweisen kann, oder gegen kleine Fehler perspectivischer Constructionen, welche regelmässige architektonische Gebilde darstellen sollen. Ja, es kommen häufig genug Fälle vor, wo man eher einen kleinen Fehler in einer perspectivischen Zeichnung bemerkt, als einen gleich grossen in dem Umrisse eines der Rechtecke, welche Theile der Zeichnung bilden, wenn eines derselben isolirt nachconstruirt wird.

In der That ist die körperliche Form eines festen Objectes
eine Grösse, die viel mannigfaltigere constante Beziehungen 86
zwischen ihren verschiedenen Theilen und Dimensionen darbietet, als jedes einzelne perspectivische Bild derselben, und aus der ersteren ist daher bei bekannter Lagenänderung die Änderung jeder perspectivischen Ansicht sicher herzuleiten, weil dies unter dem Eindruck eines ganz festen, wenn auch räumlichen Vorstellungsbildes geschehen kann, welches das constant bleibende Ergebniss aller einzelnen Flächenansichten zusammenfasst, während eine einzige perspectivische Ansicht nicht die nöthigen Daten liefert, um eine ganz sichere und unzweideutige Vorstellung von der Form des Ganzen und seiner wechselnden Ansichten von anderen Seiten her zu gewinnen. Die auf die festere und einfachere Gesetzmässigkeit gestützte Vorstellung erweist sich hier also auch als die, welche die sicherere Anschauung giebt.

Sehr augenfällig tritt dieses Verhältniss bei der Betrachtung stereoskopischer Bilder hervor. Wenn man nämlich ein Paar stereoskopische Bilder mit etwas verwickelter Führung der Grenzlinien, z. B. eines regelmässigen Polyeders oder Krystallmodells, vor Augen hat, misslingen die Versuche, das körperliche Bild aus den beiden Darstellungen zur Vereinigung

zu bringen, oft im Anfang dadurch, dass die Blickpunkte der beiden Augen leicht auf nicht einander entsprechenden Linien fortgleiten und sich wieder trennen, bis man die richtige körperliche Vorstellung von dem dargestellten Object gewonnen hat. So wie diese gefunden ist, wandern die beiden Blicklinien mit der grössten Sicherheit und Schnelligkeit über alle Theile der Figuren hin. Hier bewährt sich also in der That die Gesammtauffassung der Körperform gleich als die Regel für die Vorstellung, nach welcher man die beiden Blicklinien zu führen hat, um fortdauernd auf correspondirenden Punkten beider Zeichnungen zu bleiben.

In welcher Weise solche Kenntnisse der Bedeutung der Gesichtsbilder von jungen menschlichen Kindern zuerst gesammelt werden, ergiebt sich leicht, wenn wir dieselben beobachten, während sie mit den ihnen als Spielzeug dargebotenen Objecten sich beschäftigen, wie sie dieselben betasten, stundenlang von allen Seiten betrachten, herumwenden, sie in den Mund stecken u. s. w., endlich sie herunterwerfen oder zu zerschlagen suchen und dies jeden Tag wiederholen. Man
87 wird nicht daran zweifeln können, dass dies die Schule ist, in der sie das natürliche Verhalten der sie umgebenden Gegenstände kennen lernen, dabei auch die perspectivischen Bilder verstehen, ihre Hände gebrauchen lernen. Ebenso lehrt die Beobachtung jüngerer Kinder, dass sie in den ersten Wochen ihres Lebens diese Kenntnisse noch nicht haben. Wenn ihnen irgend eine instinktmässige Kenntniss angeboren wäre, so sollte man erwarten, dass es in erster Linie die Kenntniss des Bildes der Mutterbrust sein müsste und die Kenntniss derjenigen Bewegungen, durch welche sie sich diesem Gesichtsbilde zuwenden könnten. Aber eine solche Kenntniss fehlt ganz offenbar. Man sieht, dass das Kind lebhaft wird, wenn es in die Stellung für das Säugen gebracht wird, und unruhig suchend den Kopf hin und her wendet, um die Brust zu finden, aber es wendet sich in den ersten Tagen ebenso oft von der Brust ab, wie ihr zu, obgleich es diese frei erblicken kann. Offenbar weiss es in diesem frühen Alter weder das Gesichtsbild, noch die Richtung seiner Bewegungen zu deuten.

Ebenso oft sieht man, dass ein Kind von ein oder zwei Wochen, dem man eine Kerzenflamme vorhält, unruhig wird und die Augen hin und her wendet, offenbar mit der Absicht, die helle Flamme anzustarren. Sobald es die richtige Stellung der Augen gefunden hat, folgt es langsameren Bewegungen der Flamme mit dem Blicke. Aber das Kind weiss im Anfange nicht, sicher mit dem Blick eine etwas seitlich im Gesichtsfelde befindliche Flamme zu erreichen. Nach zwei oder drei Wochen aber gelingt ihm dies verhältnissmässig schnell; erst viel später gelingt das Greifen mit der Hand nach einem gesehenen Gegenstande.

Ich folgere daraus, dass die Deutung auch einiger der einfachsten und für das menschliche Kind wichtigsten Gesichtsbilder von ihm erlernt werden muss und nicht durch angeborene Organisation von vornherein ohne vorausgehende Erfahrung gegeben ist. Wie weit ein ähnlicher Schluss auf neugeborene Thiere ausgedehnt werden darf, brauchen wir hier nicht zu entscheiden. Die Seelenthätigkeiten der Thiere sind vielleicht durch ihre Instincte auf engere Wege beschränkt, die das Thier auf engerem Gebiete sicherer sich bewegen lassen, als es dem freier wählenden Menschen für seine spätere Entwickelung dienlich wäre.

Ich würde diese bisher angeführten Verhältnisse nicht so 88
ausführlich, wie ich gethan, besprochen haben, wenn mir nicht hierbei ein hartnäckiges und sehr verbreitetes Vorurtheil entgegengetreten wäre, welches, wie mir scheint, seinen Ursprung von einer abweichenden Auffassung der Begriffe: *Anschauen* und *Denken* herleitet.

Der Terminus „*Denken*“ wird vorzugsweise auf diejenigen Vorstellungsverbindungen angewendet, bei denen der Vorstellende in bewusster Weise die einzelnen Sätze, aus denen der Schluss gezogen werden kann, sich vergegenwärtigt, auf ihre Zuverlässigkeit prüft und dann zum Schluss verbindet. Dagegen pflegt man als *Anschauung* eine solche Entstehung von Vorstellungen zu bezeichnen, bei denen in bewusster Weise nur der sinnliche Eindruck percipirt wird und danach die Vorstellung von der Gegenwart des Objects in das Bewusstsein springt, ohne dass weitere Zwischenglieder des Vorstellungs-

kreises zum Bewusstsein kommen. In der That kommt es wesentlich auf diesen Unterschied in dem klaren Bewusstwerden der Zwischensätze an, wenn es sich darum handelt, die Logik im engeren Sinne aufzubauen, d. h. zu untersuchen, wie die Vordersätze beschaffen sein müssen, damit sie die Berechtigung zu einem bindenden Schlusse ergeben. Bei dieser Aufgabe handelt es sich in der That darum, dass alle Vordersätze des Schlusses in vollständig klarer Weise in das Bewusstsein erhoben und kritisch geprüft werden, und solche Glieder der Vorstellungskette, die einer derartigen bewussten Prüfung nicht mehr zugänglich sind, kommen für die logische Prüfung nicht in Betracht, oder höchstens als axiomatische Vordersätze, die man auf Treu und Glauben aus dem Vorrath des Gedächtnisses annimmt.

Aber es wäre offenbar falsch, behaupten zu wollen, dass in unserem Bewusstsein keine Kenntnisse vorkämen ausser denen, die aus sinnlichen Perceptionen auf dem Wege des logischen Denkens entstanden wären. Die oben erwähnten Beispiele des Erlernens von Sprachen, von Fertigkeiten, vom wachsenden Verständniss der Gesichtsbilder zeigen in der That, dass solche Kenntnisse ohne absichtliches Nachdenken gewonnen werden können, und dass dieselben jeden Grad der Sicherheit und Feinheit erreichen können, ohne dass die Möglichkeit übrig bleibt, nachträglich die Richtigkeit einer solchen Induction durch die Erinnerung an die einzelnen Fälle zu prüfen,
89 wo und zu welchen Zeiten man entsprechende Beobachtungen gemacht habe, Beobachtungen, die ausserdem zum grossen Theil gar keine hinreichend specielle Beschreibung in Worten zulassen, sondern in voller Genauigkeit nur durch die Erinnerung an den früheren sinnlichen Eindruck wiedergegeben werden können.

Wir erkennen dadurch, dass auch Gedächtnissbilder reiner sinnlicher Eindrücke als Elemente von Gedankenverbindungen benutzt werden können, ohne dass es nothwendig oder auch nur möglich ist, dieselben in Worten zu beschreiben und sie dadurch begriffsmässig zu fassen. Offenbar kommt ein grosser Theil der empirischen Kenntniss des natürlichen Verhaltens der uns umgebenden Objecte in dieser Weise zu Stande. Für

die Vorgänge einer solchen, dem inneren Wesen eines Schlusses entsprechenden Vereinigung sinnlicher Anschauungen scheint mir die vorher besprochene Verschmelzung der vielen perspektivischen Ansichten eines Objects in die Vorstellung seiner Körperform in drei Dimensionen ein besonders anschauliches Beispiel zu sein. In der That vertritt die lebhafte Vorstellung der körperlichen Form alle die erwähnten perspektivischen Ansichten. Die letzteren lassen sich bei hinreichend lebendiger geometrischer Einbildungskraft aus ihr wieder herleiten. Ja selbst bisher noch nicht wahrgenommene Ansichten, wie sie bei der Anlegung von Querschnitten nach gewissen Richtungen gewonnen werden könnten, sind als Folgerungen jener Vorstellung daraus ableitbar. Und andererseits, wenn wir nach dem wahren Inhalt der Vorstellung eines nach drei Dimensionen ausgedehnten Körpers fragen, so ist doch keiner zu finden ausser den Vorstellungen von der Reihe der von ihm zu gewinnenden Gesichtsbilder, mit eventueller Vorstellung solcher, die durch Zerschneiden entstehen könnten.

In diesem Sinne können wir behaupten, die Vorstellung der stereometrischen Form eines körperlichen Objects spielt ganz die Rolle eines aus einer grossen Reihe sinnlicher Anschauungsbilder zusammengefassten Begriffs, der aber selbst nicht nothwendig durch in Worten ausdrückbare Definitionen, wie sie der Geometer sich construiren könnte, sondern nur durch die lebendige Vorstellung des Gesetzes, nach dem seine perspectivischen Bilder einander folgen, zusammengehalten wird.

Dass eine solche mühelose Anschauung der normalen Folge von gesetzlich verknüpften Wahrnehmungen durch hinreichend reiche Erfahrung gewonnen werden kann, habe ich zu be- 90
weisen gesucht.

So sehen wir, dass dieser Process, der in seinen wesentlichen Theilen, soweit wir erkennen können, nur durch unwillkürliche und unbewusste Action unseres Gedächtnisses vollzogen wird, dennoch im Stande ist, Vorstellungsverbindungen in uns hervorzubringen, deren Ergebnisse in allen wesentlichen Zügen mit denen des bewussten Denkens übereinstimmen. Wie oben schon erwähnt, stärken sich gegenseitig die häufig in gleichartiger Weise wiederholten und sich in gleicher Weise

folgenden Eindrücke, die wir durch unsere Sinne empfangen haben. Daneben müssen die zufällig wechselnden zurücktreten und schliesslich der Regel nach verlöschen, wenn ihr Eindruck nicht durch besondere Affecte, die sich mit ihnen verbunden hatten, hervorgehoben und vertieft worden ist.

Wie schon oben betont worden ist, werden mit der Zeit dadurch alle Theile der wahrgenommenen Erscheinungen verstärkt werden müssen, die der Einwirkung eines Naturgesetzes bei dem beobachteten Vorgange entsprechen. Die Vorstellung, dass die in ihren Anfängen beobachtete Erscheinung nun auch in derselben Weise weiter verlaufen wird, wie wir es bisher immer percipirt haben, wird um so sicherer eintreten, je häufiger und ausnahmsloser wir gleichen Verlauf derselben schon früher wahrgenommen haben.

Eine solche Erwartung entspricht dem Resultat eines *Inductionsschlusses*. Ein solcher kann täuschen, wenn er auf eine ungenügende Zahl von beobachteten Fällen gestützt ist. Dass auch Thiere dergleichen Inductionsschlüsse ziehen, und zwar viel öfter falsche, als es bei den Menschen vorkommt, erkennt man an ihrem Verhalten oft genug, z. B. wenn sie zurückschrecken vor irgend einem Gegenstande, der ähnlich aussieht, wie ein anderer, an dem sie sich bei einer früheren Gelegenheit verbrannt haben.

Ich habe früher[1]) diese Art von Inductionsschlüssen, welche auf die Kenntniss des regelmässigen Verhaltens der uns umgebenden Naturobjecte gebaut sind, als *unbewusste* Schlüsse bezeichnet, und finde den Namen auch jetzt noch bis zu einer gewissen Grenze zulässig und bezeichnend, da
91 diese Associationen von Wahrnehmungen im Gedächtniss in der That meistens so vor sich gehen, dass man zur Zeit, wo sie entstehen, nicht auf ihr Entstehen aufmerkt, höchstens in der Weise, dass man sich erinnert, denselben Vorgang schon öfter beobachtet zu haben, ihn also als einen schon bekannten anerkennt. Höchstens bei den ersten Wiederholungen seltenerer Beobachtungen dieser Art wird die Erinnerung an die frühe-

---

[1]) In der ersten Auflage meines Handbuches der physiologischen Optik. S. 430. Leipzig. 1866.

ren Fälle mit ihren Nebenumständen deutlicher hervortreten können, so dass der psychische Process hierbei eine grössere Analogie mit bewusstem Denken gewinnen würde.

Inductionsschlüsse sind niemals so zuverlässig, wie wohl geprüfte Schlüsse des bewussten Denkens. Bewusstes wissenschaftliches Denken unterscheidet sich von der durch gehäufte Erfahrung gesammelten Kenntniss gewisser Gegenstände oder Vorgänge dadurch, dass bei jenem zunächst eine möglichst vollständige Übersicht aller bei dem Urtheil in Betracht kommenden Fälle herbeizuschaffen versucht wird, sei es durch Sammlung schriftlicher Nachrichten oder durch Sammlung neuer Beobachtungen, eventuell absichtlich herbeigeführter Beobachtungen, d. h. Versuche. Bei letzteren ist es rathsam, vorzugsweise solche Fälle aufzusuchen, die sich in den Vorbedingungen von allen bisher beobachteten anderen unterscheiden. Die dadurch erreichbare Vollständigkeit in der Kenntniss der mannigfaltigen Beispiele und der Bedingungen, unter denen sie so oder anders verlaufen, wird in der Regel durch die ungeordnete Zufälligkeit der alltäglichen Erfahrungen nicht erreicht werden, oder höchstens bei solchen Fällen, die sich in ungeheurer Zahl von Wiederholungen und mit verhältnissmässig wenigen Abänderungen und Verwickelungen darbieten.

Falsche Inductionen bei der Deutung unserer Perceptionen pflegen wir als *Sinnestäuschungen* zu bezeichnen. Sie sind meist verursacht durch Unvollständigkeit der Induction, deren häufigste Veranlassung darin zu suchen ist, dass wir gewohnheitsmässig gewisse Arten des Gebrauches unserer Sinnesorgane bevorzugen, diejenigen nämlich, wobei wir erkennen, dass wir durch sie das sicherste und übereinstimmendste Urtheil, beziehlich Schätzung über die beobachteten Objecte, ihre Form, Raumverhältnisse und Beschaffenheit uns bilden können. So pflegen wir z. B. beim Sehen die Objecte, welche unsere Aufmerksamkeit erregen, auf den beiden Stellen des genauesten Sehens in beiden Augen ab- 92
zubilden, dabei aber die Reihe der hervortretenden Punkte und Linien, die das Object darbietet, mit dem Blick zu durchlaufen, wodurch wir sowohl die Reihe aller Einzel-

heiten kennen lernen, als auch das Auge gegen die Ausbildung störender Nachbilder schützen. Es besteht eine ganze Reihe solcher Regelmässigkeiten in den Bewegungen des Auges, welche nicht auf einem zwingenden Mechanismus der Muskeln oder Nervenleitungen beruhen, sondern von jedem Beobachter, wenn er die entsprechenden abweichenden Innervationen zu geben gelernt hat, willkürlich geändert werden können.[1]) Dadurch lässt sich erweisen, dass die Einhaltung der normalen Regelmässigkeit der Bewegungen nur ein Ergebniss der Gewöhnung ist und nicht etwa ein durch die Organisation unseres Körpers vorgebildeter Zwang. Allerdings sind solche Gewohnheiten oft sehr tief gewurzelt und nicht ganz leicht zu überwinden. Die von der Norm abweichenden Bewegungen erfordern entschieden mehr Anstrengung und ermüden schneller. Das ist aber eine gemeinsame Eigenthümlichkeit aller ungewohnten Bewegungen unserer Muskeln, weil dieselben meist durch unzweckmässige, einander entgegenwirkende und daher anstrengendere Innervationen hervorgebracht zu werden pflegen, als es die gewohnten und wohl eingeübten Bewegungen thun.

Bei ungewohnten Stellungen und Bewegungen unserer Sinnesorgane kommen nun auch entsprechende und ungewöhnliche Perceptionen zu Stande, für welche wir keine eingeübte Kenntniss ihrer Bedeutung haben. Dann entstehen also falsche Deutungen derselben, und zwar kann man im Allgemeinen die Regel aufstellen, dass bei anomaler Stellung und Bewegung der Sinnesorgane Anschauungen entstehen von scheinbaren Objecten, wie sie vorhanden sein müssten, um bei derselben Blickrichtung unter normaler Beobachtungsweise dieselben Perceptionen hervorzubringen. Unter dieselbe Regel fallen auch die Anschauungen, welche sich bilden, wenn die Lichtstrahlen, ehe sie in das Auge fallen, von ihrem geradlinigen Wege abgelenkt werden, wie es durch Spiegelung und Brechung geschehen kann, nur dass wir in diesem Falle die Täuschung eher als solche erkennen; aber das Bild, was sich uns darbietet, ist immer das eines Gegenstandes oder einer schein-

[1]) S. mein Handbuch der physiologischen Optik, § 27.

baren Ausbreitung von Licht im Gesichtsfelde, wie sie vorhanden sein müsste, um uns bei ungestörtem geradlinigen Einfall des objectiven Lichtes in das Auge dieselben Gesichtsbilder zu geben. 93

Was den *Grad der Täuschung* bei solchen Gelegenheiten betrifft, so kann derselbe sehr verschieden sein. Man denke z. B. an die Bilder, welche ein guter ebener Planspiegel zurückwirft, der an der Wand hängt, so dass man nicht dahinter sehen kann. Ein solcher giebt eine der vollkommensten optischen Täuschungen, die man sich denken kann, und doch werden selbst Thiere selten durch ein Spiegelbild zu einem Irrthum verleitet; Kinder blicken, wenn sie können, wohl einen Augenblick nach der Hinterseite des Spiegels und amüsiren sich an dem Bilde und seinen Bewegungen, aber begreifen verhältnissmässig schnell, dass es eine Täuschung sei, die nicht der Wirklichkeit entspricht, und lernen das Spiegelbild bald als ihr eigenes Abbild auffassen.

Um die Täuschung kurze Zeit zu unterhalten, muss man schon die Ränder des Spiegels gut verstecken und verhindern, dass der Beobachter sich selbst gespiegelt sehe.

Die meisten anderen Sinnestäuschungen werden gewöhnlich schnell als solche entdeckt, weil der Beobachter sich bewusst ist, eine ungewöhnliche Art der Beobachtung anzuwenden, von der aus er geneigt ist, in die normale, ihm geläufigere überzugehen, in der die Täuschung schwindet und als solche erkannt wird. Nur wenn dazu keine Zeit ist, tritt wohl ein wirklicher Irrthum ein, der einen Augenblick dauert, z. B. bei den Lichtblitzen, die ein Stoss gegen das Auge erregt.

Deshalb erscheinen die meisten Sinnestäuschungen nur in der Weise, dass man bemerkt, man habe ein der Wirklichkeit nicht ganz entsprechendes Bild vor sich, und dass man nun dieses Bild vergleicht mit demjenigen, welches abgeänderte Objecte bei richtigem Sehen geben würden. Die besondere Art dieses Bildes aber kann man nur beschreiben oder im eigenen Gedächtniss festhalten, indem man sich oder Anderen die Objecte beschreibt, welche da sein müssten, um dem normalen Auge ein ähnliches Bild zu geben. Dann ist sogar die Form der Beschreibung: „Ich sehe das durch die

Täuschung veränderte Object" eine ganz richtige Beschreibung der Empfindung, die der Beobachter hat, und meistens wird er sich selbst bei geringer Erfahrung dabei ganz klar über die Täuschung sein, die sich ihm darbietet.

94 Für alle subjectiven Erscheinungen, deren Ursache an einem bestimmten Ort im Augapfel haftet, ist die Bewegung des Phänomens mit dem Blick bei Bewegung des Auges ein Kennzeichen, welches sehr schnell aufgefasst wird und die subjective Natur aufdeckt. Da nun unser Interesse überwiegend der Erkenntniss der umgebenden Aussenwelt zugewendet ist, so wenden wir unsere Aufmerksamkeit gewohnheitsmässig von solchen subjectiven Erscheinungen ab, die sich gleich als subjectiv verrathen, und es tritt sogar eine gewisse Schwierigkeit ein, dieselben zu beobachten und die ihnen entsprechende Intention der Aufmerksamkeit zu finden. Verstärkt wird diese Schwierigkeit allerdings in hohem Masse durch die Steigerung der Reizbarkeit, welche in dauernd beschatteten Stellen der Netzhaut, beziehlich die Verminderung derselben, die in dauernd beleuchteten Stellen der Netzhaut eintritt. Hauptsächlich dieser Vorgang ist es, auf welchem das allmälige Verlöschen der im Auge streng festliegenden Bilder zurückzuführen zu sein scheint.

Eine eigenthümliche Rolle spielt hierbei noch die Schwierigkeit, die *Aufmerksamkeit* auf einen bestimmten Theil der vorliegenden Perceptionen zu concentriren. Einen gewissen Einfluss hat dabei eine Art willkürlicher Anstrengung. Ich verweise hierbei auf die von mir früher[1]) beschriebenen Versuche mit momentaner Beleuchtung eines vorher vollständig verdunkelten Feldes, auf welchem ein Blatt mit grossen gedruckten Buchstaben ausgebreitet war. Vor der elektrischen Entladung erblickte der Beobachter nichts als einen mässig erhellten Nadelstich, der das Papier durchbohrte. Dieser wurde fest fixirt und diente zur ungefähren Orientirung über die Richtungen in dem dunklen Felde. Die elektrische Entladung erleuchtete das bedruckte Blatt für einen untheilbaren Augenblick, in welchem das Bild desselben sichtbar wurde und eine

[1]) In § 28 meines Handbuches der physiologischen Optik.

sehr kurze Zeit als positives Nachbild stehen blieb. Die Dauer der Wahrnehmbarkeit des Bildes war also auf die Dauer des Nachbildes beschränkt. Augenbewegungen von messbarer Grösse konnten während der Dauer des Funkens nicht ausgeführt werden, und auch solche während der kurzen Dauer des Nachbildes konnten dessen Lage auf der Netzhaut nicht mehr ändern. Dessenungeachtet fand ich es möglich, mir vor- 95
her vorzunehmen, welchen Theil des dunklen Feldes seitlich von dem fortdauernd fest fixirten hellen Nadelstich ich im indirecten Sehen wahrnehmen wollte, und erkannte bei der elektrischen Beleuchtung dann wirklich einige Buchstabengruppen jener Gegend des Feldes, meist aber mit dazwischenbleibenden Lücken, die leer blieben. Nach starken Blitzen hatte ich in der Regel mehr Buchstaben gelesen, als nach schwächeren. Die Buchstaben des bei weitem grössten Theiles des Feldes waren dagegen nicht zur Wahrnehmung gekommen, auch nicht immer die in der Nähe des Fixationspunktes. Bei einer folgenden elektrischen Entladung konnte ich, immer den Nadelstich fixirend, meine Wahrnehmung auf eine andere Gegend des Feldes richten und dann dort eine Gruppe von Buchstaben lesen.

Diese Beobachtungen erweisen, wie mir scheint, dass man durch eine willkürliche Art von Intention, auch ohne Augenbewegungen, ohne Änderungen der Accommodation die Aufmerksamkeit auf die Empfindungen eines bestimmten Theils unseres peripherischen Nervensystems concentriren und sie gleichzeitig von allen anderen Theilen desselben ausschliessen kann.

Bei der gewöhnlichen Art des Beobachtens richten wir allerdings auch die Aufmerksamkeit willkürlich besonderen Theilen des Gesichtsfeldes oder des Gebietes der Perceptionen überhaupt zu. Dabei folgt aber Richtung des Blicks und Accommodation der Intention der Aufmerksamkeit, und es könnte also diese Erfahrung so ausgelegt werden, dass die Aufmerksamkeit eben stets an die Netzhautgrube geknüpft sei, und dass die Willkürlichkeit ihrer Richtung nur durch die Willkürlichkeit der Augenbewegungen bedingt sei. In der That ist es recht schwer und erfordert vielfache Übung, wenn man lernen

will, die Aufmerksamkeit den Bildern der seitlichen oder peripherischen Theile der Netzhaut zuzuwenden, wie dies mehr oder weniger fast alle die bisher beschriebenen Phänomene der genannten Art erkennen lassen. Als solche Bedingungen, unter denen dieselben leichter die Aufmerksamkeit auf sich ziehen, sind folgende zu bemerken:

1. Höhere Intensitäten der Phänomene, namentlich wenn dieselben die Sichtbarkeit der reellen Objecte beeinträchtigen.

2. Schneller Wechsel des Helligkeitsunterschiedes zwischen
96 nahe benachbarten Theilen des Feldes, daher auch Bewegung begrenzter Flächenstücke im Felde, oder auch Bewegung von Schatten durch Wechsel der Beleuchtungsrichtung, wie bei den entoptischen Objecten. Wechsel der Helligkeit bringt, wie schon bemerkt, wegen der abschwächenden Wirkung der nagativen Nachbilder stets einen intensiveren Eindruck hervor, als constante Intensität der Beleuchtung. Das könnte einen Theil der dadurch erfolgenden Vermehrung der Aufmerksamkeit erklären. Der unmittelbare Eindruck im Bewusstsein ist aber mehr, dass jeder schnelle Wechsel im Seitentheile des Gesichtsfeldes die Frage nach dem Grunde der bemerkten Änderung anregt und daher gewöhnlich der Blick nach der Stelle gerichtet wird, wo man die Veränderung bemerkt hat.

3. Das objective Interesse hat überhaupt einen mächtigen Einfluss auf die Lenkung der Aufmerksamkeit und kann sie fast vollständig beherrschen. Man denke an das Verhalten beim Lesen, wo Blick, Accommodation und Aufmerksamkeit gleichzeitig den Worten der begonnenen Zeile folgen und von Zeile zu Zeile weitergehen ohne Unterbrechung und Störung, wenigstens wenn das Gelesene interessant ist.

Dieser Einfluss des objectiven Interesses fällt aber grösstentheils mit dem Einfluss des Willens zusammen, da sich Willensintentionen am leichtesten und häufigsten an Wünsche, d. h. Interessen, anzuknüpfen pflegen.

Dass übrigens die willkürliche Lenkung der Aufmerksamkeit eine ermüdende Leistung des Gehirns ist, lehrt die alltägliche Erfahrung, auch wenn keinerlei Muskelarbeit damit verbunden ist.

Das Endergebniss der angeführten Überlegungen und Erfahrungen glaube ich dahin zusammenfassen zu dürfen:

1. Als Wirkungen angeborener Organisation finden wir beim Menschen Reflexbewegungen und Triebe, letztere die Gegensätze des Wohlgefallens an einzelnen Eindrücken, des Missfallens gegen andere umschliessend.

2. Bei der Bildung von Anschauungen spielen Inductionsschlüsse, gewonnen durch unbewusste Arbeit des Gedächtnisses, eine hervorragende Rolle.

3. Es erscheint zweifelhaft, ob im Vorstellungskreise der Erwachsenen überhaupt Kenntnisse vorkommen, die eine andere Ursprungsquelle erfordern.

CXXXVIII.

Ueber den Verlauf und die Dauer der durch Stromesschwankungen inducirten elektrischen Ströme.

Aus den Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.
8. Mai 1851. Seite 287 bis 290.

---

287 1. Wenn eine elektrische Leitung geschlossen wird, welche voltaische Elemente und eine Spirale enthält, so ruft das An-
288 steigen des Stromes in der Spirale einen ihm selbst entgegengerichteten Inductionsstrom hervor. Sei I die Intensität des Batteriestromes, P das Potential der Spirale, W der Widerstand der Leitung nach Kirchhoff's[1]) absoluten Einheiten gemessen, so ist die elektromagnetische Wirkung, welche der inducirte Strom allein genommen an einem ruhenden Magnet hervorbringen würde, proportional $I \cdot P/W$, diejenige aber, welche der constante Batteriestrom allein genommen in der Zeit t hervorbringen würde, proportional $I \cdot t$. Es würde also der Batteriestrom in der Zeit P/W gerade ebenso viel wirken als der ganze inducirte Strom. Dove hat aus seinen magnetelektrischen Versuchen geschlossen, was auch durch meine Versuchsreihen bestätigt wird, dass der inducirte Schliessungsgegenstrom niemals den inducirenden Strom überwältigt und umkehrt, sondern nur schwächt, dass also die Intensität des ersteren immer kleiner ist, als die des letzteren. Da nun der schwächere Strom nothwendig mehr Zeit braucht, um dieselbe Wirkung

---

[1]) G. Kirchhoff, Poggend. Ann. LXXVI, 412.

hervorzubringen, als der stärkere, so folgt, dass die Dauer des Schliessungsgegenstromes grösser sei, als die Zeit P/W.

2. Die Grösse P/W, welche wir als Minimum der Dauer des Schliessungsgegenstromes gefunden haben, kann vergrössert werden erstens durch möglichste Verringerung desjenigen Widerstandes, welcher der Spirale selbst nicht angehört, was bis zu jedem beliebigen Grade geschehen kann; zweitens durch Vermehrung der Masse der Spirale. P/W wächst nach Neumann's Gesetzen, bei Beseitigung des nicht zur Spirale gehörigen Widerstandes, im Verhältnisse n^2, wenn man die linearen Dimensionen der Spirale auf das $n$fache, ihre Masse also auf das n^3fache erhöht, ändert sich aber nicht, wenn man Querschnitt und Länge des Drahtes so ändert, dass Masse und Form des Ganzen dieselben bleiben. Die nöthige Masse Kupferdraht anwendend, muss man also, ohne die Länge des Drahtes sehr bedeutend zu machen, die Dauer des Schliessungsgegenstromes auf jeden beliebigen endlichen Werth bringen, und bewirken können, dass die Zeit, welche der Strom gebraucht, um in der ganzen Leitung dieselbe Stärke zu erreichen, dagegen verschwinde. — Für eine möglichst eng gewundene 289
Spirale aus Kupferdraht von 64 Mtr. Länge und 2 Pfund Gewicht fand ich $P/W = 0{,}00497$ Secunden, während die Fortpflanzungszeit der Elektricität im Drahte nach Fizeau und Gounelle über 10000mal kleiner sein würde.

3. Der Verlauf inducirter Ströme, in welchen die Aenderungen der Intensität so langsam vor sich gehen, dass sich fortdauernd die Stromstärke in der ganzen Leitung ausgleichen kann, lässt sich aus den Gesetzen von Ohm und Neumann bestimmen. Es sei in einer einfachen Leitung i die veränderliche Intensität, A die elektromotorische Kraft der Batterie; die der Induction ist nach Neumann $P \cdot (di/dt)$. Dann giebt das Ohmsche Gesetz:

$$iW = A - P\frac{di}{dt}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$i = \frac{A}{W}\left[1 - e^{-\frac{W}{P}\cdot t}\right],$$

wodurch der Verlauf der Schliessungsinduction vollständig bestimmt ist. Nach demselben Principe lässt sich der Verlauf aller Inductionsströme bestimmen, welche durch Wirkung beliebig vieler Spiralen in beliebig verzweigten linearen Leitungen entstehen, immer vorausgesetzt, dass die Fortpflanzungszeit der Elektricität gegen die Dauer der Stromesänderungen nicht in Betracht komme. Diese Voraussetzung möchte namentlich bei der Induction durch Unterbrechung von Leitungen während der Dauer des Funkens vielleicht nicht erfüllt sein. In die Gleichungen, welche zur Bestimmung der Stromintensitäten in verzweigten Leitungen dienen, führe man auch die den Stromesschwankungen proportionalen inducirten elektromotorischen Kräfte als solche ein. Man erhält dadurch ein System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Integrale die Intensitäten als Summen von Exponentialgrössen geben. Ihre Exponenten bildet die Zeit, multiplicirt mit negativen reellen Zahlen.

4. Ich bin im Stande gewesen, das theoretisch gefundene Gesetz für die Schliessungsinduction einer Spirale in einer einfachen und in einer verzweigten Leitung durch Versuche zu bestätigen. Das Princip der dazu angewendeten Apparate ist kurz folgendes: Ein möglichst regelmäfsig fallender Körper
290 bewirkt zuerst die Schliessung oder Öffnung einer Stromleitung und nach sehr kurzer Zwischenzeit die Schliessung oder Öffnung einer andern. Hauptsache ist, dass diese Zwischenzeit bei ungeänderter Einstellung des Apparates möglichst genau immer denselben, vorläufig übrigens unbekannten Werth habe. Man lässt nun im ersten Momente die Leitung der Batterie und Spirale schliessen, im zweiten öffnen, und zwar abwechselnd so, dass der Extracurrent der Öffnung bald eine Leitung findet, bald nicht. Im letzteren Falle misst der Ausschlag des Magnetes das Integral der ansteigenden Stromintensität ausgedehnt über die Zwischenzeit der Schliessung und Öffnung, im zweiten kommt dazu noch der Extracurrent, welcher dem letzten Werthe der Intensität proportional ist, und diesen berechnen lässt. Man erhält somit ein System zusammengehöriger Werthe der Intensität und ihres Integrals nach der Zeit, aus welchen man durch Rechnung die Inten-

sität als Function der Zeit übereinstimmend mit den theoretischen Formeln bestimmen kann.

5. Ich habe bisher vorausgesetzt, die inducirte elektromotorische Kraft sei gleichzeitig mit der inducirenden Stromesschwankung vorhanden, und in der That bin ich durch die erwähnten mechanischen Apparate mit Hülfe elektromagnetischer Zeitmessung im Stande gewesen nachzuweisen, dass ein zehntausendtel Secunde nach der Unterbrechung des Stromes einer Spirale keine inducirende Wirkung mehr stattfindet, vorausgesetzt, dass zur Zeit der Unterbrechung innerhalb des elektromotorischen Wirkungskreises nirgends eine geschlossene Leitung vorhanden gewesen sei. Im letzteren Falle entstehen nämlich inducirte Ströme zweiter Ordnung noch nach einer verhältnissmässig beträchtlichen Zwischenzeit.

Schliesslich mache ich darauf aufmerksam, dass bei den bisherigen Versuchen über Fortpflanzungsgeschwindigkeit des galvanischen Stromes Schliessungsgegenströme den Eintritt und Extracurrents, die sich in den Nebenleitungen der unvollkommen isolirten Telegraphendrähte bilden konnten, zum Theil auch das Ende der Batterieströme merklich verzögern mussten, was von den Beobachtern nicht berücksichtigt ist. Das scheint der Hauptgrund der mangelnden Übereinstimmung ihrer Resultate zu sein.

CXXXIX.

458 Ueber Brewster's neue Analyse des Sonnenlichts.

Aus dem Bericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Sitzung vom 8. Juli 1852. S. 458—461.

Hr. D. Brewster hat eine Reihe von Versuchen bekannt gemacht, welche beweisen sollen, dass homogenes Licht, dessen Strahlen alle die gleiche Brechbarkeit besitzen, im Widerspruch mit der von Newton aufgestellten Ansicht, bei der Absorption in farbigen Medien seine Farbe ändern könne, und darauf eine eigenthümliche Theorie der Farben gegründet. Die Einwände, welche von Airy, Melloni und Draper dagegen erhoben sind, hat er, wie es scheint, mit gültigen Gründen widerlegt; ich glaube aber nachweisen zu können, dass er durch andre, bisher nicht beachtete, grösstentheils physiologisch optische Vorgänge getäuscht worden ist.

459 Eine Reihe von den Farbenveränderungen, welche er der Absorption zuschreibt, beruht darauf, dass das von ihm für homogen gehaltene Licht bei seiner Methode noch mit fremdem verunreinigt war. Er blickte durch ein Prisma nach einem feinen Spalt im Laden eines dunkeln Zimmers, und schaltete das absorbirende Mittel zwischen Auge und Prisma ein. Das regelmässig gebrochene Licht kann hierbei ein sehr vollkommenes und reines Spectrum bilden, aber es lassen sich verschiedene Umstände nachweisen, durch welche ein wenig Licht unregelmässig über das Gesichtsfeld zerstreut wird. Dazu gehören 1) Unreinigkeiten der Substanz und Unvollkommen-

heiten der Politur des Prisma und des gefärbten Mittel, wie sie sich bei genauer Untersuchung mit Hülfe von Sonnenlicht in jeder Glasmasse nachweisen lassen. 2) Mehrfache Reflexionen theils zwischen den drei Flächen des Prisma, theils zwischen der Hornhaut und den Grenzflächen des farbigen Medium. 3) Lichtzerstreuung im Auge, wahrscheinlich veranlasst durch Diffraction an der Pupille, durch die nicht absolute Klarheit der durchsichtigen Medien, und durch Reflexion an der Hornhaut, wodurch die nicht unbeträchtliche Menge des von der Netzhaut zurückkehrenden Lichtes theilweis wieder in den Hintergrund des Auges zurückgeworfen wird. Die Lichtzerstreuung im Auge ist leicht zu bemerken, wenn man neben einem grossen tiefschwarzen Felde ein stark leuchtendes Object anbringt z. B. eine Lichtflamme, eine Öffnung durch welche Himmelslicht oder gar Sonnenlicht einfällt. Es überzieht dann ein heller Schein den grössten Theil des Gesichtsfeldes, welcher fortfällt, so bald man sich das Licht mit dem Finger verdeckt. Es ist dies eine Erscheinung, welche bisher wohl unter den Begriff der Irradiation gerechnet ist.

Während das unregelmässig gebrochene Licht seiner geringen Lichtstärke wegen gewöhnlich neben dem regelmässig gebrochenen nicht bemerkt wird, kann es grossen Einfluss gewinnen, sobald ersteres durch Absorption geschwächt ist, und der oft geringe Rest davon sich mit denjenigen Farben des unregelmässig gebrochenen mischt, welche ungeschwächt durch das farbige Medium gegangen sind. So erklärt sich namentlich die vorgebliche Isolation von weissem Lichte aus dem Gelb durch ein mit Smalte blau gefärbtes Glas. Das Gelb, welches 460
im Spectrum dieses Glases durch zwei dunkle Streifen vom Grün und Orange getrennt ist, erschien mir ganz entsprechend der Beschreibung, welche Brewster gegeben hat, durch eine Platte gesehen mattgelb, durch zwei fast weiss, durch drei blauweiss. Aber durch eine Platte wurde seine Lichtstärke nach einer annähernden Schätzung auf $\frac{1}{100}$ verringert, durch zwei auf $\frac{1}{10000}$, u. s. w. während neben ihm das Blau des Spectrum in blendender Helligkeit bestehen blieb, umgeben von einem Scheine zerstreuten blauen Lichts, welcher den grössten Theil des Gesichtsfeldes überzog. Blaues und gelbes

Licht vereinigt geben aber, wie ich gezeigt habe[1]), in der That Weiss.

Um diese Täuschung zu vermeiden, ist es nöthig, dass auf das Prisma, blaue Glas und Auge in überwiegender Menge nur solches Licht fällt, welches dem zu untersuchenden homogen ist. Ich liess deshalb durch den Spalt nicht natürliches weisses, sondern durch eine erste Brechung schon isolirtes Licht der betreffenden Farbe fallen. Sonnenlicht fiel durch einen ersten Spalt in ein dunkles Zimmer auf ein erstes Prisma, dann auf eine Linse, welche ein erstes Spectrum auf einem Schirme entwarf. In diesem war ein zweiter feiner Spalt angebracht, welcher von dem hinter den Schirm gestellten Beobachter durch ein zweites Prisma betrachtet wurde. Je nachdem man den ersten Spalt breiter oder schmaler macht, fällt homogenes, oder mehr oder weniger gemischtes Licht auf und durch den zweiten Spalt, welches dem Beobachter durch das zweite Prisma entweder als eine schmale farbige Lichtlinie, oder als ein breiterer, in verschiedene Farbentöne zerlegter und mit den entsprechenden Fraunhofer'schen Linien versehener Streif erscheint. Dabei bildet das Licht, welches im ersten Prisma und der Linse unregelmässig gebrochen auf den zweiten Spalt fällt, ein sehr lichtschwaches vollständiges Spectrum, in welchem jener hellere Streif an dem seiner Farbe angehörigen Platze steht. Ich habe mich überzeugt, dass das in dieser Weise ge-
461 reinigte und isolirte gelbe Licht in ganz unveränderter Farbe durch 2, 3 und selbst 4 blaue Glasplatten geht.

Eine zweite Reihe der Farbenveränderungen, welche Brewster beobachtet hat, beruht auf Contrastwirkungen, welche bei der Lebhaftigkeit der Spectralfarben in ungewöhnlicher Stärke erregt werden, sobald eine lichtschwache Farbe neben andern helleren steht. Die Täuschung verschwindet, sobald man in der eben angegebenen Weise die betreffende Farbe isolirt. Dahin gehört das glänzend grüne Aussehn der gelben, goldgelben und orangen Strahlen im Spectrum des Perubalsam, Schwefel-

---

[1]) Ueber die Theorie der zusammengesetzten Farben in J. Müllers Archiv für Anat. und Physiol. 1852. — Abgedruckt auf S. 3 des zweiten Bandes der vorliegenden Sammlung.

balsam, Pech; das violette des Blau in dem des Olivenöl, das rothe des Orange und das grüne des Blaugrün in dem des Smalteglases.

Eine dritte Reihe der Farbenveränderungen rührt davon her, dass die Spectralfarben bei sehr grosser Lichtstärke nicht ganz den gewöhnlichen Eindruck machen. Violett geht schon bei einem sehr erträglichen Grade von Helligkeit durch ein bläuliches Grauweiss in Weiss, Blau bei einem etwas höheren durch Blauweiss in Weiss über. Eben so nähert sich Grün bei wachsender Helligkeit durch Grüngelb, und Gelb durch Gelbweiss einem blendenden Weiss. Roth wird bei seinem höchsten Glanze nur Hellgelb. Man sieht diese Aenderungen ebenso an reinen isolirten Farben des Sonnenspectrum, wie an den zusammengesetzteren der farbigen Gläser. Sie erklären, dass Brewster das Blau durch verschiedene Dicken von schwefelsaurem Kupferoxyd-Ammonium bald blauweiss, bald tiefblau sehen konnte, und warum das Gelb zwischen dem Grün und Orange im Sonnenspectrum, wo Grün und Orange selbst gelblich werden, mehr hervortritt, als in dem des blauen Himmelslichts.

Ich habe nicht alle Versuche wiederholen können, auf welche sich Brewster beruft, weil er viele farbige Mittel nicht genau genug bezeichnet, um sie sich verschaffen zu können. Doch glaube ich hinreichend nachgewiesen zu haben, dass bei seiner Beobachtungsmethode Umstände genug vorhanden sind, welche es verbieten, aus ihren Resultaten die von Brewster gezogenen Schlüsse zu ziehen.

CXL.

Ein Theorem über die Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern.

Aus dem Bericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Sitzung vom 22. Juli 1852. S. 466—468.

---

466 Das Theorem, welches ich mich hier der Akademie vorzulegen beehre, behauptet etwas ganz Aehnliches für die elektromotorischen Kräfte, wie es für Magnetismus und Elektricität die bekannten Sätze thun, wonach eine jede Vertheilung dieser Agentien in Innern eines Körpers durch eine Belegung seiner Oberfläche ersetzt werden kann, ohne die Wirkungen nach aussen hin abzuändern. Die elektromotorischen Kräfte mögen dabei in dem von Ohm eingeführten Sinne durch die Differenz der Spannungen gemessen werden, welche sie auf den beiden Seiten der Fläche, worin sie ihren Sitz haben, hervorbringen.

Das Theorem ist folgendes:

„Wenn ein Leiter von beliebiger Gestalt und Zusammensetzung eine beliebige Vertheilung constanter elektromotorischer Kräfte in seinem Innern enthält, so kann man an ihrer Stelle jedes Mal eine Belegung seiner Oberfläche mit solchen Kräften substituiren, welche in allen angelegten anderen Leitern genau dieselben abgeleiteten Ströme giebt, wie jene Vertheilung im Innern. Und zwar müssen diese elektromotorischen Kräfte der Oberfläche in der Richtung von innen nach aussen gemessen gleich sein der Spannung freier Elektricität, welche in denselben Punkten der Oberfläche vor Anlegung des fremden Leiters bei den durch die inneren Kräfte unterhaltenen Strömungen eingetreten war.“

Der Beweis kann in folgender Weise geführt werden. Der Leiter, in dessen Innerem die elektromotorischen Kräfte ihren Sitz haben, heisse *A*. Während diese fortbestehen, denke man sich auch noch seine Oberfläche mit ebenso grossen, aber entgegengesetzt gerichteten elektromotorischen Kräften belegt, wie ich es im Theorem bezeichnet habe. Ich will diese Belegung die negative nennen, die des Inneren dagegen die positive. Es lässt sich leicht einsehen, dass die negative Belegung jede Wirkung der inneren Kräfte nach aussen, jede Ableitung ihrer Ströme auf andre angelegte Leiter verhindern müsse. Man braucht nur die drei Bedingungen, deren Erfüllung Kirchhoff[1]) für die Stromvertheilung in Systemen von körperlichen 467
Leitern als nothwendig und ausreichend erwiesen hat, auf diesen Fall anzuwenden. Es ergiebt sich sogleich, dass wenn sie vor der Anlegung des zweiten Leiters *B* im Leiter *A* erfüllt waren, sie es auch nach dessen Anlegung bleiben, wenn *B* gar keine, und *A* dieselben Ströme enthält wie vorher.

Dann nehme man das Princip von der Superposition der elektrischen Strömungen zu Hülfe, welches Smaasen zwar nur für einen beschränkten Fall entwickelt hat, dessen Allgemeingültigkeit aber ohne Schwierigkeit aus Kirchhoff's drei eben erwähnten Bedingungsgleichungen hervorgeht. Nach diesem Principe sind die elektrischen Spannungen, und die den Coordinataxen parallelen Componenten der Stromintensitäten in jedem Punkte eines Systems leitender Körper, welches mehrere constante elektromotorische Kräfte enthält, gleich der algebraischen Summe derjenigen Spannungen und Intensitäten, welche jede einzelne Kraft für sich in demselben Punkte hervorbringen würde.

Wir können also auch in dem besprochenen Falle der Leiter *A* und *B* mit der negativen Belegung ihrer Berührungsfläche die Spannungen und Intensitäten in *B*, welche alle gleich Null sind, als die algebraischen Summen derjenigen Spannungen und Intensitäten ansehen, welche erstens die elektromotorischen Kräfte aus dem Inneren von *A* für sich allein, und zweitens die der Berührungsfläche für sich allein in *B* hervor-

[1]) G. Kirchhoff, Poggendorffs Annalen LXXV, S. 189.

bringen würden. Daraus dass diese Summen in der ganzen Ausdehnung des Leiters B gleich Null sind, folgt, dass die negative Belegung der Berührungsflächen hier genau die entgegengesetzten Spannungen und Strömungen hervorbringt, als die elektromotorischen Kräfte im Inneren von A.

Die entgegengesetzte positive Belegung muss also in dem Leiter B wiederum genau dieselben Spannungen und Strömungen hervorbringen, wie die inneren Kräfte von A, was zu beweisen war.

Auch in den Fällen, wo mehrere leitende Körper vorhanden sind, welche elektromotorische Kräfte enthalten, und unter
468 einander und mit andern unwirksamen Leitern in Berührung sind, kann man die inneren Kräfte aller oder einzelner wirksamer Leiter durch eine Belegung ihrer Oberfläche ersetzen, ohne dass die Strömungen in den übrigen Leitern eine Änderung erleiden.

Von dem grössten Nutzen ist dieses Theorem bei der Untersuchung der Ströme, welche aus den Muskeln und Nerven in den Multiplicator hinein abgeleitet werden. E. du Bois-Reymond hat nachgewiesen, dass jeder Theil einer Muskel- oder Nervenfaser, ähnlich dem Ganzen, peripolar angeordnete elektrische Ströme erregt. Setzen wir zwei Bedingungen voraus, erstens nämlich, dass die elektromotorischen Kräfte des Muskels constant sind, und nicht von der Stromintensität abhängen, zweitens, dass die grösseren Faserbündel überall in gleichmässiger Anordnung Fasertheile von gleicher elektromotorischer Energie enthalten, so lässt sich unser Theorem anwenden, und liefert eine sehr einfache Ableitung der Wirkungen des Ganzen aus den Wirkungen seiner Theile. Aber es ergeben sich dabei für das Ganze nur die elektromotorischen Gegensätze zwischen Längsschnitt und Querschnitt, nicht die zwischen verschiedenen Theilen des Längsschnitts unter sich, und des Querschnitts unter sich. Der Widerspruch, welcher sich hier zwischen Theorie und Erfahrung zeigt, deutet darauf hin, dass eine der beiden genannten Bedingungen in den Muskeln und Nerven, welche man dem Versuch unterworfen hat, nicht erfüllt sei.

CXLI.

On the Application of the Law of the Conservation of Force to Organic Nature.

Aus: Notices of the Proceedings at the Meetings of the Members of the Royal Institution of Great Britain, Vol. III, pag. 347—357. 12. April 1861.

The most important progress in natural philosophy by 347
which the present century is distinguished, has been the discovery of a general law which embraces and rules all the various branches of physics and chemistry. This law is of as much importance for the highest speculations on the nature of forces, as for immediate and practical questions in the construction of machines. This law at present is commonly known by the name of "the principle of conservation of force." It might be better perhaps to call it, with Mr. Rankine, "the conservation of energy," because it does not relate to that which we call commonly *intensity* of force; it does not mean that the intensity of the natural forces is constant: but it relates more to the whole amount of power which can be gained by any natural process, and by which a certain amount of work can be done. For example: if we apply this law to gravity, it does not mean, what is strictly and undoubtedly true, that the intensity of the gravity of any given body is the same as often as the body is brought back to the same distance from the centre of the earth. Or with regard to the other elementary forces of nature — for example, chemical force: when two chemical elements come together, so that they influence each other, either from a distance or by immediate contact, they will always exert the same force upon each other—the same force both in intensity

and in its direction and in its quantity. This other law indeed is true; but it is not the same as the principle of conservation of force. We may express the meaning of the law of conservation of force by saying, that every force of nature when it effects any alteration, loses and exhausts its faculty to effect the same alteration a second time. But while, by every alteration in nature, that force which has been the cause of this alteration is exhausted, there is always another force which gains as much power of producing new alterations in nature as the first has lost. Although, therefore, it is the nature of all inorganic forces to become exhausted by their own working, the power of the whole system in which these alterations take place
348 is neither exhausted nor increased in quantity, but only changed in form. Some special examples will enable you better to understand this law than any general theories. We will begin with gravity; that most general force, which not only exerts its influence over the whole universe, but which at the same time gives the means of moving to a great number of our machines. Clocks and smaller machines, you know, are often set in motion by a weight. The same is really the case with water-mills. Water-mills are driven by falling water; and it is the gravity, the weight of the falling water, which moves the mill. Now you know that by water-mills, or by a falling weight, every machine can be put in motion; and that by these motive powers every sort of work can be done which can be done at all by any machine. You see, therefore, that the weight of a heavy body, either solid or fluid, which descends from a higher place to a lower place is a motive power, and can do every sort of mechanical work. Now if the weight has fallen down to the earth, then it has the same amount of gravity, the same intensity of gravity; but its power to move, its power to work, is exhausted; it must become again raised before it can work anew. In this sense, therefore, I say that the faculty of producing new work is exhausted—is lost; and this is true of every power of nature when this power has produced alteration. Hence, therefore, the faculty of producing work, of doing work, does not depend upon the intensity of gravity. The intensity of gravity may be the same, the weight may be in a

higher position or in a lower position, but the power to work may be quite different. The power of a weight to work, or the amount of work which can be produced by a weight, is measured by the product of the height to which it is raised and the weight itself. Therefore our common measure is foot-pound; that is, the product of the number of feet and the number of pounds. Now we can by the force of a falling weight raise another weight; as, for example, the falling water in a water-mill may raise the weight of a hammer. Therefore it can be shown that the work of the raised hammer, expressed in foot-pounds, that is, the weight of the hammer multiplied by the height expressed in feet to which it is raised, that this amount of work cannot be greater than the product of the weight of water which is falling down, and the height from which it fell down. Now we have another form of motive power, of mechanical motive power; that is, velocity. The velocity of any body in this sense, if it is producing work, is called *vis viva*, or living force, of that body. You will find many examples of it. Take the ball of a gun. If it is shot off, and has a great velocity, it has an immense power of destroying; and if it has lost its velocity, it is quite a harmless thing. The great power it has depends only on its velocity. In the same sense, the velocity of the wind, is motive power; for it can drive windmills, and by the machinery of the windmills it can do every kind of mechanical work. Therefore you see that also velocity in itself is a motive force.

Take a pendulum which swings to and fro. If the pendulum is raised to the side, the weight is raised up; it is a
little higher than when it hangs straightly down, perpendicular. 349
Now if you let it fall, and it comes to its position of equilibrium, it has gained a certain velocity. Therefore, at first, you had motive power in the form of a raised weight. If the pendulum comes again to the position of equilibrium, you have motive power in the form of *vis viva,* in the form of velocity, and then the pendulum goes again to the other side, and it ascends again till it loses its velocity; then again, *vis viva* or velocity is changed into elevation of the weight: so you see in every pendulum that the power of a raised weight can be changed into velocity,

and the velocity into the power of a raised weight. These two are equivalent.

Then take the elasticity of a bent spring. It can do work, it can move machines or watches. The cross-bow contains such springs. These springs of the watch and cross-bow are bent by the force of the human arm, and they become in that way reservoirs of mechanical power. The mechanical power which is communicated so them by the force of the human arm, afterwards is given out by a watch during the next day. It is spent by degrees to overpower the friction of the wheels. By the cross-bow, the power is spent suddenly. If the instrument is shot off, the whole amount of force which is communicated to the spring is then again communicated to the shaft, and gives it a great *vis viva.*

Now the elasticity of air can be a motive power in the same way as the elasticity of solid bodies; if air is compressed, it can move other bodies; let us take the air-gun; there the case is quite the same as with the cross-bow. The air is compressed by the force of the human arm; it becomes a reservoir of mechanical power; and if it is shot off, the power is communicated to the ball in the form of *vis viva*, and the ball has afterwards the same mechanical power as is communicated to the ball of a gun loaded with powder.

The elasticity of compressed gases is also the motive power of the mightiest of our engines, the steam-engine; but there the case is different. The machinery is moved by the force of the compressed vapours, but the vapours are not compressed by the force of the human arm, as in the case of the compressed air-gun. The compressed vapours are produced immediately in the interior of the boiler by the heat which is communicated to the boiler from the fuel.

You see, therefore, that in this case the heat comes in the place of the force of the human arm, so that we learn by this example, that heat is also a motive power. This part of the subject, the equivalence of heat as a motive power, with mechanical power, has been that branch of this subject which has excited the greatest interest, and has been the subject of deep research.

It may be considered as proved at present, that if heat produces mechanical power, that is, mechanical work, a certain amount of heat is always lost. On the other hand, heat can be also produced by mechanical power, namely, by friction and the concussion of unelastic bodies. You can bring a piece of
iron into a high temperature, so that it becomes glowing and 350
luminous, by only beating it continuously with a hammer. Now, if mechanical power is produced by heat, we always find that a certain amount of heat is lost; and this is proportional to the quantity of mechanical work produced by that heat. We measure mechanical work by foot-pounds, and the amount of heat we measure by the quantity of heat which is necessary to raise the temperature of one pound of water by one degree, taking the centigrade scale. The equivalent of heat has been determined by Mr. Joule, of Manchester. He found that one unit of heat, or that quantity of heat which is necessary for raising the temperature of a pound of water one degree centigrade, is equivalent to the mechanical work by which the same mass of water is raised to 423½ metres, or 1389 English feet. This is the mechanical equivalent of heat.

Hence, if we produce so much heat as is necessary for raising the temperature of one pound of water by one degree, then we must apply an amount of mechanical work equal to raising one pound of water 1389 English feet, and lose it for gaining again that heat.

By these considerations, it is proved, that heat cannot be a ponderable matter, but that it must be a motive power, because it is converted into motion or into mechanical power, and can be either produced by motion or mechanical power. Now, in the steam-engine we find that heat is the origin of the motive power, but the heat is produced by burning fuel, and therefore the origin of the motive power is to be found in the fuel, that is, in the chemical forces of the fuel, and in the oxygen with which the fuel combines.

You see from this, that the chemical forces can produce mechanical work, and can be measured by the same units and by the same measures as any other mechanical force. We may consider the chemical forces as attractions, in this instance, as

attraction of the carbon of the fuel for the oxygen of the air; and if this attraction unites the two bodies, it produces mechanical work just in the same way as the earth produces work, if it attracts a heavy body. Now the conservation of force, of chemical force, is of great importance for our subject to-day, and it may be expressed in this way. If you have any quantity of chemical materials, and if you cause them to pass from one state into a second state, in any way, so that the amount of the materials at the beginning, and the amount of the materials at the end of this process be the same, then you will have always the same amount of work, of mechanical work or its equivalent, done during this process. Neither more nor less work can be done by the process. Commonly, no mechanical work in the common sense is done by chemical force, but usually it produces only heat; hence the amount of heat produced by any chemical process must be independent of the way in which that chemical process goes on. The way may be determined by the will of the experimenter as he likes.

We see, therefore, that the energy of every force in nature can be measured by the same measure, by foot-pounds, and that the energy of the whole system of bodies which are not
351 under the influence of any exterior body must be constant; that it cannot be lessened or increased by any change. Now the whole universe represents such a system of bodies endowed with different sorts of forces and of energy, and therefore we conclude from the facts I have brought before you, that the amount of working power, or the amount of energy in the whole system of the universe must remain the same, quite steady and unalterable, whatever changes may go on in the universe. If we accept the hypothesis of Laplace, that in the first state the universe was formed by a chaos of nebulous matter, spread out through infinite space, then we must conclude, that at this time the only form of energy existing in this system was the attraction of gravitation, and it was therefore the same sort of energy as is possessed by a raised weight. Afterwards, astronomers suppose, this nebulous matter was conglomerated and aggregated to solid masses. Great quantities of this nebulous matter, possibly from a great distance, fell together, and thus

their attraction, or the energy of their attraction was destroyed, and hence heat must have been produced; and the facts we know at present are sufficient to enable us to calculate the amount of this heat, that is, of the whole heat which must have been produced during the whole process of conglomeration. This amount of heat is immensely great, so that it surpasses all our ideas and all the limits of our imagination. If we calculate this quantity of heat, and suppose that the sun contained at the same time the whole heat, and that the sun had the same specific heat as water, the sun would be heated to twentyeight millions of degrees, that is, to a temperature surpassing all temperatures we know on earth; however, this temperature could not exist at any time in the sun, because the heat which was produced by the aggregation of the masses, must also be spent partially by radiation into space. I give only the result of these calculations, in order that you may see from it what a great amount of heat could be produced in this way. The same process goes on also at present in the falling stars and meteors which come down to the earth from planetary spaces. Their velocity is destroyed by the friction of the air and by the concussion with the surface of the earth, and we see how they become luminous, and if they are found on the earth, we find them hot.

The sun also at present is hotter than any heated body here on the earth. That is shown by the latest experiments made by Professors Kirchhoff and Bunsen, of Heidelberg, on the spectrum of the sun, by which it is proved, that in the atmosphere of the sun, iron and other metals are contained as vapours which cannot be changed into vapours by any amount of heat on the earth.

Our earth contains a great amount of energy in the form of its interior heat. This part of its energy produces the volcanic phenomena; but it is without great influence upon the phenomena of the surface, because only a very small amount of this heat comes through. It can be calculated that the amount of heat which goes from the interior to the surface cannot raise the temperature of the surface any higher than the thirteenth part of a degree.

352 We have another power which produces motion on the surface of the earth. I mean the attraction of the sun and of the moon producing the tides.

All the other phenomena on the surface of the earth are produced by the radiation of the sun, by the sunbeams; and the greater part of those changes which occur on the surface of our earth, are caused by the heat of the sun. As the heat of the sun is distributed unequally over the surface, some parts of the atmosphere become heated more than other parts; the heated parts of the atmosphere rise up, and so winds and vapours are produced. They come down at first as clouds in the higher parts of the atmosphere, and then as rain upon the surface of the earth; they are collected as rivers, and go again down into the sea. So you see that all the meteorological phenomena of our earth are produced by the effect of the solar beams by the heat of the sun.

The light of the sun is the cause of another series of phenomena, and the principal products of the light of the sun are plants, because plants can only grow with the help of the sun-light. It is only by the help of the sun-light, that they can produce the inflammable matter which is deposited in the bodies of plants, and which is extracted from the carbonic acid and the water contained in the atmosphere, and in the earth itself.

This may give you an idea of the sense and bearing of the general principle on which I purpose to speak. As many English philosophers have been occupied with working out the consequences of this most general and important principle for the theory of heat, for the energy of the solar system, for the construction of machines, you will hear these results better explained by your own countrymen; I shall abstain from entering farther into this part of the subject. At the same time that Mr. Grove showed that every force of nature is capable of bringing into action every other force of nature, Mr. Joule, of Manchester, began to search for the value of the mechanical equivalent of heat, and to prove its constancy, principally guided by the more practical interests of engineering. The first exposition of the general principle was published in Germany by

Mr. Mayer, of Heilbron, in the year 1842. Mr. Mayer was a medical man, and much interested in the solution of physiological questions, and he found out the principle of the conservation of force guided by these physiological questions. At the same time also, I myself began to work on this subject. I published my researches a little later than Mr. Mayer, in 1847. Now, at first sight, it seems very remarkable and curious, that even physiologists should come to such a law. It appears more natural, that it should be detected by natural philosophers or engineers, as it was in England; but there is, indeed, a close connection between both the fundamental questions of engineering and the fundamental questions of physiology with the conservation of force. For getting machines into motion, it is always necessary to have motive-power, either in water, fuel, or living animal matter. The constructors of machines, instruments, watches, 353
within the last century, who did not know the conservation of force, were induced to try if they could not keep a machine in motion without any expenditure for getting the motive power. Many of them worked for a long time very industriously to find out such a machine which would give perpetual motion, and produce any mechanical work which they liked. They called such a machine a perpetual mover. They thought they had an example of such a machine in the body of every animal. There, indeed, motive-power seemed to be produced every day without the help of any external mechanical force. They were not aware that eating could be connected with the production of mechanical power. Food they believed was wanted only to restore the little damages in the machine, or to keep off friction, like the fat which made the axles of wheels to run smoothly. Now at first by the mathematicians of the last century, the so-called principle of the conservation of *vis viva* was detected, and it was shown that by the action of the purely mechanical powers, it was not possible to construct a perpetual mover; but it remained still doubtful if it would not be possible to do so by the interposition of heat, or electricity, or chemical force. At last, the general law of conservation of force was discovered, and stated, and established; and this law shows that also by the connection of mechanical powers with heat, with electricity,

or with chemical force, no such machine can be constructed to give a perpetual motion, and to produce work form nothing.

We must consider the living bodies under the same point of view, and see how it stands with them. Now if you compare the living body with a steam-engine, then you have the completest analogy. The living animals take in food that consists of inflammable substances, fat and the so-called hydrocarbons, as starch and sugar, and nitrogenous substances, as albumen, flesh, cheese, and so on. Living animals take in these inflammable substances and oxygen; the oxygen of the air, by respiration. Therefore, if you take, in the place of fat, starch, and sugar, coals or wood, and the oxygen of the air, you have the substances in the steam-engine. The living bodies give out carbonic acid and water; and then if we neglect very small quantities of more complicated matters which are too small to be reckoned here, they give up their nitrogen in the form of urea. Now let us suppose that we take an animal on one day, and on any day afterwards; and let us suppose that this animal is of the same weight the first day and the second day, and that its body is composed quite in the same way on both days. During the time—the interval of time—between these two days the animal has taken in food and oxygen, and has given out carbonic acid, water, and urea. Therefore, a certain quantity of inflammable substance, of nutriment, has combined with oxygen, and has produced nearly the same substances, the same combinations, which would be produced by burning the food in an open fire, at least, fat, sugar, starch, and so on; and those substances which contained no nitrogen would give us quite in the same way carbonic acid and water, if they are burnt
354 in the open fire, as if they are burnt in the living body; only the oxidation in the living body goes on more slowly. The albuminous substances would give us the same substances, and also nitrogen, as if they were burnt in the fire. You may suppose, for making both cases equal, that the amount of urea which is produced in the body of the animal, may be changed without any very great development of heat, into carbonate of ammonia, and carbonate of ammonia may be burnt, and gives nitrogen, water, and carbonic acid. The amount of heat which

would be produced by burning urea into carbonic acid and nitrogen, would be of no great value when compared with the great quantity of heat which is produced by burning the fat, the sugar, and the starch. Therefore we can change a certain amount of food into carbonic acid, water, and nitrogen, either by burning the whole in the open fire, or by giving it to living animals as food, and burning afterwards only the urea. In both cases we come to the same result.

Now I have said that the conservation of force for chemical processes requires a fixed amount of mechanical work, or its equivalent, to be given out during this process; and the amount is exactly the same in whatever way the process may go on. And therefore we must conclude that by the animal as much work must be done, must be given out—the same equivalent of mechanical work—as by the chemical process of burning. Now let us remark that the mechanical work which is spent by an animal, and which is given to the external world, consists, firstly, in heat; and secondly, in real mechanical work. We have no other forms of work, or of equivalent of work, given out by living animals. If the animal is reposing, then the whole work must be given out in the form of heat; and therefore we must conclude that a reposing animal must produce as much heat as would be produced by burning its food. A small difference would remain for the urea; we must suppose that the urea produced by the animal is also burnt, and taken together with the heat immediately produced by the animal itself. Now we have experiments made upon this subject by the French philosophers Dulong and Despretz. They found that these two quantities of heat—the one emitted by burning, the other by the living animal—are nearly identical; at least, so far as could be established at that time, and with those previous researches which existed at that time. The heat which is produced by burning the materials of the food is not quite known even now. We want to have researches on the heat produced by the more complicated combinations which are used as food. Dulong and Despretz have calculated the heat according to the theoretical supposition of Lavoisier—which supposition is nearly right, but not quite right—therefore there is a little doubt as to the amount

of the heat, but experiments show that at least to the tenth part of that heat the quantities are really equal; and we may hope if we have better researches on the heat produced by burning the food, that these quantities will also be more equal than they were found to be by Dulong and Despretz.

Now if the body be not reposing, but if muscular exertion
355 take place, then also mechanical work is done. The mechanical work is very different according to the different kinds of muscular exertion. If we walk only on a plane surface, we must overpower the resistance of friction and the resistance of the air; but these resistances are not so great that the work which we do by walking on a plane is of great amount. Our muscles can do work in very different ways. By the researches of Mr. Redtenbacher, the director of the Polytechnic School of Carlsruhe, it is proved that the best method of getting the greatest amount of work from a human body is by the treadmill, that is, by going up a declivity. If we go up the declivity of a hill we raise the weight of our own body. In the treadmill the same work is done, only the mill goes always down, and the man on the mill remains in his place.

Now we have researches on the amount of air which is taken in and of carbonic acid given out during such work in the treadmill, made by Dr. Edward Smith. He found that a most astonishing increase of respiration takes place during such work. Now you all know that if you go up a hill you are hindered in going too fast by the great frequency and the great difficulty of respiration. This, then, becomes far greater than by the greatest exertion of walking on a plain, and really the difficulty is produced by the great mechanical work which is done in the same time. Now, partly from the experiments of Dulong and Despretz, and partly from the experiments of Dr. Edward Smith, we can calculate that the human body, if it be in a reposing state, but not sleeping, consumes so much oxygen, and burns so much carbon and hydrogen, that during one hour so much heat is produced that the whole body, or a weight of water equal to the weight of the body, would be raised in temperature one degree and two-tenths centigrade (two degrees and two-tenths Fahrenheit). Now Dr. Smith found that by

going in the treadmill at such a rate that if he went up a hill at the same rate, he would have risen during one hour 1712 feet, that during such a motion he exhaled five times as much carbonic acid as in the quiet state, and ten times as much as in sleeping. Therefore the amount of respiration was increased in a most remarkable way. If we now calculate these numbers we find that the quantity of heat which is produced during one hour of repose is one degree and two-tenths centigrade, and that these are nearly equivalent to rising 1712 feet, so that therefore the amount of mechanical work done in a treadmill, or done in ascending a hill at a good rate, is equivalent to the whole amount of heat which is produced in a quiescent state. The whole amount of the decomposition in the living body is five times as great as in a reposing and wakeful state. Of these five quantities, one quantity is spent for mechanical work, and four-fifths remain in the form of heat. Always in ascending a hill, or in doing great mechanical work, you become hot, and the production of heat is extremely great, as you well know, without making particular experiments. Hence you see how much the decomposition in the body is increased by doing really mechanical work.

Now these measurements give us another analogy. We see 256
that in ascending a mountain we produce heat and mechanical work, and that the fifth part of the equivalent of the work which is produced by the chemical process is really gained as mechanical work. Now if we take our steam-engine, or a hot-air engine, or any other engine which is driven by heat in such a way that one body is heated and expands, and by the expansion other bodies are moved,—I say, if we take any thermodynamic engine, we find that the greatest amount of mechanical work which can be gained by chemical decomposition or chemical combination is only an eighth part of the equivalent of the chemical force, and seven-eighths of the whole are lost in the form of heat; and this amount of mechanical work can only be gained if we have the greatest difference of temperature which can be produced in such a machine. In the living body we have no great difference of temperature; and in the living body the amount of mechanical work which could be

gained if the living body were a thermo-dynamic engine, like the steam-engine or the hot-air engine, would be much smaller than one-eighth. Really, we find from the great amount of work done, that the human body is in this way a better machine than the steam-engine, only its fuel is more expensive than the fuel of steam-engines.

There is another machine which changes chemical force into mechanical power; that is, the magneto-electric machine: By these magneto-electric machines a greater amount of electrical power can be changed into mechanical work than in our artificial thermo-dynamic machines. We produce an electric current by dissolving zinc in sulphuric acid, and liberating another oxidizable matter. Generally it is only the difference of the attraction of zinc for oxygen compared with the attraction of copper or nitrous acid for oxygen. In the human body we burn substances which contain carbon and hydrogen, and therefore the whole amount of attraction of carbon and hydrogen for oxygen is put into action to move the machine; and in this way the power of the living body is greater and more advantageous than the power of the magneto-electric machine.

Let us now consider what consequences must be drawn when we find that the laws of animal life agree with the conservation of force, at least as far as we can judge at present regarding this subject. As yet we cannot prove that the work produced by living bodies is an exact equivalent of the chemical forces which have been set into action. It is not yet possible to determine the exact value of either of these quantities so accurately as will be done ultimately; but we may hope that at no distant time it may be possible to determine this with greater accuracy. There is no difficulty opposed to this task. Even at present I think we may consider it as extremely probable that the law of the conservation of force holds good for living bodies.

Now we may ask, what follows from this fact as regards the nature of the forces which act in the living body?

The majority of the physiologists in the last century, and in the beginning of this century, were of opinion that the processes
357 cesses in living bodies were determined by one principal agent

which they chose to call the "vital principle". The physical forces in the living body they supposed could be suspended or again set free at any moment, by the influence of the vital principle; and that by this means this agent could produce changes in the interior of the body, so that the health of the body would be thereby preserved or restored.

Now the conservation of force can exist only in those systems in which the forces in action (like all forces of inorganic nature) have always the same intensity and direction if the circumstances under which they act are the same. If it were possible to deprive any body of its gravity, and afterwards to restore its gravity, then indeed we should have the perpetual motion. Let the weight come down as long as it is heavy; let it rise if its gravity is lost; then you have produced mechanical work from nothing. Therefore this opinion that the chemical or mechanical power of the elements can be suspended, or changed, or removed in the interior of the living body, must be given up if there is complete conservation of force.

There may be other agents acting in the living body, than those agents which act in the inorganic world; but those forces as far as they cause chemical and mechanical influences in the body, must be quite of the same character as inorganic forces, in this at least, that their effects must be ruled by necessity, and must be always the same, when acting in the same conditions, and that there cannot exist any arbitrary choice in the direction of their actions.

This is that fundamental principle of physiology which I mentioned in the beginning of this discourse.

Still at the beginning of this century physiologists believed that it was the vital principle which caused the processes of life, and that it detracted from the dignity and nature of life, if anybody expressed his belief that the blood was driven through the vessels by the mechanical action of the heart, or that respiration took place according to the common laws of the diffusion of gases.

The present generation, on the contrary, is hard at work to find out the real causes of the processes which go on in the living body. They do not suppose that there is any other

difference between the chemical and the mechanical actions in the living body, and out of it, than can be explained by the more complicated circumstances and conditions under which these actions take place; and we have seen that the law of the conservation of force legitimizes this supposition. This law, moreover, shows the way in which this fundamental question, which has excited to many theoretical speculations, can be really and completely solved by experiment.

CXLII.

Sur la production de la sensation du relief dans l'acte de la vision binoculaire.

Compte-rendu du Congrès périodique international d'ophthalmologie. 3e Session, 2e Congrès de Paris; 12, 13 et 14 août 1867. p. 53—58.

Messieurs, je me propose de vous entretenir de quelques 53
faits et expériences propres à guider l'esprit dans l'explication des phénomènes du relief dans l'acte de la vision binoculaire.

Et d'abord, on admet généralement que l'unité de la vision binoculaire se fonde sur une correspondance primitive et exclusive, sinon de tous les points, deux à deux, des rétines, au 54
moins sur la correspondance des deux centres des fossettes centrales.

Un premier fait cependant, d'observation commune, semble s'élever contre cette proposition. *La correspondance du point central entre un oeil et l'autre peut être changée dans le strabisme.*

Une seconde proposition généralement admise aussi, est que: *Nous obtenons une notion exacte de la position d'un objet dans l'espace, par la sensation exacte de la position de nos yeux.*

Or, on peut démontrer que nous n'avons point la sensation exacte de cette position, ni même de la tension musculaire qui la détermine, mais seulement du degré d'innervation nécessaire à la production du mouvement. Aussi, chaque circonstance qui vient à modifier les rapports existant entre la position ou la distance d'un objet et le *quantum* d'innervation qui leur correspondrait dans les circonstances habituelles,

devient-elle une cause d'erreur ou d'illusion sur la véritable position de l'oeil et conséquemment sur celle de l'objet.

La condition la plus fréquente de semblables aberrations se rencontre dans la fatigue des muscles. Or, dans l'acte de la vision binoculaire, le muscle droit interne est soumis à de tout autres relations que les autres muscles. Dans les mouvements associés des deux yeux, se portant vers la droite ou vers la gauche, en haut ou en bas, il n'y a pas ordinairement production inégale de fatigue entre les muscles droits externes et internes, ou entre les droits supérieurs et inférieurs, parce que, dans toutes ces directions du regard, à droite, à gauche, en haut ou en bas, nous choisissons involontairement une position telle de la tête qu'aucun de ces muscles ne soit sacrifié au profit des autres.

Dans les mouvements de convergence mutuelle des deux yeux, il n'en est plus ainsi; la fatigue éprouvée par le droit interne est sans balancement. C'est pour cela que la perception du degré de convergence est soumise à des erreurs relativement grandes. Aussi arrive-t-il que si, par un artifice quelconque, on offre aux deux yeux des images visuelles d'un même objet, mais dans une direction inexacte, leur fusion par les fossettes centrales pourra s'effectuer presqu'aussi bien que si les deux images étaient vues sous le degré de convergence qui correspondrait à la vue de l'objet réel. Et j'ai trouvé par des expériences, dont je donnerai la description plus bas, que si le degré d'innervation des muscles droits internes est un des éléments d'appréciation les plus importants de la convergence, il n'est cependant, comme nous allons le faire voir, ni le seul ni le plus important.

55 Dans cet ordre d'idées, en effet, les uns ont attribué trop de part à la convergence, d'autres, au contraire, ne lui ont pas accordé assez d'influence.

Expliquons-nous à cet égard:

En quoi, par exemple, consiste le sentiment de relief ou de profondeur? Assurément en beaucoup de cas, en une appréciation quelconque de la convergence. Quand nous regardons au loin, les deux axes oculaires dans le parallélisme, il n'existe pas pour nous de relief géométrique, ou de notion

réelle de profondeur, c'est-à-dire de distance relative entre les différents objets situés à l'horizon. Nos jugements, à cet égard, ne reposent point sur la géométrie à trois dimensions; ils se fondent sur d'autres éléments, la perspective aérienne, la quantité de lumière, l'habitude, les notions acquises antérieures, etc. etc. Quant à la géométrie à trois dimensions, elle ne manifeste son influence que pour des positions des objets plus ou moins rapprochées, et alors elle se lie à l'inégalité des images rétiniennes et à la convergence des axes optiques. On sait, en effet, que, dans la vision binoculaire d'un objet situé à une distance fixée, les deux images rétiniennes, quoique semblables, ne sont pas rigoureusement égales. Pour les deux yeux, comme on le dit, les parallaxes des deux mêmes points de l'objet ne sont pas identiques.

Passons maintenant au relief artificiel, aux phénomènes stéréoscopiques.

Que fait la stéréoscopie? Elle présente aux deux yeux des images semblables, sous des degrés déterminés de convergence, en ayant soin de donner, dans les images de droite et de gauche, aux distances mutuelles des points correspondants, des différences de parallaxe en rapport avec la convergence sous laquelle elles seront vues.

On sait qu'on peut obtenir la fusion de deux photographies stéréoscopiques sous des degrés très-variables de convergence, et même à un degré modéré de divergence des lignes visuelles, sans que la forme apparente de l'objet se modifie nécessairement d'une manière correspondante. Dans le cas de divergence des yeux, par exemple, aucun objet réel ne saurait correspondre rigoureusement aux images que l'on voit ainsi; et malgré cela, on croit voir un objet apparent, simple.

Si l'on diminue la distance mutuelle des deux photographies stéréoscopiques, on voit l'objet apparent se rapprocher de l'observateur et s'aplatir. On le voit alors comme représenté en bas-relief.

Si l'on augmente la distance mutuelle des deux photographies, l'objet semble s'éloigner de l'observateur et prendre 56
un relief plus élevé. J'ai trouvé qu'en réalité les règles géométriques suivies par les artistes dans la construction d'un bas-

relief, sont absolument celles que l'on suivrait si l'on voulait construire un objet qui donnât aux deux yeux les mêmes images visuelles que l'objet original, mais sous un degré plus faible de convergence. C'est pour cela que ces représentations artificielles en bas-relief donnent une impression beaucoup plus vive et en même temps plus naturelle que les tableaux plans. On peut le reconnaître non-seulement dans les ouvrages de sculpture, mais aussi dans les oeuvres architecturales, dans les portails des églises gothiques, dans les décorations scéniques qui sont ainsi construites en relief raccourci.

Dans la théorie de la vue stéréoscopique, on n'a tenu compte jusqu'ici que des différences entre les projections horizontales des points des objets. On doit noter pourtant aussi les différences qui s'observent dans les projections verticales. Un objet vertical, qui est plus rapproché de l'oeil droit que du gauche, apparaît plus long dans le premier que dans le second. Eh bien! j'ai trouvé que ces différences verticales qu'on a négligées jusqu'ici, sont souvent d'une grande influence sur la forme et la grandeur apparente de l'objet.

On peut poser pour règle que deux dessins stéréoscopiques combinés binoculairement, à un degré de convergence quelconque, déterminent l'apparition d'un objet tel que serait l'objet réel, propre à donner les mêmes images visuelles avec les mêmes différences parallactiques horizontales et verticales, quoique la convergence pour cet objet apparent dût être très-différente de la convergence actuelle.

Dans la plupart des cas, les deux images rétiniennes d'un seul objet ne peuvent plus être considérées comme deux projections exactes d'un même objet corporel, si on change le degré de convergence des yeux, sans changer en même temps la forme et la position des deux images sur les deux rétines: car, pour qu'elles soient les images d'un même objet, il faut que les lignes visuelles qui joignent une paire de points correspondants des deux images avec le point nodal de l'oeil correspondant, se coupent devant les yeux en un point qui est alors le *lieu* du point lumineux réel. Si les deux images rétiniennes sont produites en regardant deux tableaux stéréoscopiques, il résulte de ce qui précède que les deux images

ne peuvent être celles d'un même objet que sous la supposition d'un certain degré déterminé de convergence correspondante. Voyons maintenant ce qui arrive, si l'on modifie le degré actuel de la convergence des yeux.

J'ai l'honneur de mettre ici devant vos yeux des dessins 57
stéréoscopiques, représentant des surfaces peintes en blanc et en noir, comme un échiquier. Une première paire de ces dessins représente la projection d'un échiquier-plan vu de près; une deuxième paire, au contraire, est la projection d'une surface semblable, mais cylindrique convexe, et vue de loin. Si l'on compare les positions des lignes verticales entre les carreaux blancs et noirs, on trouve qu'elles sont absolument les mêmes, dans les deux paires de dessins. Ce ne sont que les lignes horizontales, ou presque horizontales, qui sont différentes. Les deux paires de dessins regardés avec le même degré de convergence produisent néanmoins des impressions tout à fait différentes; la première d'une surface plane, la deuxième d'une surface convexe.

Si la perception des différences horizontales des deux images produisait immédiatement, par un mécanisme anatomique préformé, la notion de la profondeur, comme il a été supposé dans la théorie de MM. Panum et Hering, il est clair, qu'on devrait voir dans les deux cas la même surface cylindrique, et les lignes horizontales de la première paire de tableaux en images doubles. Or, le résultat de l'expérience est tout à fait en opposition avec cette théorie.

Ce résultat s'explique au contraire très simplement, si nous partons de l'hypothèse que l'appréciation de la distance et de la forme des objets que nous voyons, ne dépend que du souvenir de cas semblables où des objets réels nous ont donné les mêmes impressions visuelles, et que la sensation musculaire de la convergence est trop inexacte pour qu'elle puisse troubler sensiblement le jugement qui se base sur la comparaison des deux images rétiniennes. Nous croyons toujours voir un objet tel qu'il devrait exister pour donner, sous un degré de convergence déterminé, les mêmes images rétiniennes que nous voyons actuellement.

J'ai décrit dans mon *Manuel d'optique physiologique* nombre

d'expériences conduisant aux mêmes conséquences, et j'ai donné l'explication de quelques observations de MM. Hering et Recklinghausen, qui partent du même principe, c'est-à-dire que la sensation de convergence est inexacte, et que souvent l'interprétation mentale des perceptions visuelles se fait en supposant un autre degré de convergence qui s'accorde mieux avec la nature des images rétiniennes.

Les expériences que je vous ai décrites me semblent être intéressantes en ceci qu'elles font voir que l'appréciation de la forme d'un objet visuel dépend de l'ensemble des différentes impressions qu'il produit, et parce que je crois que ce phéno-
58 mène ne peut aucunement s'expliquer par la supposition d'une fusion anatomique des deux images rétiniennes.

CXLIII.

SIR WILLIAM THOMSON'S "MATHEMATICAL AND PHYSICAL PAPERS".

Mathematical and Physical Papers. By Sir William Thomson. Vols. I. and II. (Cambridge University Press. 1882, 1884).

Aus: Nature, Vol. 32, p. 25—27. 1885.

Every one interested in the study of physics of the more 25
profound kind will welcome this collection of essays by the celebrated natural philosopher, so many of which, hitherto scattered throughout various periodicals, difficult to gather together, or even wholly inaccessible to readers out of the reach of large public libraries, are yet of decisive importance for those chapters of the science to which they refer. With the two volumes now before us, in conjunction with the late publication, "Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism," the collection is now completed down to the date of February, 1856. Vol. II. contains, besides, all that the author has written on the Transatlantic Telegraphs, which, according to the strict order of time, might have been looked for in later volumes. The first volume begins with a series of essays, for the most part of a mathematical nature. ranging from the year 1841 to 1850. So far as these essays relate to physical problems, their chief interest turns on the difficulties connected with the analytic method. These difficulties were, however, even at that early period, treated by the youthful author with great skill, and under comprehensive points of view. The problems are, in part, geometrical and mechanical, referring to lines of curvature, systems of orthogonal surfaces, principal axes of a rigid body, &c. Most of them, however, deal with the integration of the differential equations, on which is

based the doctrine of thermal conductivity and potential functions. The latter, as is well known, form the mathematical foundation of a large number of chapters in physics—the doctrine of gravitation, of electrostatical distribution, of magnetic induction, of stationary currents of heat, of electricity and of ponderable fluids. By treating all these problems collaterally and rendering concretely in some what in others appears in the highest degree abstract, the author has succeeded in overcoming the greatest difficulties, and we can only recommend every student of mathematical physics to follow his example. A field particularly favourable for the exercise of his powers was opened up to Sir W. Thomson by the phenomena, newly discovered by Faraday, in diamagnetic and weakly magnetic bodies, crystalline as well as uncrystalline. These our author rapidly and easily succeeded in arranging under comprehensive points of view. One great merit in the scientific method of Sir William Thomson consists in the fact that, following the example set by Faraday, he avoids as far as possible hypotheses on unknown subjects, and by his mathematical treatment of problems endeavours to express the law simply of observable processes. By this circumscription of his field the analogy between the different processes of nature is brought out much more distinctly than would be the case were it complicated by widely-diverging ideas respecting the unknown interior mechanism of the phenomena.

From the year 1848 and onwards there follows a long series of important investigations into the fundamental problems of thermo-dynamics. These start first with Saadi Carnot's conclusions respecting the mechanical functions of heat arrived at before J. P. Joule had experimentally demonstrated the equivalence of heat and mechanical energy. At the time when Carnot published his investigations heat was, by the majority of physical scientists, deemed an imponderable substance capable of flowing from one body to another, of entering occasionally into a more intimate kind of union with ponderable matter, and becoming, so to say, chemically united with it, under changes in the state of aggregation and under chemical processes. According to this older view temperature signified as much as th

pressure under which the imponderable fluid stood in the warm bodies. In the case of a great number of thermal processes heat, n point of fact, acts entirely like a substance, showing the constancy of quantity, which is the most characteristic criterion of substances. In this way large sections of the doctrine of heat, embracing great bodies of facts, could very well be treated under the substantial conception of this agent—such, for example, as the exchange of heat between different bodies, the confinement and liberation of latent heat, the chemical production of heat. All that was neccessary to render the substantial conception of heat apparently satisfactory was but to leave out of account all cases in which other forms of work are produced by heat or in which heat is produced by such. Cases of this kind then known were indeed very few, whereas the sections of the doctrine of heat already referred to were exactly those which till towards the middle of this century engaged the attention of natural philosophers. Carnot's highly acute investigation was an attempt to bring the phenomena likewise of the performance of work by means of heat into harmony with the assumption of the substantial theory of heat. The result of this endeavour was remarkable enough. He showed, namely, that heat was capable of performing mechanical work only when a quantity of it passed from a body of higher temperature into another body of lower temperature. A complete analogy thus seemed to be established between heat and those gases which through their pressure are capable of performing work, expanding, as they do, and abating their pressure in a measure corresponding with their expansion. The heat of a warm body corresponds in a manner with a compressed gas; it diffuses itself in space, passing into neighbouring bodies, to the lowering of the temperature of the body in which it was originally compacted.

Carnot's deductions, although based essentially on the erroneous assumption that the quantity of heat was constant like that of a substance, proved in reality correct so far as they respected transitions of heat within very narrow limits of temperature. They cease, however, to be strictly accurate when they are extended to wider intervals of temperature, for in that case finite parts

of the transferred heat become transformed into work and no longer continue as heat. We now know through the experiments of Joule that heat does not possess the absolute constancy of a substance, but only the relative constancy of an equivalent of work which, to be sure, can neither be produced from nothing nor come to nothing, but is yet capable of being transferred
26 into other forms of equivalents of work which may be presented in a very diverse and hardly recognisable manner.

In his first Essays, Art. XXXIX., "On an Absolute Thermometric Scale," and Art. XLI., "An Account of Carnot's Theory of the Motive Power of Heat," dating from the years 1848 and 1849, our author still occupies essentially Carnot's standpoint, but he nevertheless calls attention to the fact that the argument adduced by Carnot in support of his theorem, apparently valid though it was in all points, was yet defective if the experiments by Joule, which were just then made known, should be confirmed, according to which heat might be generated anew by work (vol. i. p. 116). That which more immediately directed Sir William Thomson's studies to this subject was the possibility of attaining, in accordance with Carnot's theorem, to an absolute scale of temperature, and he endeavoured to utilise the observations which Regnault had shortly before carried out with special care in reference to the pressure and latent heat of steam for the purpose of calculating such a scale. But in doing so, he was obliged to apply the hypothesis, not perfectly exact in this case, that the density of steam was to be calculated from pressure and temperature according to the laws of gases.

The theory of Carnot next obtained highly surprising confirmation from the theoretical deductions drawn by Prof. James Thomson, the elder brother of Sir William, touching the alteration of the freezing-point of water in consequence of differences of pressure. The accuracy in point of fact of this deduction was experimentally demonstrated by Sir W. Thomson. This was a discovery which perhaps more than any other served to draw the attention of physical scientists to the accuracy and the importance of Carnot's theorem.

Meanwhile our author, no longer able to doubt the cor-

rectness of Robert Mayer and Joule's thesis respecting the equivalence of heat and work, devoted himself to the problem of how Joule's and Carnot's laws might be combined. This question he answered in his treatise of March, 1851, "On the Dynamical Theory of Heat," Art. XLVIII. Prof. Clausius, in Germany, had, however, been busied with the same problem, and had published the results at which he arrived before Sir W. Thomson, in May, 1850. The essential results of the two investigations coincided exactly; only in their numerical values for the absolute scale of temperature, the two authors had started with two different hypotheses, and had therefore reached different conclusions. Sir William Thomson had, as above mentioned, calculated the density of steam from pressure and temperature, as if for complete gases, whereas Prof. Clausius had accepted the hypothesis set up by Robert Mayer, according to which the work of a gas expanding itself was exactly equivalent to its loss of heat. Later on, when his opponents set forth the unsatisfactory basis of this hypothesis, Robert Mayer pointed to an old and very little-known experiment of Gay-Lussac, according to which a gas diffusing itself in empty space without encountering any resistance suffered no diminution of heat. The same experiment was afterwards carried out by Joule without his having any knowledge of the earlier observation of a similar nature. This form of the experiment was, however, as a whole, not fitted to yield very precise results seeing that the mass of air available for it, whose consumption of heat was to be measured, was necessarily very small in comparison with the mass of water of the calorimeter. It was not till the investigations into the changes of temperature undergone by a mass of gas made to pass through a very dense porous substance—an investigation carried out in common by J. P. Joule and Sir W. Thomson, in 1852, and described in Art. XLIX., "On the Thermal Effects of Fluids in Motion"—that it was demonstrated how, in point of fact, R. Mayer's hypothesis was accurate to within a very close degree of approximation, although not with absolute precision, in respect of hydrogen and atmospheric air, whereas carbonic acid showed greater deviations.

To this have to be added extended investigations into thermo-electric currents, and the equivalent of their operations (Appendix to Art. XLVIII. and Art. LI. "Experimental Researches in Thermo-electricity," Vol. I., Art. XCI. Bakerian lecture, pp. i., ii., and iii., Vol. II.). In a thermo-electric chain which, from its conducting wire, sets magnets in motion, or generates heat in them, the heat conducted to the soldering seams is manifestly the source of the operations. We know that in such a case, according to the important observations of Peltier, heat disappears from the warmer soldering seam, and becomes developed in the colder. That is, in fact, the condition, according to Carnot's law, under which heat becomes transferable into other forms of work. This particular process was, however, of special interest for the universal validity of the theory, seeing that the work of heat is here produced under conditions altogether different from those of the steam-engine and hot-air engine. Our author was by this investigation led to the conclusion that, contrary to the opinion hitherto entertained, it was not in the soldering-seams of the metals, at all events not in those alone, but in the whole length of the wires, by a process which he calls "electric convection of heat," that the essential cause of the thermo-electric force was to be sought; and, in point of fact, he succeeded by a series of very laborious and subtle experiments in demonstrating that the conduction of heat in iron proceeded more rapidly in the direction of the current of negative electricity, and in copper in the direction of the positive current.

In the first volume of the book which is the subject of notice, the consecutive stages may thus be followed in the development of one of the most remarkable chapters in the history of discoveries, a chapter specially remarkable also as an example of how discoveries are arrived at in a manner not always rational. The course of this discovery reminds one in some measure of the invention of achromatic telescopes. Starting with the erroneous supposition that the eye of man was achromatic, Euler inferred that Newton's assumption of the proportionality between refraction and dispersion of light was false, and that his conclusion as to the impossibility of achromatic telescopes

was without foundation. Thereupon Euler gave the receipt for the making of achromatic telescopes—a correct conclusion from a false premiss; similar to the case of Carnot with the doctrine of heat. After all the confirmations which have been obtained in the different branches of physics for the validity of the deductions of the corrected Carnot law there can hardly longer remain any doubt that we have here found one of the most comprehensive and important laws of nature of unlimited applicability. 27
Down to the present moment we are, however, not yet in a position to derive a complete argument for its truth from the general principles of kinetics. Our analytic methods are inadequate even to the problem of completely determining the movement of three bodies reciprocally attracting one another. In the case, however, of motion which we perceive as heat, there are myriads of atoms engaged, all in the most irregular movement, and influenced by forces the nature of which is still almost wholly unknown to us. It is highly probable that the peculiar difficulty of reducing thermal motion into other forms of mechanical energy, which is expressed in Carnot's thesis, is due to the circumstance that thermal motion is a completely "unregulated" movement, that is, that there is no kind of similarity between the movements of atoms immediately neighbouring one another. Even in the case of the most rapid vibrations of light and sound, on the other hand, the movements and conditions of neighbouring atoms are so much the more similar to one another the nearer they are to one another. These, therefore, I am in the habit of calling "regulated" in antithesis to thermal motion. Sir W. Thomson has introduced for this conception the name of "dissipation of energy." Prof. Clausius denotes the quantitatively determined measure of the same magnitude by a more abstract name, "entropie." The dissipation of energy is capable, according to Carnot's law, by every known process of nature in the inorganic world, only of constant increase, never of decrease, and this leads to the much-talked-of conclusion that the universe is tending towards a final state of absolute unchangeableness with stable equipoise of all its forces under the establishment of complete equipoise of temperature, as our author expressed it in the year 1852 (Art. LIX., " On a Uni-

versal Tendency in Nature to the Dissipation of Mechanical Energy").

On the other hand the ascertained laws of dynamics yield the deduction that if we were able suddenly to reverse the total movements of the total atoms of an isolated mechanical system the whole system would of necessity retraverse all the states which up to that point of time it had passed through. Therewith also would all the heat generated by friction, collision, conduction of electrical currents, &c., return into other forms of energy, and the energy which had been dissipated, would be all recovered. Such a reversion, however, is a postulate beyond the power of human means to fulfil. We have no agency at our disposal by which to regulate the movement of atoms. Whether, however, in the extraordinarily fine structure of organic tissues a mechanism capable of doing it exists or not is a question not yet to be answered, and I deem it very wise on the part of Sir W. Thomson that he has limited all his theses respecting the necessity of increasing dissipation by restricting their validity to "inanimate matter."

The recognition of this scientific law of so universal applicability and so rich in consequences is, be it repeated, due in the first place, through Carnot, to an erroneous assumption regarding the nature of heat. The universal demonstration given by him of the principle, a demonstration which in his day appeared completely satisfactory, is based purely on this assumption. And, what is still more noteworthy, it is hardly to be supposed that the principle in question could have been deduced from the more correct view—namely, that heat is motion, seeing that we are not yet in a position to establish that view on a completely scientific basis. The two natural philosophers, moreover, who brought Carnot's and Joule's principles into harmony with each other, and whom we have to thank for our present knowledge on this subject, are able to refer their conclusions only to an axiom generalising the experience that heat tends ever to expand, never to concentrate. Sir W. Thomson expresses this axiom in the following terms: — "It is impossible by means of inanimate material agency to derive mechanical effect from any portion of matter by

cooling it below the temperature of the coldest of the surrounding objects."

The reviewer has, further, succeeded in demonstrating that the peculiar limitation affecting the transformation of heat into other forms of work likewise applies to other classes of motions revolving on themselves, so long as no external forces are brought into play directly opposing or accelerating the internal motion.[1])

When by J. P. Joule's experiment it was demonstrated that the basis of Carnot's proof was defective, it might have been apprehended that along with the element of error the element of truth in it would also be rejected. It must therefore be regarded as a special merit on the part of Prof. Clausius and Sir W. Thomson that, while removing the mistakes, they brought the truth into precise expression and into universal recognition, and that the recent theory of heat has become so fruitful in discoveries respecting the most secret connections between the different physical qualities of bodies in nature.

The second volume of these Reprints contains chiefly the researches having relation to the laying of the first submarine telegraph cable. The motion of electricity in these cables undergoes a peculiar retardation in consequence of the fact that the conducting-wire separated from the sea-water, which is likewise a tolerably good conductor, only by a thin isolating layer of gutta-percha, forms an enormous Leyden jar, which must first be charged with the electricity entering it before the current will pass with full force along the whole length of the wire to the other end. The physical laws of the processes which here come into play were generally known, but a far-searching mathematical investigation was still needed to determine the whole procedure of these currents and to ascertain the amount of influence exercised on them by the dimensions and conductivity of the wire, by the neighbourhood of other wires, and by the particular quality of the gutta-percha, as also to arrive at a knowledge of the conditions under which

[1]) H. von Helmholtz, „Studien zur Statik monocyklischer Systeme." Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 6. u. 27. März und 10. Juli 1884; abgedruckt auf Seite 119, 163 und 173 des vorliegenden Bandes.

the most rapid series of signals might be transmitted and received at the opposite end.

All these questions our author disposed of thoroughly and exhaustively, having also to contend with opposition to his views based on observations made under restricted conditions on other cables. He was then a comparatively little-known young man, and did not enjoy that recognition and authority now everywhere freely accorded him.

To this were joined mechanical problems connected with
28 the sinking or eventual raising and repairing of the cable; further, the construction of telegraphic signal apparatuses able to utilise the first weak beginnings of the current arriving at the other end of the cable. These ultimately led to the invention of the siphon-recorder—a writing apparatus in which the tube containing the ink does not come into immediate contact with the strips of paper on which it has to write, and is therefore not hindered by friction from moving even under the least electro-magnetic impulse. By electric charges it is brought about that the ink spurts over the paper in a series of fine points.

The conclusion of the second volume is formed by the Bakerian Lecture for 1856, which gathers up the results of the author's investigations into the qualities of metals as displayed under the conduction of electric currents, and under magnetisation, and the changes they undergo in consequence of mechanical, thermal, and magnetic influences.

Let us hope for an early continuation of this interesting collection. There are still nearly thirty years of scientific activity on the part of the author to be accounted for. When we think of that we cannot fail to be astonished at the fruitfulness and unweariedness of his intellect.

CXLIV.

Nachtrag zu dem Aufsatze: Ueber das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik.

Der Inhalt dieser Abhandlung wurde in der Sitzung der Berliner Akademie vom 14. Juni 1894 vorgetragen.[1])

In dem oben genannten Aufsatze, den ich unter dem 12. Mai 1892 der Akademie vorgelegt habe, habe ich versucht, die von Maxwell aufgestellten und von H. Hertz ausführlicher formulirten Gesetze der Elektrodynamik in einen Minimalsatz zusammenzufassen, der als eine verallgemeinerte Form des Princips von der kleinsten Wirkung angesehen werden kann und bei dem es sich namentlich darum handelt, zu entscheiden, ob der bekannte Werth der gesamten Energie der elektromagnetischen Vorgänge mit dem System der ponderomotorischen Kräfte, wie es Maxwell angegeben hat, zusammenpasst oder noch den Zusatz einer nach den Geschwindigkeiten linearen Function verlangt, welcher ohne Einfluss auf den Werth der Energie ist, aber Aenderungen in dem Werth der Kräfte bedingen würde.

Die von mir in dem genannten Aufsatz gegebene Lösung scheint durchgehends den Gesetzen von Maxwell auch in Betreff der ponderomotorischen Kräfte zu entsprechen und ist, soweit es sich darin um die elektromagnetischen Vorgänge im Aether handelt, so lange dieser entweder ruht oder sich mit vorgeschriebenen und nicht variirbaren Geschwindigkeiten bewegt, in einfach übersichtlicher Weise behandelt, ohne dass principielle Schwierigkeiten dabei in Betracht kommen. Wenn aber die ponderomotorischen Kräfte aus dem genannten Prin-

---

[1]) Siehe das Vorwort zu dem vorliegenden Bande. (A. K.)

cip hergeleitet werden sollen, so hat man dabei Variationen nach den Coordinaten und nach den entsprechenden Geschwindigkeitscomponenten durchzuführen, die zu äusserst verwickelten und wenig übersichtlichen Rechnungen führen zwischen Grössen, die in verwickelten Abhängigkeitsverhältnissen zu einander stehen und bei denen es schwer ist, sich zu versichern, ob man alle Glieder berücksichtigt hat. Unter diesen Umständen hielt ich es für wünschenswerth, nach einer einfacheren und leichter übersichtlichen Methode der Lösung des Problems zu suchen, die ich hier auseinandersetzen will, und die in der That das Ergebniss meiner früheren Untersuchung nur bestätigt hat.

Die Schritte und Bezeichnungen der früheren Untersuchung vom 12. Mai 1892 können alle stehen bleiben bis zu dem Abschnitte, der die Ueberschrift hat: Variation der Lage. Nur können wir in den Integralen $\Phi_{q,1}$, $\Phi_{q,2}$ und $\Phi_{q,3}$ die unter dem Integralzeichen stehenden Producte in derselben Weise in je zwei Factoren zerlegen, wie es schon auf S. 487 geschehen ist, und die so ausgeschiedenen Factoren als unabhängige und willkürlich zu variirende Grössen behandeln.

Die $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{W}$ sind Componenten der elektromagnetischen Inductionskraft (Faraday's elektrotonischen Zustandes) und $\mathfrak{U} \cdot dx$, $\mathfrak{B} \cdot dy$, $\mathfrak{W} \cdot dz$ also Producte aus der Intensität einer solchen Kraft multiplicirt mit dem Längenelement der Richtung, in der es wirkt.

$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sind Componenten der Intensität der dielektrischen Polarisation, und $\mathfrak{X} \cdot dy \cdot dz$, $\mathfrak{Y} \cdot dx \cdot dz$, sowie $\mathfrak{Z} \cdot dx \cdot dy$ geben das Product aus der Stärke dieser Polarisation multiplicirt mit der Grösse eines Flächenelements, durch welches sie in Richtung seiner Normale wirksam wird. Oder wenn man sich den Zustand der dielektrischen Polarisation entstanden denkt durch Verschiebung positiver Elektricität nach der positiven Richtung der Normale des Flächenelements und der negativen Elektricität in negativer Richtung, so würden diese Producte auch bezeichnet werden können als die Gesammtquanta von Elektricität, welche das Flächenelement zwischen seinem neutralen Zustande bis zu dem seiner gegenwärtigen Polarisation passirt haben.

Wenn wir die Flächenelemente $dy \cdot dz$, $dz \cdot dx$ und $dx \cdot dy$ als unverändert festliegend im Aether betrachten, so kann sich 1) mit wachsender Zeit zunächst die Intensität der Polarisation an Ort und Stelle selbst ändern. Dies giebt die Zunahme der elektrischen Verschiebung:

$$dy \cdot dz \cdot \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} \cdot dt$$

2) können neue Aethervolumina mit grösserer Polarisation herangeführt werden; also wenn wir die Geschwindigkeiten, mit denen der Aether selbst fortströmt, nach ihren Componenten zerlegt mit α, β, γ bezeichnen, ist die Zunahme der elektrischen Verschiebung

$$dy \cdot dz \left[\alpha \cdot \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \beta \cdot \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} + \gamma \cdot \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}\right] \cdot dt$$

3) kann die Componente, welche in die Richtung dx, d. h. die der Normale des Flächenelements fällt, durch eine rotirende Bewegung des zugeführten Aethervolumens geändert werden. Dies giebt

$$-dy \cdot dz \left[\mathfrak{Y} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \mathfrak{Z} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right] \cdot dt$$

4) Der Inhalt der Fläche $dy \cdot dz$ steigt bei der Bewegung auf

$$dy \cdot dz \left[1 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) \cdot dt\right]$$

Dies giebt als Zuwachs:

$$dy \cdot dz \cdot \mathfrak{X} \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) \cdot dt.$$

Daher ergiebt sich die gesammte Vergrösserung der elektrischen Verschiebung

$$\frac{d}{dt}\left[dy \cdot dz \cdot \mathfrak{X}\right] = \left\{\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \alpha \cdot \sigma + \frac{\partial}{\partial y}\left[\beta \cdot \mathfrak{X} - \alpha\,\mathfrak{Y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\gamma \cdot \mathfrak{X} - \mathfrak{Z}\,\alpha\right]\right\} \cdot dy \cdot dz$$

Ebenso findet sich

$$\frac{d}{dt}\left[dx \cdot dz \cdot \mathfrak{Y}\right] = \left\{\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \beta \cdot \sigma + \frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha \cdot \mathfrak{Y} - \beta \cdot \mathfrak{X}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\gamma \cdot \mathfrak{Y} - \beta \cdot \mathfrak{Z}\right]\right\} \cdot dx \cdot dz$$

$$\frac{d}{dt}\left[dx \cdot dy \cdot \mathfrak{Z}\right] = \left\{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \gamma\sigma + \frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha\mathfrak{Z} - \gamma\mathfrak{X}\right]\right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y}\left[\beta\mathfrak{Z} - \gamma\mathfrak{Y}\right]\right\} \cdot dx \cdot dy$$

Es wird also

$$\Phi_{q,1} = A\iiint \mathfrak{U} \cdot dx \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{X} \cdot dy \cdot dz\right)$$

$$\Phi_{q,2} = A\iiint \mathfrak{V} \cdot dy \cdot \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{Y} \cdot dx \cdot dz\right)$$

$$\Phi_{q,3} = A\iiint \mathfrak{W} \cdot dz \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{Z} \cdot dx \cdot dy\right)$$

In entsprechender Weise wollen wir die Werthe bilden von

$$\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{U} \cdot dx\right], \frac{d}{dt}\left[\mathfrak{V} \cdot dy\right], \frac{d}{dt}\left[\mathfrak{W} \cdot dz\right]$$

worin dx, dy, dz Linienelemente sein sollen, die dauernd dieselbe Reihe von fortbewegten Aethertheilchen in sich schliessen, und in ihrer Anfangslage den Coordinataxen parallel sind.

Die Zunahme des Products ist gegeben

1) durch die Zunahme von $\mathfrak{U} \cdot dx$ an seinem ersten Orte

$$dx \cdot \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} \cdot dt$$

2) durch Hinführung neuen, stärker polarisirten Aethers

$$dx \cdot \left[\alpha \cdot \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \beta \cdot \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} + \gamma \cdot \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}\right] \cdot dt$$

3) durch Neigung der gegen x senkrechten Componenten der Inductionskraft $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ wird die in die Richtung dx fallende Projection derselben verstärkt. Dies giebt

$$dx\left[\mathfrak{V} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} + \mathfrak{W} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right] dt$$

und 4) kann dx in Richtung seiner Länge wachsen. Dies giebt als Zuwachs

$$dx\left[\mathfrak{U} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x}\right] \cdot dt$$

Diese einzelnen Posten addirt ergeben:

$$\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{U} \cdot dx\right] = dx\left\{\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathfrak{U} \cdot \alpha + \mathfrak{V} \cdot \beta + \mathfrak{W} \cdot \gamma\right] + \beta\left[\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right]\right. \\ \left. + \gamma\left[\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right]\right\}$$

Ebenso findet sich

$$\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{V}\cdot dy\right]=dy\left\{\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mathfrak{U}\cdot\alpha+\mathfrak{V}\beta+\mathfrak{W}\cdot\gamma\right]+\gamma\left[\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y}\right]\right.$$
$$\left.+\alpha\left[\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}\right]\right\}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{W}\cdot dz\right]=dz\left\{\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mathfrak{U}\cdot\alpha+\mathfrak{V}\cdot\beta+\mathfrak{W}\cdot\gamma\right]+\alpha\left[\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}\right]\right.$$
$$\left.+\beta\left[\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}\right]\right\}$$

Wenn wir also, wie auf S. 490 vorgeschrieben, die Grössen

$$\mathfrak{U}\cdot dx=D\,\mathfrak{U} \qquad \mathfrak{X}\cdot dy\cdot dz=D\,\mathfrak{X}$$
$$\mathfrak{V}\cdot dy=D\,\mathfrak{V} \qquad \mathfrak{Y}\cdot dx\cdot dz=D\,\mathfrak{Y}$$
$$\mathfrak{W}\cdot dz=D\,\mathfrak{W} \qquad \mathfrak{Z}\cdot dx\cdot dy=D\,\mathfrak{Z}$$

ferner die Zuwachse der Coordinaten x, y, z,

$$\alpha=\frac{d\xi}{dt},\ \beta=\frac{d\eta}{dt},\ \gamma=\frac{d\zeta}{dt}$$

als unabhängig von einander variirbar betrachten, so können wir die vordern Theile des kinetischen Potentials schreiben:

$$\Phi_e=\iiint\frac{1}{2\varepsilon}\left[\frac{(D\mathfrak{X})^2dx}{dy\cdot dz}+\frac{(D\mathfrak{Y})^2dy}{dx\cdot dz}+\frac{(D\mathfrak{Z})^2\cdot dz}{dx\cdot dy}\right]$$

$$\Phi_m=\iiint\frac{1}{2\mu}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{D\mathfrak{V}}{dy}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{D\mathfrak{W}}{dz}\right)+l\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{D\mathfrak{W}}{dz}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{D\mathfrak{U}}{dx}\right)+m\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{D\mathfrak{U}}{dx}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{D\mathfrak{V}}{dy}\right)+n\right]^2\right\}\cdot dx\cdot dy\cdot dz$$

Wenn wir hierin bemerken, dass die Differentiale dx, dy, dz als gleich gross bei der Ausmessung des gesammten Raumes anzusehen sind, dass sie bei der Bildung der vorgeschriebenen Differentialquotienten also nur als Constanten in Betracht kommen, und dass sie sich ausserdem aus dem Nenner fortheben, wenn die ursprünglichen Werthe der $D\mathfrak{X}$, $D\mathfrak{U}$ etc. wieder eingesetzt werden, so reduciren sich diese Theile der Energie für die Variationen von $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$, wenn die ξ, η, ζ als von den ersteren unabhängige Variable dabei zunächst noch unverändert gehalten werden sollen, auf die in der früheren Ausarbeitung gewählte Schreibweise:

$$\Phi_e = \iiint dx \cdot dy \cdot dz \left\{ \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{2\varepsilon} \right\}$$

$$\Phi_m = \iiint \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{2\mu} \left\{ \left[\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} + l \right]^2 + \left[\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} + m \right]^2 + \left[\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + n \right]^2 \right\}$$

in denen nun $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ zu variiren sind, während ξ, η, ζ zunächst noch unverändert bleiben.

In dem letzten Theile des kinetischen Potentials, der die von aussen einwirkenden als Functionen der Zeit allein gegebenen Kräfte umfasst, setzen wir

$$R = \iiint \left\{ \begin{array}{l} X \cdot dx \cdot \mathfrak{X} \cdot dy \cdot dz + Y \cdot dy \cdot \mathfrak{Y} \cdot dx \cdot dz + Z \cdot dz \cdot \mathfrak{Z} \cdot dx \cdot dy \\ + A \left[u \cdot dy \cdot dz \cdot \mathfrak{U} \cdot dx + v \cdot dx \cdot dz \cdot \mathfrak{V} \cdot dy + w \cdot dx \cdot dy \cdot \mathfrak{W} \cdot dz \right] \\ + \left[\Xi \cdot \xi + \Upsilon \cdot \eta + Z \cdot \zeta \right] dx \cdot dy \cdot dz \end{array} \right\}$$

in denen als unabhängige Variable auch nur $D\mathfrak{X}$, $D\mathfrak{Y}$, $D\mathfrak{Z}$, $D\mathfrak{U}$, $D\mathfrak{V}$, $D\mathfrak{W}$ vorkommen neben ξ, η, ζ, und die $X \cdot dx$, $Y \cdot dy$, $Z \cdot dz$, d. h. die von aussen her erregten Potentialunterschiede, so wie die Intensität der Stromfäden $u \cdot dy \cdot dz$, $v \cdot dx \cdot dz$ und $w \cdot dx \cdot dy$, endlich die ponderomotorischen auf Ätherpunkte wirkenden Kräfte Ξ, Υ, Z als unvariirbare Functionen der Zeit gegeben sind. Für die als unveränderlich in jedem Ätherpunkt vorausgesetzten Grössen ε und μ sind die Variationen

$$\delta\varepsilon = -\delta\xi \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \delta\eta \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \delta\zeta \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$$

$$\delta\mu = -\delta\xi \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} - \delta\eta \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y} - \delta\zeta \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

Dann ergiebt die Bedingung

$$0 = \delta \int_0^{t_1} \left(\Phi_e + \Phi_m + \Phi_{q,1} + \Phi_{q,2} + \Phi_{q,3} + R \right) dt$$

bei Variationen nach $D\mathfrak{X}$, dann nach $D\mathfrak{Y}$ und $D\mathfrak{Z}$

$$0 = \delta D\mathfrak{X} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \mathfrak{X} + X - \frac{A}{dx} \cdot \frac{d}{dt} \left[\mathfrak{U} \cdot dx \right] \right\}$$

$$0 = \delta D\mathfrak{Y} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \mathfrak{Y} + Y - \frac{A}{dy} \cdot \frac{d}{dt} \left[\mathfrak{V} \cdot dy \right] \right\}$$

$$0 = \delta D\mathfrak{Z} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \mathfrak{Z} + Z - \frac{A}{dz} \cdot \frac{d}{dt} \left[\mathfrak{W} \cdot dz \right] \right\}$$

welche mit den Gleichungen (4c) der früheren Abhandlung übereinstimmen.

Die Variation nach $D\mathfrak{U}$ allein, dann nach $D\mathfrak{V}$ und nach $D\mathfrak{W}$ giebt

$$0 = \delta D\mathfrak{U}\left\{A \cdot u + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) + \frac{A}{dy \cdot dz} \cdot \frac{d}{dt}\left(D\mathfrak{X}\right)\right\}$$

$$0 = \delta D\mathfrak{V}\left\{A \cdot v + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) + \frac{A}{dx \cdot dz} \cdot \frac{d}{dt}\left(D\mathfrak{Y}\right)\right\}$$

$$0 = \delta D\mathfrak{W}\left\{A \cdot w + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) + \frac{A}{dx \cdot dy} \cdot \frac{d}{dt}\left(D\mathfrak{Z}\right)\right\}$$

wie in den Gleichungen (4_a).

Schliesslich sind noch die Variationen nach ξ, η, ζ auszuführen. . . . .

Titelverzeichniss

sämmtlicher Veröffentlichungen

von

Hermann von Helmholtz.

1842

1. De Fabrica Systematis nervosi Evertebratorum. *Inaug. Diss. Berlin, 2. Nov. 1842.*
   Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 663.

1843

2. Ueber das Wesen der Fäulniss und Gährung. *Joh. Müller's Arch. f. Anat. u. Physiol. Jahrg. 1843, S. 453—462.*
   Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 726.

1845

3. Ueber den Stoffverbrauch bei der Muskelaction. *Joh. Müller's Arch. f. Anat. u. Physiol. Jahrg. 1845, S. 72—83.*
   Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 735.

1846

4. Wärme, physiologisch. *„Encyklopädisches Wörterbuch der medicinischen Wissenschaften," herausgegeben von Professoren der medicinischen Facultät zu Berlin. Bd. 35. S. 523—567. Berlin 1846. Veit & Co.*
   Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 680.

1847

5. Bericht über „die Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen" betreffende Arbeiten aus dem Jahre 1845. *„Fortschritte der Physik im Jahre 1845". 1. Jahrgang. S. 346—355. Berlin 1847. G. Reimer.*
   Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 3.

6. Ueber die Erhaltung der Kraft. *Vortrag in der physikal. Gesellschaft zu Berlin am 23. Juli 1847. Berlin 1847. G. Reimer.*
   Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 12.
   (Vergl. weiter unten Nr. (4*) und (14*) des Anhangs.)

1848

7. Ueber die Wärmeentwicklung bei der Muskelaction. *Joh. Müller's Arch. für Anat. und Physiol. Jahrg. 1848. S. 144—164.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 745.

8. Bericht über „die Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen" betreffende Arbeiten aus dem Jahre 1846. *„Fortschritte der Physik im Jahre 1846." 2. Jahrgang. S. 259—260. Berlin 1848. G. Reimer.*

1850

9. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Nervenreizung. *Berl. Monatsber. vom 21. Jan. 1850, S. 14—15.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 1.

10. Notes sur la vitesse de la propagation de l'agent nerveux dans les nerfs rachidiens. *Comptes rendus. XXX, p. 204—206.*

11. Messungen über den zeitlichen Verlauf der Zuckung animalischer Muskeln und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reizung in den Nerven. *Joh. Müllers Arch., Jahrgang 1850, S. 276—364.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 764.

12. Über die Methoden, kleinste Zeittheile zu messen, und ihre Anwendung für physiologische Zwecke. *Königsberger naturwissensch. Unterhaltungen. Bd. II, Heft 2, S. 169—189.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 862.

13. Bericht über „die Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen" betreffende Arbeiten aus dem Jahre 1847. *„Fortschritte der Physik im Jahre 1847". 3. Jahrgang. S. 232—245. Berlin 1850. G. Reimer.*

1851.

14. Deuxième note sur la vitesse de la propagation de l'agent nerveux. *Comptes rendus. XXXIII, p. 262—265.*

15. Beschreibung eines Augenspiegels zur Untersuchung der Netzhaut im lebenden Auge. *Berlin 1851. A. Förstner'sche Verlagsbuchhandlung.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 229.
(Vergl. weiter unten Nr. (15*) des Anhangs.)

16. Ueber den Verlauf und die Dauer der durch Stromesschwankungen inducirten elektrischen Ströme. *Berliner Monatsber. Sitzung v. 8. Mai 1851. S. 287—290.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 554.

17. Ueber die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducirten elektrischen Ströme. *Poggend. Ann. Bd. 83, S. 505—540.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 429.

1852

18. Messungen über Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reizung in den Nerven. Zweite Reihe. *Joh. Müller's Arch. Jahrg. 1852, S. 199—216.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 844.

19. Die Resultate der neueren Forschungen über thierische Elektricität. *Kieler Allg. Monatsschrift f. Wissensch. u. Litteratur. Jahrg. 1852, S. 294—309 u. 366—377.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 886.

20. Ueber die Natur der menschlichen Sinnesempfindungen. *Königsberger naturwissenschaftl. Unterhaltungen. Bd. III, S. 1—20.*
(Habilitationsvortrag, gehalten am 28. Juni 1852 zu Königsberg i. Pr.)
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 591.

21. Ueber Herrn D. Brewster's neue Analyse des Sonnenlichts. *Berliner Monatsberichte vom 15. Juli 1852. S. 458—561.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 558.

22. Ueber Herrn D. Brewster's neue Analyse des Sonnenlichts. *Poggend. Ann., Bd. 86, S. 501—523.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 24.

23. Ueber die Theorie der zusammengesetzten Farben. *Poggendorff's Ann., Bd. 87, S. 45—66. — J. Müller's Archiv. f. Anatomie u. Physiologie. Jahrg. 1852, S. 461—482.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II. S. 3.

24. Ein Theorem über die Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern. *Berliner Monatsberichte vom 22. Juli 1852, S. 466—468.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 562.

25. Bericht über „die Theorie der Akustik“ und „akustische Phänomene“ betreffende Arbeiten vom Jahre 1848. *„Fortschritte der Physik im Jahre 1848.“ 4. Jahrgang. S. 101—118 und S. 124—125. Berlin 1852. G. Reimer.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 233.

26. Bericht über „die Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen“ betreffende Arbeiten aus dem Jahre 1848. *„Fortschritte der Physik im Jahre 1848.“ 4. Jahrgang. S. 222—223. Berlin 1852. G. Reimer.*

27. Ueber eine neue einfachste Form des Augenspiegels. *Vierordt's Arch. f. physiol. Heilkunde. Bd. 11, S. 827—852.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 261.
(Vergl. weiter unten Nr. (16*) des Anhangs.)

1853

28. Ueber eine bisher unbekannte Veränderung am menschlichen Auge bei veränderter Accommodation. *Berliner Monatsberichte. 3. Februar 1853. S. 137—139.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 280.

29. Ueber einige Gesetze der Vertheilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierisch-elektrischen Versuche. *Poggend. Ann. Bd. 89, S. 211—233; S. 353—377.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 475.

30. Ueber Goethes naturwissenschaftliche Arbeiten. Ein Vortrag, gehalten in der deutschen Gesellschaft in Königsberg 1853. *Kieler Allg. Monatsschrift f. Wissensch. u. Litteratur. Jahrg. 1853. S. 383—398.*
(Vergl. weiter unten Nr. 90, 141 und 180.)

1854

31. Bericht über „die Theorie der Akustik“ betreffende Arbeiten aus dem Jahre 1849. *„Fortschritte der Physik.“ 5. Jahrgang. S. 93—98. Berlin 1854. G. Reimer.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 251.

32. Erwiderung auf die Bemerkungen von Hrn. Clausius. *Poggend. Ann. Bd. 91, S. 241—260.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 76.

33. Ueber die Wechselwirkung der Naturkräfte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittelungen der Physik. *Ein populär-wissenschaftlicher Vortrag, gehalten am 7. Febr. 1854. 1. u. 2. Abdr. 47 S. Königsberg 1854. Gräfe & Unzer.*

(Vergl. weiter unten Nr. 117, 124, 142 u. 180, sowie Nr. (4*) des Anhangs.)

34. Ueber die Geschwindigkeit einiger Vorgänge in Muskeln und Nerven. *Berliner Monatsberichte. 15. Juni 1854. S. 328—332.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 881.

1855

35. Ueber die Zusammensetzung von Spectralfarben. *Poggend. Ann. Bd. 94, S. 1—28.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 45.

36. Ueber das Sehen des Menschen. *Ein populär-wissenschaftlicher Vortrag, gehalten zu Königsberg i. Pr. am 27. Febr. 1855. 42 S. Leipzig 1855. L. Voss.*

(Vergl. weiter unten Nr. 180.)

37. Ueber die Empfindlichkeit der menschlichen Netzhaut für die brechbarsten Strahlen des Sonnenlichts. *Poggendorff's Ann. Bd. 94, S. 205—211.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 71.

38. Zusatz zu einer Abhandlung von E. Esselbach über die Messung der Wellenlänge des ultravioletten Lichtes. *Berliner Monatsberichte. Dec. 1855. S. 760—761.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II. S. 81.

39. Ueber die Accommodation des Auges. *Gräfe's Arch. für Ophthalmologie. Band I, Abth. 2, S. 1—74.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 283.

40. Bericht über „die Theorie der Wärme“ betreffende Arbeiten aus dem Jahre 1852. *„Fortschritte der Physik im Jahre 1852.“ 8. Jahrgang. S. 369—387. Berlin 1855. G. Reimer.*

1856

41. Ueber die Erklärung des Glanzes. *Niederrhein. Sitzungsberichte. 1856. S. XXXVIII—XL.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 4.

42. Zuckungscurven von Froschmuskeln. *Niederrhein. Sitzungsberichte. 1856. S. LXXIV—LXXV.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 6.

43. Ueber die Combinationstöne oder Tartinischen Töne. *Niederrhein. Sitzungsber. 1856. S. LXXV—LXXVII.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 7.

44. Ueber die Bewegungen des Brustkastens. *Sitzungsberichte der niederrheinischen Gesellsch. zu Bonn v. 12. März 1856. Abgedr. in den Verhandlungen des naturhist. Vereins für Rheinland und Westphalen. Jahrg. 13, S. 70—71.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 953.

45. Ueber Combinationstöne. *Berliner Monatsberichte. 22. Mai 1856. S. 279—285.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 256.

46. Ueber Combinationstöne. *Poggendorff's Ann. Bd. 99, S. 497—540.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 263.

47. Handbuch der physiologischen Optik. *1. Lieferung. S. 1—192. Leipzig 1856. Leopold Voss.*
(Vergl. weiter unten Nr. 67, 94, 182, 183, 192, 198, 208 u. 217, sowie Nr. (2*) des Anhangs.)

48. Bericht über „die Theorie der Wärme" betreffende Arbeiten aus dem Jahre 1853. *„Fortschritte der Physik." 9. Jahrgang. S. 404—432. Berlin 1856. G. Reimer.*

1857

49. Ein Telestereoskop. *Niederrhein. Sitzungsberichte. 1857. S. LXXIX—LXXXI.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 10.

50. Das Telestereoskop. *Poggendorff's Ann. Bd. 102, S. 167—175.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 484.

51. Ueber die Vokale. *Arch. f. d. holländ. Beiträge z. Natur- u. Heilkunde. Bd. I, S. 354—355. (Aus einem Briefe an F. C. Donders abgedruckt.)*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 395.

52. Die Wirkungen der Muskeln des Armes. *Vorgetragen in der ärztlichen Sektion der niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde am 10. Dez. 1856. Allgem. medizin. Centralzeitung. Jahrg. 1857, S. 85.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 955.

53. Bericht über „die Theorie der Wärme“ betreffende Arbeiten aus dem Jahre 1854. *„Fortschritte der Physik.“ 10. Jahrgang. S. 361—398. Berlin 1857. G. Reimer.*

1858

54. Ueber die subjectiven Nachbilder im Auge. *Niederrhein. Sitzungsber. 1858. S. IIC—C.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 13.

55. Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *Journ. f. d. reine u. angewandte Mathematik. Bd. 55, S. 25—55.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 101.

56. Bericht über „die Theorie der Wärme“ betreffende Arbeiten aus dem Jahre 1855. *„Fortschritte der Physik.“ 11. Jahrgang. S. 361—373. Berlin 1858. G. Reimer.*

57. Ueber die physikalische Ursache der Harmonie und Disharmonie. *Amtlicher Bericht über die 34. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Carlsruhe im September 1858. S. 157—158.*

58. Ueber Nachbilder. *Amtlicher Bericht über die 34. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Carlsruhe im September 1858. S. 225—226.*

1859

59. Ueber die Klangfarbe der Vocale. *Gel. Anz. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. 1859, Nr. 67—69, S. 537—541; 545—549; 553—556. Poggendorff's Ann. Bd. 108, S. 280—290.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I. S. 397.

60. Ueber Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. *Heidelberger Jahrbuch. 1859, S. 354—357.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 16.

61. Ueber Farbenblindheit. *Verhdlgn. des naturhist.-med. Vereins zu Heidelberg. 11. November 1859. Bd. II, S. 1—3*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 346.

62. Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. *Journ. f. reine u. angew. Mathem. Bd. 57, S. 1—72.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 303.

63. Bericht über „die Theorie der Wärme" betreffende Arbeiten aus dem Jahre 1856. *„Fortschritte der Physik." 12. Jahrgang. S. 343—359. Berlin 1859. G. Reimer.*

1860

64. Ueber die Contrasterscheinungen im Auge. *Verhandlgn. des naturh.-med. Vereins zu Heidelberg vom 27. April 1860. Bd. II, S. 32—33.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 350.

65. Ueber musikalische Temperatur. *Verhdlgn. des naturh.-med. Vereins zu Heidelberg v. 23. Nov. 1860. — Poggend. Ann. Bd. 113, S. 87—90.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 420.

66. On the motion of the strings of a violin. *Proceedings of the Glasgow Philosophical Society, Dec. 19, 1860. — Phil. Magaz. 4 Ser. Vol. 21, p. 393—396.*
Der deutsche Originaltext ist abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 410.

67. Handbuch der physiologischen Optik. *2. Lieferung, S. 193—432. Leipzig 1860. Leopold Voss.*
(Vergl. oben Nr. 47 und weiter unten Nr. 94, 182, 183, 192, 198, 208 u. 217, sowie Nr. (2*) des Anhangs.)

68. Ueber Klangfarben. *Verhdlgn. des naturhist.-med. Vereins zu Heidelberg. Bd. II, S. 57. 1860.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 408.

69. Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. (Gemeinsam mit G. v. Piotrowski ausgeführt.) *Sitzungsberichte der k. k. Akad. der Wissenschaften zu Wien. Bd. 40, S. 607.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 172.

1861

70. Zur Theorie der Zungenpfeifen. *Verhdlgn. des naturhist.-med. Vereins zu Heidelberg. Bd. II, S. 159—164. Poggendorffs Ann. Bd. 114, S. 321—327.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 388.

71. Ueber eine allgemeine Transformationsmethode der Probleme über elektrische Vertheilung. *Verhdlgn. des naturhist.-med. Vereins zu Heidelberg. Bd. II, S. 185—188 (1861) und S. 217 (1862).*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 520.

72. On the Application of the Law of the Conservation of Force to Organic Nature. *Proc. Roy. Inst. Vol. III, p. 347—357.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 565.

1862

73. Ueber das Verhältniss der Naturwissenschaften zur Gesammtheit der Wissenschaften. *Rectoratsrede. Heidelberger Universitätsprogramm 1862.*
(Vergl. weiter unten Nr. 90, 141 u. 180, sowie Nr. (6*) des Anhangs.)

74. Ueber die arabisch-persische Tonleiter. *Verhdlgn. des naturhistor.-med. Vereins zu Heidelberg. Bd. II, S. 216—217.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 424.

75. Ueber die Form des Horopters, mathematisch bestimmt. *Verhdlgn. des naturhist.-med. Vereins zu Heidelberg, 24. Oktober 1862. Bd. III, S. 51—55.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 420.

1863

76. Ueber den Einfluss der Reibung in der Luft auf die Schallbewegung. *Verhdlgn. des naturhist.-med. Vereins zu Heidelberg vom 27. Febr. 1863. Bd. III, S. 16—20. — Heidelb. Jahrb. der Litteratur. 1863. Nr. 17.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 383.

77. Ueber die Bewegungen des menschlichen Auges. *Verhdlgn. des naturhist.-med. Vereins zu Heidelberg. Bd. III, S. 62—67. 1863. 8. Mai.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 352.

78. Ueber die normalen Bewegungen des menschlichen Auges. *Gräfe's Archiv für Ophthalmologie. Bd. 9, Abthl. 2. S. 153—214. 1863.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 360.

79. Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. *(XI u. 605 S. mit in den Text eingedruckten Holzst.) Braunschweig 1863. Fr. Vieweg u. Sohn.*

(Vergl. weiter unten Nr. 91, 115 u. 148.)

1864.

80. On the Normal Motions of the Human Eye in relation to Binocular Vision. *Croonian Lecture. Proceedings of the London Roy. Soc. Vol. XIII (1863/64) p. 186—199.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 25.

81. Lectures on the Conservation of Energy. Delivered at the Royal Institution. April 5, 7, 12, 14, 19 and 21, 1864. *Medical Times and Gazette. Vol. I for 1864. p. 385—388, 415—418, 443—446, 471—474. 499—501 527—530.*

82. Bemerkungen über die Form des Horopters. *Poggend. Ann. Bd. 123, S. 158—161.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 478.

83. Ueber den Horopter. *Heidelberger Jahrb. 1864, S. 340—342*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 21.

84. Versuche über das Muskelgeräusch. *Berl. Monatsberichte 23. Mai 1864, S. 307—310. — Verhdlgn. des naturh.-med. Vereins zu Heidelberg. 27. Mai 1864. Bd. III, S. 155 bis 157.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 924.

85. Ueber den Horopter. *Gräfe's Arch. f. Ophthalmologie. Bd. 10. Abth. 1, S. 1—60.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 427.

1865

86. Ueber den Einfluss der Raddrehung der Augen auf die Projection der Retinalbilder nach Aussen. *Verhdlgn.*

des naturh.-med. Vereins zu Heidelberg, 25. November 1864. Bd. III, S. 170—171.
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 482.

87. Ueber Eigenschaften des Eises. *Verhandlungen des naturh.-med. Vereins zu Heidelberg, Bd. III, S. 194—196.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 94.

88. Ueber stereoskopisches Sehen. *Verhdlgn. des naturh.-med. Vereins zu Heidelberg. 30. Juni 1865. Bd. IV, S. 8—11.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 492.

89. Ueber die Augenbewegungen. *Heidelberger Jahrbuch. 1865. S. 255—259.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 44.

90. Populäre wissenschaftliche Vorträge. *1. Heft. (VI u. 134 S. mit 26 in den Text eingedr. Holzschn.) Braunschweig 1865. Fr. Vieweg u. Sohn.*
Enthält:
a. Nr. 30 dieses Verzeichnisses.
b. Nr. 73 „ „
c. Ueber die physiologischen Ursachen der musikalischen Harmonie.
d. Eis und Gletscher.
(Vergl. Nr. 141 u. 180 sowie Nr. (1*), (10*), (12*) u. (17*) des Anhangs.)

91. Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. *2. Aufl. (XI u. 605 S. mit in den Text eingedruckten Holzst.). Braunschweig 1865. Fr. Vieweg n. Sohn.*
(Vergl. Nr. 79, 115 u. 148, sowie Nr. (3*) des Anhangs.

1866

92. Ueber den Muskelton. *Verhdlgn. des naturh.-med. Vereins zu Heidelberg vom 20. Juli 1866. Bd. IV, S. 88—90.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 928.

93. On the Regelation of Ice. *Philosoph. Magaz. (4. ser.) Vol. 32. pag. 22—23. — Arch. des scienc. phys. et nat. (2) XXVI, 241—243. — Revue des Cours scientifiques. Vol. III. p. 452.*

1867

94. Handbuch der physiologischen Optik. *3. (Schluss-) Lieferung. S. 433—874. Leipzig 1867. Leopold Voss.*
(Vergl. oben Nr. 47 u. 67 und weiter unten Nr. 182, 183, 192, 198, 208 u. 217, sowie Nr. (2*) des Anhangs.)

95. Mittheilung, betr. Versuche über die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit der Reizung in den motorischen Nerven des Menschen, welche Herr N. Baxt aus Petersburg im physiologischen Laboratorium zu Heidelberg ausgeführt hat. *Berliner Monatsberichte v. 29. April 1867. S. 228—234.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 932.

96. Ueber die Mechanik der Gehörknöchelchen. *Verhdlgn. des naturh.-med. Vereins zu Heidelberg. Bd. IV, S. 153—161. 9. August 1867.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 503.

1868

97. De la production de la sensation du relief dans l'acte de la vision binoculaire. *Compte-rendu du Congrès périodique internationale d'ophtalmologie à Paris 1867. Paris 1868. Baillière. S. 53—58.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 581.

98. Die neueren Fortschritte in der Theorie des Sehens. *Preuss. Jahrbücher, Bd. XXI, S. 149—171, 263—290 und 403—435.*
(Vergl. weiter unten Nr. 117, 142 u. 180.)

99. Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen. *Berliner Monatsberichte. 1868. S. 215—228.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 146.

100. Sur le mouvement le plus général d'un fluide. *Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris. T. 67, p. 221—225. 1868.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 135.

101. Sur le mouvement des fluides. *Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris. T. 67, p. 754—757. 1868.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 140.

102. Réponse à la Note de M. J. Bertrand du 19. octobre. *Comptes rendus de l'acad. des sciences de Paris. T. 67, p. 1034—1035. 1868.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 145.

103. Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie. *Verhandlgn. des naturh.-med. Vereins zu Heidelberg. Bd. IV, S. 197—202. 1868, 22. Mai. — Zusatz ebenda Bd. V, S. 31—32. 1869, 30. April.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 610.

104. Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen. *Nachrichten der k. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen. 1868, 3. Juni. Nr. 9. S. 193—221.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 618.

1869

105. Zur Theorie der stationären Ströme in reibenden Flüssigkeiten. *Verhdlgn. des naturh.-med. Vereins zu Heidelberg. Bd. V, S. 1—7.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 223.

106. Ueber die physiologische Wirkung kurzdauernder elektrischer Schläge im Innern von ausgedehnten leitenden Massen. *Verhdlgn. des naturh.-med. Vereins zu Heidelberg vom 12. Febr. 1869. Bd. V, S. 14—17.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 526.

107. Ueber elektrische Oscillationen. *Verhdlgn. des naturh.-med. Vereins zu Heidelberg. Bd. V, S, 27—31. — Tageblatt der 43. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Innsbruck im September 1869. S. 105—108.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 531.

108. Ueber die Schallschwingungen in der Schnecke des Ohres. *Verhandlgn. des naturh.-med. Vereins zu Heidelberg. Bd. V, S. 33—38. 25. Juni 1869.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 582.

109. Ueber das Heufieber. (Als briefliche Mittheilung enthalten in einer Abhandlung von C. Binz: pharmakologische Studien über das Chinin.) *Virchow's Archiv für patholog. Anatomie, Bd. 46, S. 100—102.*

110. Die Mechanik der Gehörknöchelchen und des Trommelfelles. *Pflüger's Arch. f. Physiologie. Bd. I, S. 1—60; auch separat erschienen. Bonn 1869, Max Cohen u. Sohn. (60 S. mit 12 Holzschn.)*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 515.
(Vergl. Nr. (7*) des Anhangs.)

1870

111. (Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Erste Abhandlung: Ueber die Gesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern. *Verhdlgn. des naturh.-med. Vereins zu Heidelberg. 21. Januar 1870. Bd. V, S. 84—89.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 537.

112. The axioms of geometry. *The Academy Vol. I, p. 128—131.*
(Fast wörtliche Uebersetzung einiger Abschnitte von Nr. 143b, vergl. Nr. (5*) des Anhangs.)

113. Neue Versuche über die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit der Reizung in den motorischen Nerven der Menschen, ausgeführt von N. Baxt aus Petersburg. *Berliner Monatsberichte. 31. März 1870, S. 184—191.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 939.

114. Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper. *Borchardt's Journ. f. d. reine u. angewandte Mathematik. Bd. 72, S. 57—129.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 545.

115. Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. *3. umgearb. Ausg. (XVI, 640 S. mit in den Text eingedr. Holzschn.) Braunschweig 1870. Fr. Vieweg u. Sohn.*
(Vergl. Nr. 79, 91 u. 148, sowie Nr. (9*) des Anhangs.)

116. Vorrede zur deutschen Übersetzung von J. Tyndall „Faraday as a discoverer.“ *S. V—XI. Braunschweig 1870. Fr. Vieweg und Sohn.*

1871

117. Populäre wissenschaftliche Vorträge. *2. Heft. (VII, 211 S. mit 25 in den Text eingedr. Holzschn.) Braunschweig 1871. Fr. Vieweg u. Sohn.*

Enthält:
a. Nr. 33 dieses Verzeichnisses.
b. Nr. 98 „ „
c. Ueber die Erhaltung der Kraft.
d. Ueber das Ziel und die Fortschritte der Naturwissenschaft. *Eröffnungsrede der Naturforscherversammlung zu Insbruck 1869.*

(Vergl. Nr. 142 u. 180, sowie Nr. (12*) u. (17*) des Anhangs.)

118. Vorrede zum ersten Theil des ersten Bandes der deutschen Uebersetzung von: W. Thomson und P. G. Tait „Treatise on Natural Philosophy.“ *S. X—XII. Braunschweig 1871. F. Vieweg u. Sohn.*

119. Ueber die Fortpflanzungs-Geschwindigkeit der elektro-dynamischen Wirkungen. *Berliner Monatsberichte. 25. Mai 1871. S. 292—298.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 629.

120. Ueber die Zeit, welche nöthig ist, damit ein Gesichtseindruck zum Bewusstsein kommt. Resultate einer von Herrn N. Baxt im Heidelberger Laboratorium ausgeführten Untersuchung. *Berliner Monatsberichte. 8. Juni 1871. S. 333—337.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 947.

121. Zum Gedächtniss an Gustav Magnus. *Denkschriften der Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1871, S. 1*

(Vergl. weiter unten Nr. 143 u. 180.)

1872

122. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. *Berliner Monatsberichte. 18. April 1872. S. 247—256.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd I, S. 636.

123. Ueber die galvanische Polarisation des Platins. *Tageblatt der 45. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Leipzig im August 1872. S. 110—111.*

124. Über die Wechselwirkung der Naturkräfte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittelungen der Physik. *Neuer Abdruck. 47 S. Königsberg 1872. Gräfe u. Unzer.*

(Vergl. oben Nr. 33.)

1873

125. Vergleich des Ampère'schen und Neumann'schen Gesetz- für die elektrodynamischen Kräfte. *Berliner Monatsberichte. 6. Februar 1873. S. 91—104.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 688.

126. Ueber ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken. *Berliner Monatsber. 1873, S. 501—514.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 158.

127. Ueber galvanische Polarisation in gasfreien Flüssigkeiten. *Berliner Monatsberichte. 1873. S. 587—597. Poggend. Ann. Bd. 150, S. 483—495.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 823.

128. Ueber die Grenzen der Leistungsfähigkeit der Mikroskope. *Berliner Monatsberichte. 20. Octbr. 1873. S. 625—626.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 183.

129. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Zweite Abhandlung: Kritisches. *Borchardt's Journ. für reine und angewandte Mathematik. Bd. 75, S. 35—66.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 647.

1874

130. Ueber die Theorie der Elektrodynamik. Dritte Abhandlung: Die elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern. *Borchardts Journ. Bd. 78, S. 273—324.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 702.

131. Die theoretische Grenze für die Leistungsfähigkeit der Mikroskope. *Poggend. Ann. Jubelband 1874, S. 557—584.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 185.

132. Kritisches zur Elektrodynamik. *Poggend. Ann. Bd. 153, S. 545—556.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 763.

133. Zur Theorie der anomalen Dispersion. *Berl. Monatsberichte. 29. Octbr. 1874. S. 667—680. — Poggend. Ann. Bd. 154, S. 582—596. 1875.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 213.

134. On the later views of the connection of electricity and magnetism. *Annual Report of the Smithonian Institution for 1873. p. 247—253.*

135. Kritisches. Vorrede zum zweiten Theile des ersten Bandes von „W. Thomson and P. G. Tait, Treatise on Natural Philosophy.“ *S. V—XIV. Braunschweig 1874. Fr. Vieweg u. Sohn.*
(Vergl. weiter unten Nr. 180.)

136. Vorrede und Kritische Beilage zur deutschen Uebersetzung von „J. Tyndall. Fragments of Science.“ *S. V—XXV u. 581—597. Braunschweig 1874. Fr. Vieweg u. Sohn.*
(Vergl. weiter unten Nr. 180.)

1875

137. Versuche über die im ungeschlossenen Kreise durch Bewegung inducirten elektromotorischen Kräfte. *Berl. Monatsberichte. 17. Juni 1875. S. 400—415. — Poggend. Ann. Bd. 158, S. 87—105.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 774.

1876

138. Wirbelstürme und Gewitter. *Deutsche Rundschau. Bd. 6, S. 363—380.*
(Vergl. Nr. 180.)

139. Bericht betreffend Versuche über die elektromagnetische Wirkung elektrischer Convection, ausgeführt von Hrn. Henry A. Rowland. *Berl. Monatsberichte, 16. März 1876. S. 211—216. — Poggend. Ann. Bd. 158, S. 487—493.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 791.

140. Bericht über Versuche des Hrn. Dr. E. Root aus Boston, die Durchdringung des Platins mit elektrolytischen Gasen betreffend. *Berliner Monatsberichte. 16. März 1876. S. 217—220. — Poggend. Ann. Bd. 159, S. 416—420.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 835.

141. Populäre wissenschaftliche Vorträge. *1. Heft. 2. Aufl. Braunschweig 1876. Fr. Vieweg u. Sohn.*
(Vergl. Nr. 90 u. 180, sowie Nr. (12*) u. (17*) des Anhangs.)

142. Populäre wissenschaftliche Vorträge. *2. Heft. 2. Aufl. Braunschweig 1876. Fr. Vieweg u. Sohn.*
(Vergl. Nr. 117 u. 180, sowie Nr. (12*) u. (17*) des Anhangs.)

143. Populäre wissenschaftliche Vorträge. *3. Heft. (VII u. 139 S. mit eingedr. Holzstichen.) Braunschweig 1876. Fr. Vieweg u. Sohn.*
Enthält:
a. Nr. 121 dieses Verzeichnisses.
b. Ueber die Axiome der Geometrie.
c. Optisches über Malerei.
d. Ueber die Entstehung des Planetensystems.
(Vergl. Nr. 112, 144 u. 180, sowie Nr. (11*), (12*) u. (17*) des Anhangs.)

144. The origin and meaning of geometrical axioms. *Mind. Vol. I, p. 301—321.*
(Fast wörtliche Übersetzung der unter 143b aufgeführten Abhandlung.)
(Vergl. Nr. 151.)

1877

145. Das Denken in der Medicin. *Rede, gehalten zur Feier des Stiftungstages der militärärztl. Bildungsanstalten am 2. Aug. 1877. (36 S.) Berlin 1877. A. Hirschwald.*
(Vergl. weiter unten Nr. 152 u. 180.)

146. Ueber die akademische Freiheit der deutschen Universitäten. Rektoratsrede vom 15. Okt. 1877. *Universitätsprogramm Berlin 1877.*
(Vergleiche weiter unten Nr. 155 u. 180.)

147. Ueber galvanische Ströme, verursacht durch Concentrationsunterschiede; Folgerungen aus der mechanischen Wärmetheorie. *Berliner Monatsberichte. 26. November 1877. S. 713—726. — Wiedemanns Ann. Bd. 3, S. 201—216.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 480.

148. Die Lehre von den Tonempfindungen, als physiol. Grundlage für die Theorie der Musik. *4. umgearb. Auflage, (XX, 675 S. mit in den Text eingedr. Holzschn.). Braunschweig 1877. Fr. Vieweg u. Sohn.*
(Vergl. Nr. 79, 91 u. 115, sowie (13*) des Anhangs.)

1878

149. Telephon und Klangfarbe. *Berliner Monatsberichte. 11. Juli 1878, S. 488—500. — Wiedemanns Ann. Bd. 5, S. 448—460.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 463.

150. Ueber die Bedeutung der Convergenzstellung der Augen für die Beurtheilung des Abstandes binocular gesehener Objecte. *Verhandlungen der physiol. Gesellschaft zu Berlin. 10. Mai 1878. S. 57—59. — du Bois-Reymond's Archiv Jahrgang 1878. S. 322—324.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 497.

151. The origin and meaning of geometrical axioms (II.) *Mind. Vol. III, p. 212—225.*
(Vergl. oben Nr. 144.)
Der deutsche Originaltext ist abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 640.

152. Das Denken in der Medicin. *2. neu durchgearbeitete Aufl. (39 S.) Berlin 1878. A. Hirschwald.*
(Vergl. oben Nr. 145 und weiter unten Nr. 180.)

153. Die Thatsachen in der Wahrnehmung. *Rede, gehalten zur Stiftungsfeier der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin am 3. Aug. 1878. Univ.-Programm. Berlin 1878.*
(Vergl. weiter unten Nr. 158 u. 180.)

154. Lord Rayleigh's „Theory of Sound.“ *Nature. Vol. XVII, p. 237—239 und Vol. XIX, p. 117—118.*

155. Ueber die akademische Freiheit der deutschen Universitäten. *(30 S.) Berlin 1878. A. Hirschwald.*
(Vergl. oben Nr. 146 und weiter unten Nr. 180.)

1879

156. Ueber elektrische Grenzschichten. *Berliner Monatsberichte vom 27. Febr. 1879. S. 198—200.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 49.

157. Studien über elektrische Grenzschichten. *Wiedemanns Ann. Bd. 7, S. 337—382.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 855.

158. Die Thatsachen in der Wahrnehmung. *Rede, gehalten zur Stiftungsfeier der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin*

am 3. Aug. 1878, überarbeitet und mit Zusätzen versehen. (68 S.) Berlin 1879. A. Hirschwald.
(Vergl. oben Nr. 153 und weiter unten Nr. 180.)

1880

159. Ueber Bewegungsströme am polarisirten Platina. *Berliner Monatsberichte. 1880, 11. März. S. 285—305. — Wiedemanns Ann. Bd. XI. S. 737—759.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 899.

1881

160. Vorbemerkung zu einer nachgelassenen Abhandlung von Franz Boll: Thesen und Hypothesen zur Licht- und Farbenempfindung. *du Bois-Reymond's Archiv. Jahrgang 1881. S. 1—3.*

161. Ueber die auf das Innere magnetisch oder diëlektrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte. *Berliner Monatsberichte. 17. Febr. 1881. S. 191—213. — Wiedemanns Ann. Bd. 13. S. 385—406.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 798.

162. On the modern development of Faraday's conception of electricity. *Journal of the Chemical Society. June 1881.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 52.
(Der deutsche Originaltext ist enthalten in Nr. 180c.)
(Ein vom Verfasser hergestellter Auszug wurde veröffentlicht in: Nature. Vol. XXIII, p. 536—540.)

163. Note on stereoscopic vision. *Phil. Mag. (5 ser.) Vol. XI. p. 507—508.*
(Dem Inhalte nach identisch mit Nr. 150; zum Theil wörtliche Übersetzung.)

164. Eine elektrodynamische Waage. *Wiedemanns Ann. Bd. 14. S. 52—54.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 922.

165. Ueber die Berathungen des Pariser Congresses betreffend die elektrischen Maasseinheiten. *Elektrotechnische Zeitschrift 2. Jahrg. S. 482—489.*
(Vergl. weiter unten Nr. 180.)

166. Ueber galvanische Polarisation des Quecksilbers und darauf bezügliche neue Versuche des Hrn. Arthur König. *Berliner Monatsberichte. 3. Novbr. 1881.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. I, S. 829.

1882

167. Die Thermodynamik chemischer Vorgänge. *Berl. Sitzungsberichte. 2. Febr. 1882.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 958.

168. Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge. *Berl. Sitzungsberichte. 27. Juli 1882.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 979.

169. Ueber absolute Maasssysteme für elektrische und magnetische Grössen. *Wiedemanns Ann. Bd. 17, S. 42—54, 1882.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. II, S. 993.

170. Bericht über die Thätigkeit der internationalen elektrischen Commission. *Verhandlungen der physikal. Gesellschaft zu Berlin. Sitzung vom 17. Nov. 1882.*

171. Wissenschaftliche Abhandlungen. *1. Bd. (VIII u. 938 S. Mit Porträt, drei lithographirten Tafeln und vielen Textillustrationen.) Leipzig 1882. J. A. Barth.*
(Ueber den Inhalt geben die Anmerkungen zu vielen Nummern dieses Verzeichnisses Aufschluss.)
(Vergl. weiter unten Nr. 174 und 219.)

1883

172. Bestimmung magnetischer Momente durch die Waage. *Berl. Sitzungsber. 5. April 1883. S. 405—408.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 115.

173. Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge. Folgerungen, die galv. Polarisation betreffend. *Berl. Sitzungsber. 31. Mai 1883. S. 647—665.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 92.

174. Wissenschaftliche Abhandlungen. *2. Bd. (VI. u. 1019 S. Mit fünf lithographirten Tafeln.) Leipzig 1883. J. A. Barth.*
(Ueber den Inhalt geben die Anmerkungen zu vielen Nummern dieses Verzeichnisses Aufschluss.)
(Vergl. oben Nr. 171 und weiter unten Nr. 219.)

1884

175. On galvanic currents passing through a very thin stratum of an electrolyte. *Proc. Edinb. Roy. Soc. 1883/4, p. 596—599.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 88.

176. Studien zur Statik monocyklischer Systeme. *Berl. Sitzungsber. 6. März, 27. März und 10. Juli 1884. S. 159—177, S. 311—318 u. S. 755—759.*

Zum Theil wörtlich übereinstimmend mit dem Anfang des Aufsatzes Nr. 179.

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen Bd. III. S. 117, 163 u. 173.

177. Über die Beschlüsse der internationalen Conferenz für elektrische Maasseinheiten. *Verhandl. der physikal. Gesellschaft in Berlin vom 9. Mai 1884. Jahrg. III, S. 26—28.*

178. Verallgemeinerung der Sätze über die Statik monocyklischer Systeme. *Berl. Sitzungsber. 18. Dec. 1884. S. 1197—1201.*

Dieser Aufsatz ist zurückgenommen, da er einen fehlerhaften Schluss enthält. (H. v. H.)

179. Principien der Statik monocyklischer Systeme. *Crelle's Journ. 1884. Bd. 97, S. 111—140, S. 317—336.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 142 u. 179.

180. Vorträge und Reden. *Zugleich 3. Aufl. der „Populären wissenschaftlichen Vorträge.“ 2 Bde. (XIII, 396; XII, 380 S. mit in den Text eingedr. Holzst.) Braunschweig 1884. Fr. Vieweg u. Sohn.*

Inhalt:

a. Die bereits in Nr. 90, 117. u. 143 abgedruckten Vorträge.

b. Nr. 36, 138, 145, 146, 153, 165, 135 u. 136 dieses Verzeichnisses.

c. Der deutsche Originaltext von Nr. 162.

d. Robert Mayer's Priorität (als Zusatz zu Nr. 33 dieses Verzeichnisses).

(Vergl. Nr. (17*) des Anhanges.)

1885

181. Report on Sir William Thomson's Mathematical and Physical Papers. Vol. I and II. *Nature Vol. 32. p. 25—28. May 14 1885.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 587.

182. Handbuch der physiologischen Optik. *2. umgearb. Aufl. Mit zahlreichen in den Text eingedr. Holzschn. 1. Liefer. S. 1—80. Hamburg 1885. L. Voss.*
(Vergl. oben Nr. 47, 67 u. 94 und weiter unten Nr. 183, 192, 198, 208 u. 217.)

1886

183. Handbuch der physiologischen Optik. *2. umgearb. Aufl. Mit zahlreichen in den Text eingedr. Holzschn. 2. u. 3. Liefer. S. 81—240. Hamburg 1886. L. Voss.*
Vergl. oben Nr. 47, 67, 94. u. 182 und weiter unten Nr. 192, 198, 208 u. 217.)

184. Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung. *Crelle's Journ. 1886. Bd. 100, S. 137—166 u. S. 213—222.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 203.

185. Rede beim Empfang der Gräfe-Medaille. *Bericht über die 18. Versammlung der ophthalmologischen Gesellschaft. 1. Heftchen. Festsitzung am 9. Aug. 1886. Stuttgart 1886. F. Enke. S. 43—52.*

186. Ueber Wolken- und Gewitterbildung. *Verhandl. der Physikal. Gesellschaft zu Berlin. 1886, 22. Oct., S. 96—97.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 287.

1887

187. Zur Geschichte des Princips der kleinsten Action. *Berl. Sitzungsber. 1887. S. 225—236.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 249.

188. Versuch um die Cohäsion von Flüssigkeiten zu zeigen. *Verhandlungen der Physikal. Gesellschaft zu Berlin. 1887, 4. Febr. S. 16—18.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 264.

189. Joseph Fraunhofer. Rede bei der Gedenkfeier, zur hundertjährigen Wiederkehr seines Geburtstages (6. März 1887). *Zeitschrift für Instrumentenkunde, 7. Jahrgang. S. 115—122.*

190. Weitere Untersuchungen, die Elektrolyse des Wassers betreffend. *Berl. Sitzungsbericht vom 28. Juli 1887, S. 749 bis 758. Wiedem. Ann. Bd. 34, S. 737—751 (mit Nachtrag).*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 267.

191. Zählen und Messen, erkenntnisstheoretisch betrachtet. *Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet. Leipzig 1887. Fues' Verlag. S. 17—52.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 356.

192. Handbuch der physiologischen Optik. *2. umgearb. Aufl. Mit zahlreichen in den Text eingedr. Holzschn. 4. Liefer. S. 241—320. Hamburg 1887. L. Voss.*
(Vergl. oben Nr. 47, 67, 94, 182 u. 183 und weiter unten Nr. 198, 208 u. 217.)

193. Mittheilung zu dem Bericht über die Untersuchung einer mit der Flüssigkeit Pictet arbeitenden Eismaschine. *Verhandlungen der Berl. Physikal. Gesellschaft. 1887. S. 97—101 und 112—114.* *
* Theilweise abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 282.

1888

194. Ueber atmosphärische Bewegungen. *Berl. Sitzungsber. vom 31. Mai 1888, S. 647—663. — Meteorol. Zeitschrift. 1888, S. 329—340.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 289.

195. Über das Eigenlicht der Netzhaut. *Verhandlungen der physikal. Gesellschaft zu Berlin vom 2. Nov. 1888, Jahrg. VII, S. 85—86.*

1889

196. Zur Erinnerung an R. Clausius. *Verhandlungen der physikal. Gesellschaft zu Berlin vom 11. Januar 1889, Jahrg. VIII, S. 1—6.*

197. Ueber atmosphärische Bewegungen. Zweite Mittheilung. *Berl. Sitzungsbericht vom 25. Juli 1889, S. 761—780. — Im Auszug abgedruckt in den Verhandlungen der physikal. Gesellschaft zu Berlin vom 25. Oct. 1889, Jahrg. VIII, S. 61—76.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 309.

198. Handbuch der physiologischen Optik. *2. umgearb. Aufl. Mit zahlreichen in den Text eingedr. Holzschn. 5. Lieferung. (S. 321—400.) Hamburg 1889. L. Voss.*

(Vergl. oben Nr. 47, 67, 94, 182, 183 u. 192 und weiter unten 208 u. 217.)

1890

199. Die Störung der Wahrnehmung kleinster Helligkeitsunterschiede durch das Eigenlicht der Netzhaut. *Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane. Bd. 1, S. 5—17, 1890.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 392.

200. Die Energie der Wogen und des Windes. *Berl. Sitzungsber. 17. Juli 1890, S. 853—872. — Wiedem. Ann. Bd. 41, S. 641—662.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 333.

201. Suggestion und Dichtung. *Deutsche Dichtung. Bd. IX, S. 125. Später abgedruckt in: K. E. Franzos. Die Suggestion und die Dichtung. Berlin 1892. F. Fontane u. Co. S. 69—71.*

1891

202. Bemerkungen über die Vorbildung zum akademischen Studium. *Verhandlungen über Fragen des höhern Unterrichts. Berlin, 4.—17. Dec. 1890. Berlin 1891. W. Hertz, S. 202—209 u. 763—764.*

203. Versuch einer erweiterten Anwendung des Fechner'schen Gesetzes im Farbensystem. *Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane. Bd. 2, S. 1—30.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 407.

204. Versuch, das psychophysische Gesetz auf die Farbenunterschiede trichromatischer Augen anzuwenden. *Zeitschr.*

für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane. Bd. 3, S. 1—20 u. S. 517.

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 438.

205. Kürzeste Linien im Farbensystem. *Berl. Sitzungsbericht vom 17. December 1891, S. 1071—1083. — (Auszug.) Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane. Bd. 3, S. 108—122.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 460.

1892

206. Autobiographisches. Tischrede bei der Feier des 70. Geburtstages. *In: Ansprachen und Reden, gehalten bei der am 2. November 1891 zu Ehren von Hermann v. Helmholtz veranstalteten Feier. Berlin 1892. A. Hirschwald. S. 46—59.*

207. Das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik. *Berl. Sitzungsbericht vom 12. Mai 1892, S. 459—475. Wiedem. Ann. Bd. 47, S. 1—26.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 476.

208. Handbuch der physiologischen Optik. *2. umgearb. Auflage. Mit zahlreichen in den Text eingedr. Holzschn. 6. u. 7. Liefer. (S. 401—560.) Hamburg 1892. L. Voss.*

(Vergl. oben Nr. 47, 67, 94, 182, 183, 192 u. 198 und weiter unten Nr. 217.)

209. Goethe's Vorahnungen kommender naturwissenschaftlicher Ideen. *Rede, gehalten in der Generalversammlung der Goethe-Gesellschaft zu Weimar den 11. Juni 1892. Deutsche Rundschau, Bd. 72, S. 115—132, auch separat. Berlin 1892. Gebr. Pätel. 55 S.*

210. Elektromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung. *Berl. Sitzungsbericht vom 15. December 1892, S. 1093—1109 Wiedemanns Ann. Bd. 48, S. 389—405, 1893.*

Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III. S. 505.

1893

211. Zusätze und Berichtigungen zu dem Aufsatze: „Elektromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung." *Wiedem. Ann. Bd. 48, S. 723—725, 1893.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 523.

212. Adresse an Hrn. E. du Bois-Reymond bei Gelegenheit seines 50jährigen Doctorjubiläums verfasst im Auftrage der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. *Berliner Sitzungsberichte vom 16. Febr. 1893. S. 93—97.*

213. Folgerungen aus Maxwell's Theorie über die Bewegungen des reinen Aethers. *Berliner Sitzungsberichte vom 6. Juli 1893, S. 649—656. — Wiedem. Ann., Bd. 53, S. 135—143.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 526.

214. Gustav Wiedemann beim Beginn des 50. Bandes seiner Annalen der Physik und Chemie gewidmet. *Als Huldigungsgabe dem Jubelbande von der Verlagsbuchhandlung beigegeben. Wiedem. Ann., Bd. 50, S. III—XI.*

1894

215. Über den Ursprung der richtigen Deutung unserer Sinneseindrücke. *Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane. Bd. 7, S. 81—96.*
Abgedruckt in Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 536.

216. Vorwort zu: Heinrich Hertz, Prinzipien der Mechanik. *Leipzig 1894. Joh. Ambr. Barth, S. VII—XXVII.*

217. Handbuch der physiologischen Optik. *2. umgearbeitete Auflage mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzschn. 8. Lieferung. (S. 561—640.) Hamburg 1894. L. Voss.*
(Vergl. Nr. 47, 67, 94, 132, 183, 192, 198 u. 208.)
Die Schlusslieferungen erscheinen im Jahre 1895 nach dem Tode des Verfassers. (A. K.)

Nachgelassene Arbeiten.

218. Nachtrag zu dem Aufsatze: Ueber das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik.

Der Inhalt der Abhandlung wurde vorgetragen in der Sitzung der Berliner Akademie vom 14. Juni 1894; das unvollendet hinterlassene Manuscript ist veröffentlicht in: Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. III, S. 597. (A. K.)

219. Wissenschaftliche Abhandlungen. *3. Bd. (XXXVIII u. 654 S.) Mit einem Portrait. Leipzig 1895. J. A. Barth.*

(Ueber den Inhalt geben die Anmerkungen zu vielen Nummern dieses Verzeichnisses Aufschluss.)

(Vergl. oben Nr. 171 u. 174.)

Beim Tode des Verfassers war etwa zwei Drittel dieses Werkes im Reindruck vollendet. Siehe das Vorwort (A. K.)

Anhang:

Uebersetzungen und Neudrucke.

(1*) La glace et les glaciers. *Revue des Cours scientifiques Tome III, p. 433—447. 2 juin 1866.*

(Uebersetzung von Nr 90d.)

(2*) Optique physiologique, traduite par E. Javal et N. Th. Klein. *Avec 213 fig. dans le texte et un atlas de 11 planches. Paris 1867. V. Masson et Fils. XI et 1057 pages.*

(Uebersetzung von Nr. 47, 67 u. 94.)

(3*) Théorie physiologique de la Musique fondée sur l'étude des sensations auditives. Trad. par M. G. Guérault. *1868 Paris.*

(Uebersetzung von Nr. 91.)

(4*) Mémoire sur la conservation de la force précédé d'un exposé élémentaire de la transformation des forces naturelles. Traduit par L. Pérard. *Paris 1869. V. Masson et Fils. III et 137 pages.*

(Uebersetzung von Nr. 6 u. 33.)

(5*) Les axiomes de la géométrie. *Revue des Cours scientifiques. 23 juillet 1870. Vol. VII, p. 498—501.*
(Uebersetzung von Nr. 112.)

(6*) On the relation of the physical sciences to science in general. *Annual report of the Smithonian Institution for the year 1871, p. 217—234.*
(Uebersetzung von Nr. 73)

(7*) The mechanism of the ossicles of the ear and membrana tympani. *Translated by A. H. Buck and N. Smith. New-York 1873.*
(Uebersetzung von Nr. 110.)

(8*) John Tyndall. *Nature Vol. X, p. 299—302. 1874.*
(Uebersetzung von Nr. 136)

(9*) On the Sensation of Tone as a physiological basis for the theory of Music. *Translated by Alexander J. Ellis. London 1875.*
(Uebersetzung von Nr. 115.)

(10*) Les causes physiologiques de l'Harmonie Musicale. *Paris 1877.*
(Übersetzung von Nr. 90c.)

(11*) L'Optique et la Peinture. *Paris 1878.*
(Übersetzung von Nr. 143c.)

(12*) Popular Lectures on Scientific Subjects, translated by E. Atkinson. *London 1881.*
(Uebersetzung von Nr. 141, 142 u. 143.)

(13*) On the Sensation of Tone as a physiological basis for the theory of Music. *Translated by Alexander J. Ellis. 2. edition. London 1885.*
(Uebersetzung von Nr. 148.)

(14*) Ueber die Erhaltung der Kraft. *(1847.) In: Ostwald. Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 1. Leipzig 1889. W. Engelmann.*
(Neudruck von Nr. 6.)

(15*) Beschreibung eines Augenspiegels zur Untersuchung der Netzhaut im lebenden Auge (1851). *In: Aeltere Bei-*

träge zur Physiologie der Sinnesorgane. Herausgegeben von Arthur König. Bd. I, S. 41—87. Hamburg 1893. L. Voss.

(Neudruck von Nr. 15.)

(16*) Ueber eine neue einfachste Form des Augenspiegels. *In: Aeltere Beiträge zur Physiologie der Sinnesorgane. Herausgegeben von Arthur König. Bd. I, S. 127—154. Hamburg 1893. L. Voss.*

(Neudruck von Nr. 27.)

(17*) Popular Lectures on Scientific Subjects, translated by E. Atkinson. *2. edition. London 1893.*

(Vergl. Nr. (12*).)

Personen- und Sach-Register

zu

Band I—III

der

WISSENSCHAFTLICHEN ABHANDLUNGEN

von

Hermann von Helmholtz.

Personen-Register zu Band I—III.

Die römischen Ziffern beziehen sich auf den Band, die arabischen auf die Seite.

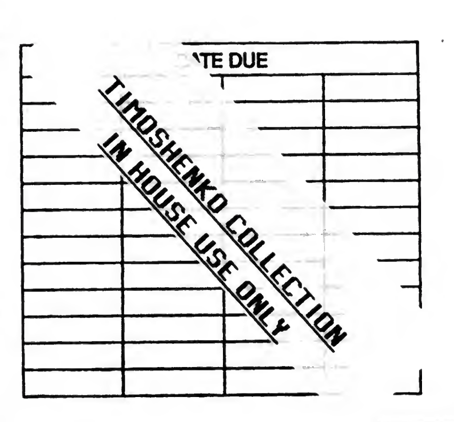
Sach-Register zu Band I—III.

Die römischen Ziffern beziehen sich auf den Band, die arabischen auf die Seite.

Mit einem * sind diejenigen Stellen ausgezeichnet, an welchen sich über den betreffenden Gegenstand eine eingehendere Darlegung findet.

Druck von C. Grumbach in Leipzig.


Stanford University Libraries
3 6105 010 774 102


TE DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY

